

随机多组模型的平稳分布

袁俊叶, 张一帆, 郭英

青岛理工大学理学院, 山东 青岛
Email: 17860423518@139.com, ZhangYiFan0909@163.com, mathgy@126.com

收稿日期: 2020年12月6日; 录用日期: 2020年12月19日; 发布日期: 2021年1月11日

摘要

本文主要利用图论的方法分析具有扩散的随机多组模型的平稳分布。然后, 我们利用Lyapunov方法和图论得到了两个保证平稳分布存在的主要定理, 其中得到的充分条件具有较少的保守性, 反映了平稳分布与随机扰动和拓扑结构密切相关。此外, 理论结果被应用到随机耦合振子中。最后, 通过数值模拟说明了本文结果的有效性。

关键词

平稳分布, 图论, 随机多组模型, 随机耦合振子

Stationary Distribution Analysis for Stochastic Multi-Group Models

Junye Yuan, Yifan Zhang, Ying Guo

College of Science, Qingdao University of Technology, Qingdao Shandong
Email: 17860423518@139.com, ZhangYiFan0909@163.com, mathgy@126.com

Received: Dec. 6th, 2020; accepted: Dec. 19th, 2020; published: Jan. 11th, 2021

Abstract

This paper mainly uses graph theory to analyze the stationary distribution for stochastic multi-group models with dispersal. Two main theorems are obtained to guarantee the existence of a stationary distribution via Lyapunov method and graph theory, in which sufficient conditions derived are less conservative and they reflect that stationary distribution having a close connection with stochastic disturbance and topological structure. Furthermore, theoretical results are used to analyze stochastic coupled oscillators. In the end, numerical simulation is given to demonstrate the availability of our results.

Keywords

Stationary Distribution, Graph Theory, Stochastic Multi-Group Models, Stochastic Coupled Oscillators

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文致力于研究多组模型(简称MGMs)平稳分布的存在性。早在1976年, Lajmanovich和Yorke [1]就首次提出了MGMs来解释性传播疾病。自那以后, 因为MGMs 在许多领域起着至关重要的作用, 许多研究者开始对MGMs进行研究。例如, 在流行病学中, MGMs被用来描述许多传染病的动力学行为。在 [2]中, Huang等人研究了HIV/AIDS 多组模型的分岔和稳定性, 以及一类多组传染病模型。Aberrahman 和Gauthier [3]研究了一种病媒传播疾病的多组模型, 它的动力学性质日益引起学者的关注。在生物数学中, 由于空间异质性和人类活动范围的不断扩大, 大多数物种的栖息地被划分为单独的斑块 [4] [5], 物种在多斑块中的行为可以用MGMs来描述。在计算机网络中, 计算机蠕虫是一种主要的安全威胁, 它可以破坏机密信息的安全, 使计算机失去动力, 甚至导致经济损失 [6]。计算机蠕虫的数学描述可以通过MGMs给出, 而且对MGMs 的动力学研究是控制蠕虫传播的有效方法 [7]。因此, 研究MGMs 的动力学性质是十分有必要的。

在生物学上, 由于没有其他斑块的相互作用, 一些斑块中的物种正濒临灭绝。因此, 考虑具

有扩散的MGMs是非常重要的,并且在 [8] [9] [10]中有许多有用的结论。在流行病学中,疾病的传播受温度、湿度等因素的影响。在生物数学中,物种在不同斑块间的扩散受季节变化的影响。因此,考虑具有扩散的随机多组模型(简称SMGMD)在现实世界中更为合理。近年来,许多学者都在研究SMGMD的动力学性质,而且得到了一些结果 [11] [12] [13]。然而,上述结果大多是关于随机多组模型的稳定性。因为平衡点的存在可能会受到随机扰动的影响,从而导致平稳分布的存在。所以,一个有趣的问题出现了,那就是在什么条件下SMGMD会存在平稳分布。

当解在同源确定性模型的平衡点附近波动时,平稳分布可视为弱稳定性。近年来,平稳分布的存在性被广泛应用于许多领域,如生物数学中的随机捕食者-食饵系统 [14] [15] [16] [17],流行病学中的传染病 [18] [19],人口学中的种群系统等 [20] [21]。在 [22]中, Mao等人利用Euler-Maruyama格式得到了具有马尔可夫切换的随机微分方程的平稳分布。在 [23]中, Hasminskii用Lyapunov函数研究了平稳分布的存在性。在 [24]一文中, Huang等人用Lyapunov方法和水平集方法分析了Fokker-Planck方程稳态的存在性。然而,当系统维数较高时,由于在复杂的分析过程以及直接寻找全局Lyapunov函数方面存在困难,因此,要克服这些困难,就必须提出一种新的方法。

本文采用一种新的方法,就是结合Lyapunov方法, [24]中的水平集法以及 [5]中的图论,研究SMGMD平稳分布的存在性。然后得到两个主要定理,回答上述问题。之后,将结果用于生物数学和物理学。与现有文献中关于平稳分布存在性的文献不同,我们的结果有如下贡献。首先,我们研究了SMGMD平稳分布的存在性,将方法从单有向图推广到多有向图,使模型更具一般性。其次,将Lyapunov方法与图论相结合,避免了直接构造Lyapunov函数的困难,而且简化了复杂的分析过程。第三,我们的结果被用来分析随机耦合振子。这也说明了我们结果的实用性。

2. 预备知识

这一部分主要介绍了预备知识,包括符号和模型描述。

2.1. 符号

在本小节中,我们将介绍一些相关的符号。这里 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 是一个完备的概率空间,其中滤子 $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$,满足通常的条件。向量的欧几里得范数或矩阵的迹范数用 $|\cdot|$ 表示。让 \mathbb{R}^n 代表 n 维欧几里得空间。向量或矩阵的转置用上标“T”表示。此外, $\mathbb{L} = \{1, 2, \dots, l\}$, $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$, $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ 和 $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ 。而 $C^2(\mathbb{R}^n)$ 代表 \mathbb{R}^n 上的所有非负函数 $V(x)$,它们在 x 中连续两次可微。

2.2. 模型描述

在本文中, (\mathcal{G}, A_i) 代表有向图,其中 $A_i = (a_i^{(kh)})_{l \times l}$ 。这里 $V(\mathcal{G})$ 表示 \mathcal{G} ,在不失一般性的情况下,有 $V(\mathcal{G}) = \mathbb{L}$, $L_i = (r_i^{(kh)})_{l \times l}$ 通过拉普拉斯矩阵 (\mathcal{G}, A_i) 来表示,其中

$$\begin{cases} r_i^{(kh)} = -a_i^{(kh)}, & k \neq h; \\ r_i^{(kh)} = \sum_{h \neq k} a_i^{(kh)}, & k = h, \end{cases}$$

当任何一对不同的顶点存在从一个到另一个的有向路径时, 则有向图 \mathcal{G} 是强连通的。关于图论的其他一些重要概念和符号, 可以参见 [5]。首先在有向图 \mathcal{G} 上建立了一个一般随机系统。我们假设第 k 个($k \in \mathbb{L}$) 群中的动力系统描述如下:

$$dx_i^{(k)} = f_i^{(k)}(x^{(k)}) dt + g_i^{(k)}(x_i^{(k)}) dB_i^{(k)}, i \in \mathcal{N}, \quad (1)$$

其中 $f_i^{(k)}: \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x^{(k)} = \left((x_1^{(k)})^T, \dots, (x_n^{(k)})^T \right)^T$ 和 $g_i^{(k)}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$, $B_i^{(k)}$ 是一个 m 维的布朗运动。函数 $H_i^{(kh)}$ 可以表示第 i 个变量中, 从第 h 个组到第 k 个组的扩散。

$$dx_i^{(k)} = f_i^{(k)}(x^{(k)}) dt + g_i^{(k)}(x_i^{(k)}) dB_i^{(k)}, i \in \mathcal{N}, \quad (2)$$

然后将扩散这一因素考虑进去, 可以得到

$$dx_i^{(k)} = \left[f_i^{(k)}(x^{(k)}) + \sum_{h=1}^l H_i^{(kh)}(x_i^{(k)}, x_i^{(h)}) \right] dt + g_i^{(k)}(x_i^{(k)}) dB_i^{(k)}, i \in \mathcal{N}, \quad (3)$$

其中 $H_i^{(kh)}: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f_i^{(k)} + \sum_{h=1}^l H_i^{(kh)}$ 表示漂移系数, $H_i^{(kh)}$ 表示耦合函数, $g_i^{(k)}$ 表示扩散系数。此外, 我们假设 $f_i^{(k)}$, $g_i^{(k)}$ 和 $H_i^{(kh)}$ 在变量中连续一次可微。

$$\begin{aligned} \text{令 } x &= \left((x^{(1)})^T, (x^{(2)})^T, \dots, (x^{(l)})^T \right)^T, G(x) = \text{diag} \left(\left(g_i^{(k)} \right)_j \right)_{mnl \times mnl}, \\ F(x) &= \left(\left(f_i^{(k)} + \sum_{h=1}^l H_i^{(kh)} \right)_j \right)_{mnl \times 1}, \text{ 以及 } B = \left(\left(B_i^{(k)} \right)^T \right)_{mnl \times 1}^T, \text{ 然后系统(3)可以被重新写作} \\ dx &= F(x)dt + G(x)dB. \end{aligned}$$

在系统(3)中, 我们假设函数 $f_i^{(k)}$, $g_i^{(k)}$ 和 $H_i^{(kh)}$ 满足Lipschitz 条件以及线性增长条件。根据文献 [25]中的定理3.1, 系统(3) 有唯一解, 也就是 $x(t) = \left((x^{(1)}(t))^T, \dots, (x^{(l)}(t))^T \right)^T$ 带有初值 $x(0) = x_0$. 定义 $D = (d_{ij}) = \frac{GG^T}{2}$, 其中矩阵 D 处处正定。

3. SMGMD平稳分布的存在性

我们使用的方法是将Lyapunov方法与图论相结合, 同时为了保证随机多组模型平稳分布的存在, 给出了两个主要定理。首先, 为了得到主要结果, 假设和定义安排如下。

假设 1: 对于任意的 i, j , $d_{ij} \in W_{loc}^{1, \bar{p}}(\mathbb{R}^{mnl})$, $F^i \in L_{loc}^{\bar{p}}(\mathbb{R}^{mnl})$, 其中 $\bar{p} > mnl$ 被固定, 而 F^i 是在 $F(x)$ 上的任意要素。

关于假设1的更多细节以及其中的符号可以在 [24]中找到。然后给出紧函数的定义如下。

定义 1: 存在一个无界, 非负连续函数 V , 如果 $\lim_{e \rightarrow \partial \mathbb{R}^{mnl}} V(e) = +\infty$, 则 V 被称作 \mathbb{R}^{mnl} 上的紧函数。其中, $\partial \mathbb{R}^{mnl}$ 表示 \mathbb{R}^{mnl} 的边界。

然后, 对于任意的 $k \in \mathbb{L}$, $p \geq 2$, $i \in \mathcal{N}$, $e_i^{(k)} \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{\Omega}_{\rho_i^{(k)}}$, 其中 $\Omega_{\rho_i^{(k)}} = \{e_i^{(k)} \in \mathbb{R}^m : V_i^{(k)}(e_i^{(k)}) < \rho_i^{(k)}\}$, $\rho_i^{(k)} \in \mathbb{R}^+$, $V_i^{(k)}(e_i^{(k)}) \in C^2(\mathbb{R}^m)$ 被叫做系统(3)的子系统的Lyapunov 函数, 并且其他假设如下。

假设 2: 函数 $V_i^{(k)}$ 在 $e_i^{(k)}$ 上连续两次可微。存在正数 $\epsilon_i^{(k)}, \chi_i^{(k)}$, 使得

$$\epsilon_i^{(k)} |e_i^{(k)}|^p \leq V_i^{(k)}(e_i^{(k)}) \leq \chi_i^{(k)} |e_i^{(k)}|^p. \quad (4)$$

假设 3: 存在正数 $\sigma_{i1}^{(k)}, \sigma_{i2}^{(k)}$ 和 $C^{(k)}$, 以及函数 $P_k(e_i^{(k)})$ 和矩阵 $A_i = (a_i^{(kh)})_{l \times l}$ 使得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \mathcal{L}V_i^{(k)}(e_i^{(k)}) \\ & \leq \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \left(\sum_{h=1}^l a_i^{(kh)} \left(P_h(e_i^{(h)}) - P_k(e_i^{(k)}) \right) - \sigma_i^{(k)} |e_i^{(k)}|^p \right) + C^{(k)}, \end{aligned}$$

其中

$$\sigma_i^{(k)} = \begin{cases} \sigma_{i1}^{(k)}, & t \in [t_j, s_j], \\ \sigma_{i2}^{(k)}, & t \in (s_j, t_{j+1}), \end{cases}$$

而且 $c_i^{(k)}$ 是拉普拉斯矩阵 (\mathcal{G}, A_i) k 阶对角元素的代数余子式。

接下来, 我们将给出第一个主要定理。

定理 1: 对于任意的 $i \in \mathcal{N}$, 假设有向图 (\mathcal{G}, A_i) 是强联通的, 且假设1-3成立, 则系统3 存在平稳分布。

证明: 令 $V(x) = \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} V_i^{(k)}(x_i^{(k)})$ 。此外, 我们定义 $\chi = \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \chi_i^{(k)}$ 和

$$\epsilon = \left(\sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \epsilon_i^{(k)} \right)^{1-\frac{p}{2}} \left(\min_{k \in \mathcal{L}, i \in \mathcal{N}} \{c_i^{(k)} \epsilon_i^{(k)}\} \right)^{\frac{p}{2}}.$$

因为系统(3)存在顶点的Lyapunov函数, 通过(5)可以得到

$$\begin{aligned} & V(x) \\ & \geq \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \epsilon_i^{(k)} |x_i^{(k)}|^p \\ & \geq \sum_{s=1}^l \sum_{h=1}^n c_h^{(s)} \epsilon_h^{(s)} \left[\sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n \frac{c_i^{(k)} \epsilon_i^{(k)}}{\sum_{w=1}^l \sum_{j=1}^n c_j^{(w)} \epsilon_j^{(w)}} |x_i^{(k)}|^2 \right]^{\frac{p}{2}} \\ & \geq \left(\sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \epsilon_i^{(k)} \right)^{1-\frac{p}{2}} \left(\min_{k \in \mathcal{L}, i \in \mathcal{N}} \{c_i^{(k)} \epsilon_i^{(k)}\} \right)^{\frac{p}{2}} |x|^p \\ & = \epsilon |x|^p \end{aligned}$$

以及

$$V(x) \leq \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \chi_i^{(k)} |x_i^{(k)}|^p \leq \chi |x|^p.$$

因此, 可以得到

$$\epsilon |x|^p \leq V(x) \leq \chi |x|^p.$$

此外, $\epsilon |x|^p \leq V(x)$, 以及 $\lim_{x \rightarrow \partial \mathbb{R}^{mnl}} |x|^p = +\infty$, 我们有 $\lim_{x \rightarrow \partial \mathbb{R}^{mnl}} V(x) = +\infty$, 这也就意味着 $V(x)$ 是一个紧函数。因此, 不难看出 $V(x)$ 的基本上界是 $+\infty$ 。并且, 对于 $x_i^{(k)} \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{\Omega}_{\rho_i^{(k)}}$, 通过(5), 可以做出如下的计算:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x) &= \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \mathcal{L}V_i^{(k)}(x_i^{(k)}) \\ &\leq \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \sum_{h=1}^l a_i^{(kh)} \left(P_h(x_i^{(h)}) - P_k(x_i^{(k)}) \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \sigma_i^{(k)} |x_i^{(k)}|^p + \sum_{k=1}^l C^{(k)}. \end{aligned} \tag{5}$$

通过文献 [5]中定理2.2的 (\mathcal{G}, A_i) 的强连通性, 可以观察到

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k,h=1}^l c_i^{(k)} a_i^{(kh)} \left(P_h(x_i^{(h)}) - P_k(x_i^{(k)}) \right) = 0.$$

然后, 使用(5)以及通过以上的计算, (10)可以变成

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x) &\leq - \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \sigma_i^{(k)} |x_i^{(k)}|^p + \sum_{k=1}^l C^{(k)} \\ &\leq -\sigma |x|^p + \sum_{k=1}^l C^{(k)}, \end{aligned}$$

因为 $\chi |x|^p \geq V(x) = \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} V_i^{(k)}(x_i^{(k)}) > \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \rho_i^{(k)} \triangleq \rho_m$, 有 $|x|^p > \frac{\rho_m}{\chi}$ 。所以, 存在 $\rho_m > \frac{C}{\sigma}$, 其中 $C = \sum_{k=1}^l C^{(k)}, \gamma = \frac{\sigma \rho_m}{\chi} - C > 0, \sigma = \left(\sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \sigma_i^{(k)} \right)^{1-\frac{p}{2}}$ $\left(\min_{k \in \mathcal{L}, i \in \mathcal{N}} \left\{ c_i^{(k)} \sigma_i^{(k)} \right\} \right)^{\frac{p}{2}}$, 因此, 可以得到 $\mathcal{L}V(x) \leq -\gamma$, 对于 $x \in \mathbb{R}^{mnl} \setminus \bar{\Omega}_{\rho_m}$ 。根据 [24]中的定理A, 我们已经证明了定理A中的所有条件都成立, 因此, 系统(3)存在一个平稳分布。

注 1: 在 [24]中, Huang等人用Lyapunov方法和水平集方法研究了无耦合项的随机微分方程的稳态问题。研究一般随机微分方程的稳态是一项创新性的工作。在 [26]中, Zhu等人用Lyapunov方法研究了具有状态切换的随机系统的平稳分布, 这是在考虑状态切换对平稳分布影响方面的开创性工作。受上述理论启发, 我们利用Lyapunov方法和图论方法研究了SMGMD 的平稳分布的存在性, 避免了直接构造全局Lyapunov函数的困难, 简化了复杂的分析过程。

注 2：定理1中给出了保证平稳分布存在的一些充分条件。从定理1中的条件可以得到，平稳分布与有向图的连通性和拓扑结构有关，这说明图论的重要性。

注 3：从附录中定理1的证明可以看出，现有区域依赖于 C, χ, σ ，当 C, χ 固定时， σ 越小，现有区域就越大；当 σ 固定时，如果 C, χ 变大，则现有区域就越大。此外，由于 σ 与拓扑结构有关，这意味着现有区域与拓扑结构有着密切的联系。

定理1要求系统(3)承认子系统的Lyapunov函数，但有时很难构造合适的Lyapunov函数。为了得到一个条件易于验证且在实践中有用的定理，我们将给出一个条件都是关于系数的定理。

定理 2：对于任意的 $k \in \mathcal{L}$ ， $i \in \mathcal{N}$ 以及 $x_i^{(k)} \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{\Omega}_{\rho_i^{(k)}}$ ，如果以下条件成立的话。

B1. 存在常数 $(\alpha_i^{(k)})_m$ ，以及正数 $\beta_i^{(k)}$ 和 ν_i ，使得

$$(e_i^{(k)})^T \left(f_i^{(k)}(y^{(k)}) - f_i^{(k)}(x^{(k)}) \right) \leq \sum_{m=1}^n (\alpha_i^{(k)})_m |e_m^{(k)}|^2,$$

以及

$$\left| g_i^{(k)}(y_i^{(k)}) - g_i^{(k)}(x_i^{(k)}) \right|^2 \leq \beta_i^{(k)} |e_i^{(k)}|^2 + \nu_i.$$

B2. 存在正数 $A_i^{(kh)}$ ，使得

$$\begin{aligned} & \left| H_i^{(kh)}(y_i^{(k)}, y_i^{(h)}) - H_i^{(kh)}(x_i^{(k)}, x_i^{(h)}) \right| \\ & \leq A_i^{(kh)} \left(|e_i^{(k)}| + |e_i^{(h)}| \right). \end{aligned}$$

B3. 假设有向图 $(\mathcal{G}, (A_i^{(kh)})_{l \times l})$ 是强联通的，并且以下不等式成立

$$\sum_{m=1}^n \frac{2}{c_i^{(k)}} c_m^{(k)} (\alpha_m^{(k)})_i + \beta_i^{(k)} + 4 \sum_{h=1}^l A_i^{(kh)} < 0. \quad (6)$$

则系统(3)存在平稳分布。

证明：对于任意的 $k \in \mathcal{L}$ and $i \in \mathcal{N}$ ， $x_i^{(k)} \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{\Omega}_{\rho_i^{(k)}}$ ，其中 $\rho_i^{(k)} \in \mathbb{R}^+$ ，定义 $V_i^{(k)}(x_i^{(k)}) = |x_i^{(k)}|^2$ ，假设2成立。因为 $f_i^{(k)}$ ， $g_i^{(k)}$ ，和 $H_i^{(kh)}$ 在变量上是连续一次可微，可以得到假设1成立。

接下来，通过Itô's公式，可以计算 $\mathcal{L}V_i^{(k)}(x_i^{(k)})$ 如下：

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}V_i^{(k)}(x_i^{(k)}) \\ & = \frac{\partial V_i^{(k)}(x_i^{(k)})}{\partial x_i^{(k)}} \left(f_i^{(k)}(x^{(k)}) + \sum_{h=1}^l H_i^{(kh)}(x_i^{(k)}, x_i^{(h)}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \text{trace} \left[\left(g_i^{(k)} \right)^\top \left(x_i^{(k)} \right) \frac{\partial^2 V_i^{(k)} \left(x_i^{(k)} \right)}{\partial \left(x_i^{(k)} \right)^2} g_i^{(k)} \left(x_i^{(k)} \right) \right] \\
& = 2 \left(x_i^{(k)} \right)^\top \left(f_i^{(k)} \left(x^{(k)} \right) + \sum_{h=1}^l H_i^{(kh)} \left(x_i^{(k)}, x_i^{(h)} \right) \right) + \left| g_i^{(k)} \left(x_i^{(k)} \right) \right|^2 \\
& \leq \beta_i^{(k)} |x_i^{(k)}|^2 + \nu_i + 2 \sum_{j=1}^n \left(\alpha_i^{(k)} \right)_j |x_j^{(k)}|^2 + 2 \sum_{h=1}^l A_i^{(kh)} |x_i^{(k)}|^2 \\
& \quad + 2 \sum_{h=1}^l A_i^{(kh)} |x_i^{(k)}| |x_i^{(h)}|. \tag{7}
\end{aligned}$$

通过使用基本不等式，可以得到

$$2 \sum_{h=1}^l A_i^{(kh)} |x_i^{(k)}| |x_i^{(h)}| \leq \sum_{h=1}^l A_i^{(kh)} \left(|x_i^{(k)}|^2 + |x_i^{(h)}|^2 \right).$$

综上，(11)可以变为

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}V_i^{(k)} \left(x_i^{(k)} \right) \\
& \leq \left(\beta_i^{(k)} + 4 \sum_{h=1}^l A_i^{(kh)} \right) |x_i^{(k)}|^2 + 2 \sum_{j=1}^n \left(\alpha_i^{(k)} \right)_j |x_j^{(k)}|^2 \\
& \quad + \sum_{h=1}^l A_i^{(kh)} \left(P_h \left(x_i^{(h)} \right) - P_k \left(x_i^{(k)} \right) \right) + \nu_i,
\end{aligned}$$

其中 $P_k \left(x_i^{(k)} \right) = |x_i^{(k)}|^2$ ，然后，我们可以得到

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \mathcal{L}V_i^{(k)} \left(x_i^{(k)} \right) \\
& \leq \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \left[\left(\beta_i^{(k)} + 4 \sum_{h=1}^l A_i^{(kh)} \right) |x_i^{(k)}|^2 + 2 \sum_{j=1}^n \left(\alpha_i^{(k)} \right)_j |x_j^{(k)}|^2 \right. \\
& \quad \left. + \sum_{h=1}^l A_i^{(kh)} \left(P_h \left(x_i^{(h)} \right) - P_k \left(x_i^{(k)} \right) \right) + \nu_i \right] \\
& = \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \left(\beta_i^{(k)} + 4 \sum_{h=1}^l A_i^{(kh)} \right) |x_i^{(k)}|^2 + \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \nu_i \\
& \quad + \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \sum_{j=1}^n \frac{2}{c_i^{(k)}} c_j^{(k)} \left(\alpha_j^{(k)} \right)_i |x_i^{(k)}|^2 \\
& \quad + \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \sum_{h=1}^l A_i^{(kh)} \left(P_h \left(x_i^{(h)} \right) - P_k \left(x_i^{(k)} \right) \right).
\end{aligned}$$

令 $-\sigma_i^{(k)} = \beta_i^{(k)} + 4 \sum_{h=1}^l A_i^{(kh)} + \sum_{j=1}^n \frac{2}{c_j^{(k)}} c_j^{(k)} \left(\alpha_j^{(k)} \right)_i < 0$ 通过(7)和 $C^{(k)} = \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \nu_i$, 这也意味着假设3成立。因此, 在定理1中, 所有条件都成立, 即意味着系统(3)存在一个平稳分布。那么证明结束。

注 4 : 在 [4]中, Zhang等人基于图论研究了具有扩散的多组模型的稳定性。随后, 在 [11]中, Guo等人考虑了随机扰动的影响, 研究了具有扩散的随机多组模型的随机稳定性。与上述文献相比, 我们考虑了当随机扰动破坏平衡点存在时, SMGMD 存在一个平稳分布。此外, 定理2中的条件在实践中不难验证, 因为它们是比较常见的, 并且都依赖于系统(3)的系数。

注 5 : 定理2中的条件与系统(3)中的系数有关, 这在实践中是有用的。此外, 为了确保条件B3成立, $\left(\alpha_i^{(k)} \right)_j$ 扮演着重要的角色, 因为它的符号可以是负数。另外, $A_i^{(kh)}$ 和 $B_i^{(k)}$ 应该很小, 这对条件B3有利。因此, 不难看出漂移系数、随机扰动和有向图的拓扑结构直接影响平稳分布。

4. 在随机耦合振子上的应用

耦合振子的研究是非常有用的, 并且它们在微电网中有着广泛的应用。大量的研究者对其动力学性质进行了研究, 包括稳定性、同步性 [27] [28] [29]等。当耦合振子确定时, 随机扰动会影响平衡点的存在性, 因此研究随机耦合振子平稳分布的存在性是非常必要的。

在这节中, 研究了一个随机耦合振子的模型, 这个模型建立在带有权重 $\hat{A} = (\hat{a}_{kh})_{l \times l}$ 和 $\hat{B} = (\hat{b}_{kh})_{l \times l}$ 的有向图 (\mathcal{G}, \hat{A}) 和 (\mathcal{G}, \hat{B}) 上。模型如下:

$$\begin{cases} dx_k = \left[y_k - \eta_k x_k + \sum_{h=1}^l \hat{a}_{kh} (x_k - x_h) \right] dt \\ \quad + h_1^{(k)}(x_k) dB_1^{(k)}, \\ dy_k = \left[(\eta_k - \varphi_k(x_k)) y_k + (\eta_k \varphi_k(x_k) - \eta_k^2 - 1) x_k \right. \\ \quad \left. + \sum_{h=1}^l \hat{b}_{kh} (y_k - y_h) \right] dt + h_2^{(k)}(y_k) dB_2^{(k)}, k \in \mathcal{L}, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $h_1^{(k)}, h_2^{(k)} : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ 表示存在于第 k 个顶点的随机干扰强度, $\varphi_k : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ 表示阻尼系数。

令 $x^{(k)} = (x_k, y_k)^T$, $f^{(k)}(x^{(k)}) = (y_k - \eta_k x_k, (\eta_k - \varphi_k(x_k)) y_k + (\eta_k \varphi_k(x_k) - \eta_k^2 - 1) x_k)^T$, $B^{(k)} = (B_1^{(k)}, B_2^{(k)})^T$, $H^{(kh)}(x^{(k)}, x^{(h)}) = (\hat{a}_{kh}(x_k - x_h), \hat{b}_{kh}(y_k - y_h))^T$, $X = \left((x^{(1)})^T, \dots, (x^{(l)})^T \right)^T$, $B = \left((B^{(1)})^T, \dots, (B^{(l)})^T \right)_{2l \times 1}^T$, $F(X) = \left(\left(f^{(1)} + \sum_{h=1}^l H^{(1h)} \right)^T, \dots, \left(f^{(l)} + \sum_{h=1}^l H^{(lh)} \right)^T \right)_{2l \times 1}^T$,

$$g^{(k)}(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} h_1^{(k)}(x_k) & 0 \\ 0 & h_2^{(k)}(y_k) \end{pmatrix}, G(X) = \begin{pmatrix} g^{(1)}(x^{(1)}) & & \\ & \ddots & \\ & & g^{(l)}(x^{(l)}) \end{pmatrix},$$

然后系统(8)可以被写作 $dX = F(X)dt + G(X)dB$ 。首先, 定义 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)})^T = (x_k, y_k)^T$, $f_1^{(k)}(x^{(k)}) = y_k - \eta_k x_k$, $f_2^{(k)}(x^{(k)}) = (\eta_k - \varphi_k(x_k))y_k + (\eta_k \varphi_k(x_k) - \eta_k^2 - 1)x_k$, $H_1^{(kh)}(x_1^{(k)}, x_1^{(h)}) = \hat{a}_{kh}(x_k - x_h)$ 以及 $H_2^{(kh)}(x_2^{(k)}, x_2^{(h)}) = \hat{b}_{kh}(y_k - y_h)$ 。

接下来, 为了研究系统(8)的平稳分布的存在性, 给出了一个定理。

定理 3: 对于 $k \in \mathfrak{L}$, 有向图 (\mathcal{G}, \hat{A}) and (\mathcal{G}, \hat{B}) 是强联通的。假定假设1和以下条件成立。

C1. 存在正常数 $m_k, M_k, \xi_i^{(k)}$, 和 ϖ_i , 使得 $m_k \leq |\varphi_k(x)| \leq M_k$, $\eta_k(M_k - \eta_k) \geq 1$ 和

$$|h_i^{(k)}(x_i^{(k)})|^2 \leq \xi_i^{(k)} |x_i^{(k)}|^2 + \varpi_i, i = 1, 2.$$

C2. 存在

$$\sum_{j=1}^2 \frac{2}{c_i^{(k)}} c_j^{(k)} (\alpha_j^{(k)})_i + \xi_i^{(k)} + 4 \sum_{h=1}^l A_i^{(kh)} < 0, i = 1, 2,$$

其中 $(\alpha_1^{(k)})_1 = \frac{1}{2} - \eta_k$, $(\alpha_2^{(k)})_1 = \frac{1}{2}$, $(\alpha_1^{(k)})_2 = \frac{1}{2}\eta_k(M_k - \eta_k) - \frac{1}{2} + \eta_k - m_k$, $(\alpha_2^{(k)})_2 = \frac{1}{2}\eta_k(M_k - \eta_k) - \frac{1}{2}$, $A_1^{(kh)} = \hat{a}_{kh}$, $A_2^{(kh)} = \hat{b}_{kh}$. 然后系统(8)存在平稳分布。

证明: 通过条件C1, 可以得到结果如下:

$$\begin{aligned} x_k f_1^{(k)}(x^{(k)}) &= x_k y_k - \eta_k x_k^2 \leq \left(\frac{1}{2} - \eta_k\right) x_k^2 + \frac{1}{2} y_k^2, \\ y_k f_2^{(k)}(x^{(k)}) &= (\eta_k - \varphi_k(x_k)) y_k^2 + (\eta_k \varphi_k(x_k) - \eta_k^2 - 1) x_k y_k \\ &\leq \left[\frac{1}{2} (\eta_k \varphi_k(x_k) - \eta_k^2 - 1) + (\eta_k - \varphi_k(x_k)) \right] y_k^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (\eta_k \varphi_k(x_k) - \eta_k^2 - 1) x_k^2 \\ &\leq \left[\frac{1}{2} \eta_k (M_k - \eta_k) - \frac{1}{2} + \eta_k - m_k \right] y_k^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (\eta_k (M_k - \eta_k) - 1) x_k^2, \end{aligned}$$

这也就意味着条件B1 成立。可以看到

$$\begin{aligned} \left| H_1^{(kh)}(x_1^{(k)}, x_1^{(h)}) \right| &\leq \hat{a}_{kh} (|x_k| + |x_h|), \\ \left| H_2^{(kh)}(x_2^{(k)}, x_2^{(h)}) \right| &\leq \hat{b}_{kh} (|y_k| + |y_h|), \end{aligned}$$

我们得到条件B2成立。而通过B2成立, 可以很容易看到B3满足。因此, 定理2中的所有条件都被满足。这意味着系统(8)存在平稳分布。

注 6: 耦合振子在电力系统、物理和其他领域中有着广泛的应用。研究人员在 [4] [5] [11]中对

耦合振子进行了研究，但只有一些研究人员考虑了耦合振子的平稳分布。一般来说，耦合振子的平衡点是零，而在定理3中，通过引入随机扰动，零平衡被破坏，可能导致平稳分布。因此，我们研究随机耦合振子的平稳分布在实践中是有用的。

注 7：由条件C2可知，平稳分布的存在性受拓扑结构、随机扰动和耦合强度的影响。小的随机扰动和耦合结构有助于保证不等式在C2条件下成立，这在实践中是合理的，因为大的随机扰动可能破坏平稳分布的存在。

5. 数值模拟

为了证明定理3的有效性，给出一个数值例子如下。令 $l = 4$ ，我们研究系统(8)形式的随机耦合振子。选择函数 $\varphi_k(x_k) = 2.5 - 0.1 \sin x_k$ ， $h_1^{(k)}(x_k) = 0.02x_k + 1$ 和 $h_2^{(k)}(y_k) = 0.01y_k + 1.7$ ，因此有 $\xi_1^{(k)} = 0.0036$ ， $\xi_2^{(k)} = 0.0004$ ， $\varpi_1 = 1.5$ ， $\varpi_2 = 3$ 。

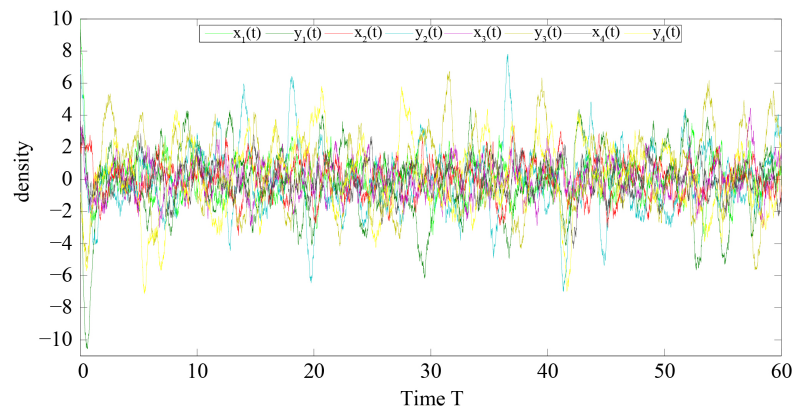


Figure 1. The stationary distribution of sample path of system (8) with initial values

图 1. 具有初值的系统(8)的样本轨道的平稳分布

$$\hat{A} = (\hat{a}_{kh})_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = (\hat{b}_{kh})_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0.01 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 & 0 \end{pmatrix}.$$

明显地，有向图 (\mathcal{G}, \hat{A}) 和 (\mathcal{G}, \hat{B}) 是强连通的。可以计算 $c_1^{(k)} = 0.4 \times 10^{-5}$ ， $k = 1, 3$ ， $c_1^{(k)} = 0.2 \times 10^{-5}$ ， $k = 2, 4$ 以及 $c_2^{(k)} = 0.2 \times 10^{-5}$ ， $k = 1, 2, 4$ ， $c_2^{(3)} = 0.6 \times 10^{-5}$ 。此外，选择参数 $\eta_k =$

$2, k = 1, 2, 3, 4, M_k = 2.6, m_k = 2.4, \chi_i^{(k)} = \frac{1}{8}$ 。然后, 可以得到 $2.4 \leq |\varphi_k(x_k)| \leq 2.6$ 。最后, 通过简单的计算有

$$\sum_{j=1}^2 \frac{2}{c_i^{(k)}} c_j^{(k)} (\alpha_j^{(k)})_i + \xi_i^{(k)} + 4 \sum_{h=1}^l A_i^{(kh)} < 0, \quad i = 1, 2,$$

其中, $(\alpha_1^{(k)})_1 = \frac{1}{2} - \eta_k = -\frac{3}{2}, (\alpha_2^{(k)})_1 = \frac{1}{2}, (\alpha_1^{(k)})_2 = \frac{1}{2}\eta_k(M_k - \eta_k) - \frac{1}{2} + \eta_k - m_k = -0.7, (\alpha_2^{(k)})_2 = \frac{1}{2}\eta_k(M_k - \eta_k) - \frac{1}{2} = 0.1, A_1^{(kh)} = \hat{a}_{kh}$ 和 $A_2^{(kh)} = \hat{b}_{kh}$ 以及 $\eta_k(M_k - \eta_k) = 1.2 \geq 1$ 。并且, 通过以上参数的选择, 可以计算出 $\rho_m > \frac{\sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \varpi_i \chi_i}{\min_{k \in \{1, 2, 3, 4\}, i \in \{1, 2\}} \{c_i^{(k)} \sigma_i^{(k)}\}} \doteq 24$ 因此, 证明了定理3中的所有条件成立。此外, 选择初值如下: $x_1(0) = 10, y_1(0) = 5, x_2(0) = 2, y_2(0) = 7, x_3(0) = 4, y_3(0) = -1, x_4(0) = 2, y_4(0) = -0.9$ 。

图 1 给出了具有初值的系统(8)的样本轨道的平稳分布, 图 2 则给出了具有初值的系统(8)的平稳分布。显然, 从图 1 和图 2 中看到系统(8) 存在一个平稳分布, 这也验证了结果的有效性。

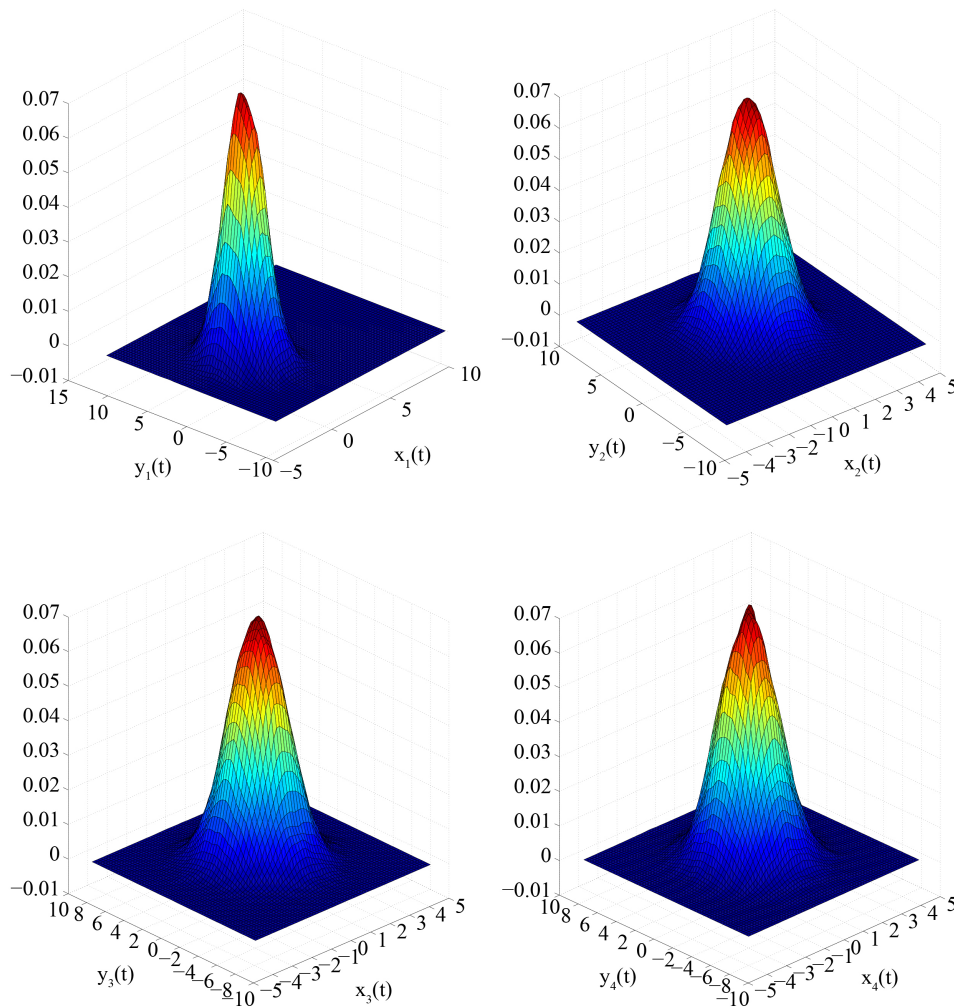


Figure 2. The stationary distribution of system (8) with initial values

图 2. 具有初值的系统(8)的平稳分布

6. 结束语

本文利用图论和Lyapunov方法研究了随机多组模型的平稳分布, 并且得到了两个主要的定理, 保证了平稳分布的存在。而且, 所得定理中的充分条件具有更少的保守性, 还反映了平稳分布与随机扰动和拓扑结构密切相关。之后, 我们把结果应用到随机耦合振子中。最后, 给出一个数值模拟说明了本文结果的有效性。

基金项目

山东省自然科学基金面上项目(ZR2017MA008), 山东省高校科技计划项目(J18KA218)。

参考文献

- [1] Lajmanovich, A. and Yorke, J.A. (1976) A Deterministic Model for Gonorrhoea in a Nonhomogeneous Population. *Mathematical Biosciences*, **28**, 221-236.
[https://doi.org/10.1016/0025-5564\(76\)90125-5](https://doi.org/10.1016/0025-5564(76)90125-5)
- [2] Huang, W. and Castillo-Chavez, C.C. (1992) Stability and Bifurcation for a Multiple-Group Model for the Dynamics of HIV/AIDS Transmission. *Siam Journal on Applied Mathematics*, **52**, 835-854. <https://doi.org/10.1137/0152047>
- [3] Iggidr, A., Sallet, G. and Souza, M.O. (2016) On the Dynamics of a Class of Multi-Group Models for Vector-Borne Diseases. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **441**, 723-743. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.04.003>
- [4] Zhang, C.M., Li, W.X. and Wang, K.E. (2015) Graph-Theoretic Approach to Stability of Multi-Group Models with Dispersal. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B*, **20**, 259-280.
- [5] Li, M.Y. and Zhi, S. (2010) Global-Stability Problem for Coupled Systems of Differential Equations on Networks. *Journal of Differential Equations*, **248**, 1-20.
<https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.09.003>
- [6] Toutonji, O., Yoo, S. and Park, M. (2012) Stability Analysis of VEISV Propagation Modeling for Network Worm Attack. *Applied Mathematical Modelling*, **36**, 2751-2761.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.09.058>
- [7] Gong, Y.W., Song, Y.R. and Jiang, G.P. (2013) Global Dynamics of a Novel Multi-Group Model for Computer Worms. *Chinese Physics B*, **22**, 56-62.
<https://doi.org/10.1088/1674-1056/22/4/040204>
- [8] Li, W.X., Zhang, X.Q. and Zhang, C.M. (2015) Exponential Stability of Delayed Multi-Group Model with Reaction-Diffusion and Multiple Dispersal Based on Razumikhin Technique and

- Graph Theory. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **27**, 237-253. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.03.012>
- [9] Guo, H., Li, M.Y. and Shuai, Z. (2006) Global Stability of the Endemic Equilibrium of Multi-group SIR Epidemic Models. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, **14**, 259-284.
- [10] Liu, Z.J., Hu, J. and Wang, L.W. (2017) Modelling and Analysis of Global Resurgence of Mumps: A Multi-Group Epidemic Model with Asymptomatic Infection, General Vaccinated and Exposed Distributions. *Nonlinear Analysis: Real World Application*, **37**, 137-161. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.02.009>
- [11] Guo, Y., Zhao, W. and Ding, X.H. (2019) Input-to-State Stability for Stochastic Multi-Group Models with Multi-Dispersal and Time-Varying Delay. *Applied Mathematics and Computation*, **343**, 114-127. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.07.058>
- [12] Wang, Z.G., Fan, X.M. and Han, Q.X. (2013) Global Stability of Deterministic and Stochastic Multigroup SEIQR Models in Computer Network. *Applied Mathematics Modeling*, **37**, 8673-8686. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.07.037>
- [13] Xue, Y.K., Yuan, X.P. and Liu, M.X. (2014) Global Stability of a Multi-Group SEI Model. *Applied Mathematics and Computation*, **226**, 51-60. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.09.050>
- [14] Zou, X.L., Fan, D.J. and Wang, K. (2013) Stationary Distribution and Stochastic Hopf Bifurcation for a Predator-Prey System with Noises. *Discrete Continuous Dynamical Systems, Series B*, **18**, 1507-1519. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2013.18.1507>
- [15] Yin, F.C. and Yu, X.Y. (2015) The Stationary Distribution and Extinction of Generalized Multispecies Stochastic Lotka-Volterra Predator-Prey System. *Mathematical Problems in Engineering*, **2015**, Article ID: 479326. <https://doi.org/10.1155/2015/479326>
- [16] Zhao, Y., Yuan, S.L. and Ma, J.L. (2015) Survival and Stationary Distribution Analysis of a Stochastic Competitive Model of Three Species in a Polluted Environment. *Bulletin of Mathematical Biology*, **77**, 1285-1326. <https://doi.org/10.1007/s11538-015-0086-4>
- [17] Dang, N.H., Du, N.H. and Guo, Y. (2014) Existence of Stationary Distributions for Kolmogorov Systems of Competitive Type under Telegraph Noise. *Journal of Differential Equations*, **257**, 2078-2101. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.05.029>
- [18] Zhou, Y.L., Zhang, W.G. and Yuan, S.L. (2014) Survival and Stationary Distribution of a SIR Epidemic Model with Stochastic Perturbations. *Applied Mathematics and Computation*, **244**, 118-131. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.06.100>
- [19] Zhou, Y., Zhang, W. and Yuan, S. (2013) Survival and Stationary Distribution in a Stochastic SIS Model. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2013**, Article ID: 172726. <https://doi.org/10.1155/2013/172726>
- [20] Mao, X.R. (2011) Stationary Distribution of Stochastic Population Systems. *Systems and Control Letters*, **60**, 398-405. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2011.02.013>

-
- [21] Liu, M. and Wang, K. (2012) Stationary Distribution, Ergodicity and Extinction of a Stochastic Generalized Logistic System. *Applied Mathematics Letters*, **25**, 1980-1985.
<https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.03.015>
- [22] Mao, X.R., Yuan, C. and Guo, Y. (2005) Numerical Method for Stationary Distribution of Stochastic Differential Equations with Markovian Switching. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **174**, 1-27. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.03.016>
- [23] Hasminskii, R.Z. (1969) Stochastic Stability of Differential Equations. Sijthoff & Noordhoff.
- [24] Huang, W., Ji, M., Liu, Z. and Yi, Y. (2015) Steady States of Fokker-Planck Equations: I. Existence. *Journal of Dynamics and Differential Equation*, **27**, 721-742.
<https://doi.org/10.1007/s10884-015-9454-x>
- [25] Mao, X.R. (1997) Stochastic Differential Equations and Applications. Horwood, Chichester.
- [26] Zhu, C. and Guo, Y. (2007) Asymptotic Properties of Hybrid Diffusion Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **46**, 1151-1179. <https://doi.org/10.1137/060649343>
- [27] Zhang, C.M. and Han, B.S. (2020) Stability Analysis of Stochastic Delayed Complex Networks with Multi-Weights Based on Razumikhin Technique and Graph Theory. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **538**, Article ID: 122827.
<https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.122827>
- [28] Wang, J.W., Feng, C., Xu, M.Z. and Chen, Y. (2016) The Synchronization of Instantaneously Coupled Harmonic Oscillators Using Sampled Data with Measurement Noise. *Automatica*, **66**, 155-162. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.01.012>
- [29] Wu, Y., Cao, J., Li, Q., Alsaedi, A. and Alsaadi, F.E. (2017) Finite-Time Synchronization of Uncertain Coupled Switched Neural Networks under Asynchronous Switching. *Neural Networks*, **85**, 128-139. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2016.10.007>