Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(2), 416-425
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.102047

Hans汉斯

几种导数微分及其关系

钟荣花[1]，**王　跃**[1*]，**王守财**[2]

[1]贵州大学数学与统计学院，贵州　贵阳
[2]贵州民族大学数据科学与信息工程学院，贵州　贵阳
Email: 2531727083@qq.com, *eztf@qq.com, shoucaiwang@126.com

收稿日期：2021年1月7日；录用日期：2021年2月11日；发布日期：2021年2月20日

摘　要

导数微分是微积分中有力的计算工具，占有极其重要的地位。本文通过讨论几类导数微分(普通导数微分、单向导数，Fréchet导数微分和Gâteaux导数微分)的概念，并赋予一些例子对它们进行说明。最后，分析这几类微分之间的关系及通用计算方法，补充弱导数和一些应用。

关键词

导数微分，Fréchet导数微分，Gâteaux导数微分，弱导数

The Relations of Several Derivatives and Differentials

Ronghua Zhong[1], **Yue Wang**[1*], **Shoucai Wang**[2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou
[2]School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang Guizhou
Email: 2531727083@qq.com, *eztf@qq.com, shoucaiwang@126.com

Received: Jan. 7th, 2021; accepted: Feb. 11th, 2021; published: Feb. 20th, 2021

Abstract

Derivative differential calculus is a powerful tool for calculating in the differential and integral calculus, which has an extremely important position. By discussing the concepts of several types of derivative differentials (ordinary derivative differential, one-way derivative, Fréchet's derivative differentials and Gâteaux's derivatives and differential), meanwhile, some examples were given. Finally, it analyzed the relationships among these several differentials and their general algorithm,

*通讯作者。

文章引用: 钟荣花, 王跃, 王守财. 几种导数微分及其关系[J]. 应用数学进展, 2021, 10(2): 416-425.
DOI: 10.12677/aam.2021.102047

and supplemented weak derivatives and some applications.

Keywords

Derivative Differential, Fréchet Derivative Differential, Gâteaux Derivative Differential, Weak Derivative

1. 引言

微分和导数在微积分中有着重要地位，众所周知对于一元函数微分和导数是等价的，而且由微分和导数可以得出很多好的性质和基本初等函数运算法则，其在各个学科都有应用，特别是工程的许多问题上，需要将这些问题的状态规律或者数据性质等表述为函数，而研究函数特性的一个有力工具便是微分中值定理(即 Lagrange 中值定理)，而中值定理[1]盘活整个微积分，有着丰富的应用，由于它本身公式中有导数，而导数用极限来定义，所以产生极限论，另外可用该定理证 Newton-Leibliz 公式，极值问题及凹凸问题等，对于比微积分中更一般的 Fréchet 微分和 Gâteaux 微分，也具有广泛的应用。文献[2]中讨论了一类特殊的局部凸空间中引进拟-Fréchet 微分的概念，同时进行某种推广。文献[3]通过基于 Gâteaux 微分的混合有限元公式，分析粘弹性基尔霍夫板的准静态响应。关于弱导数，它在偏微分方程中占据重要地位，关于其研究也是在数学中关注的重点内容，可通过弱导数定义弱解，根据文献[4]，通过弱导数的方法，讨论了对二阶非线性椭圆型方程弱解进行估计。从上述文献可以了解到各种导数微分在各领域的应用很广，但它们之间的关系及通用算法方面的研究较少。

2. 几种导数微分的定义

对某一函数，寻找一种方法，当自变量和因变量的改变量都很小时，能简便而又比较精确的地估计出这个改变量，这是微分的原始思想，而在深层次微分的思想是对非线性对应关系在局部的线性化。

定义 2.1 [5]设 x_0 为函数 $y=f(x)$ 定义域中的一点，若存在一个数 $g(x_0)$，使得当 $\Delta x\to 0$ 时下述关系式恒成立，$\Delta y=g(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处的微分存在，或称 $f(x)$ 在 x_0 处可微。其中 $g(x_0)$ 只与 x_0 有关，而与 Δx 无关。其中 Δx 表示 x 关于 x_0 的增量，即 $\Delta x=x-x_0$，此时 $\Delta y=y-y_0$。

定义 2.2 [5]对函数 $y=f(x)$，若在其定义域中的一点 x_0 处极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且这个极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$。

$f(x)$ 在 x_0 处的导数的等价定义如下

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

因为 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，由极限存在的定义，函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的充分必要条件是左极限

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

和右极限

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在且 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$，并且 $f(x)$ 在 x_0 处要有定义，则称 $f'_-(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数，而 $f'_+(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数。

用定义法求导数的步骤：

Step1：求增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

Step2：作比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；

Step3：取极限 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

对分段函数在分段点处的导数，要首先先求出左导数和右导数，再确定是否可导。

例 2.1 对函数 $f(x)=|x|$，取 $x\in(-\infty,+\infty)$，考虑它在 $x=0$ 处可导情况。

解 由题知可分为两类情况讨论：

当 $x<0$ 时，$f(x)=|x|=-x$，可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左导数为 $f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$，而当 $x>0$，$f(x)=|x|=x$，可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的右导数为 $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$，可知函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的左右导数都存在，但左右导数不相等，从而易知它在 $x=0$ 处不可导。

下面讨论比微积分中更一般的两个微分的概念，即 Fréchet 微分和 Gâteaux 微分，并举例说明。Fréchet 微分，它是微积分中多元函数的全微分概念的推广，同时也是应用最为广泛的一种微分。

定义 2.3 [6]设 X 与 Y 为赋范线性空间，$D\subset X$ 是开集，称映射 $f:D\to Y$ 在 D 中某一点 x_0 处 Fréchet 可微指：如果存在有界线性算子 $A=A(x_0):X\to Y$，使得对任意的 $h\in X$ 及 $x_0+h\in D$，有

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+\omega(x_0,h)$$

其中 $\|\omega(x_0,h)\|=o(\|h\|)$，即余项 ω 满足：$\lim\limits_{\|h\|_X\to 0}\dfrac{\|\omega(x_0,h)\|_Y}{\|h\|_X}=0$，并且称 Ah 为 f 在 x_0 处的 Fréchet 微分，记为 $d(f(x_0)h)$，线性算子 A 称为 f 在 x_0 处的 Fréchet 导算子。记为 $f'(x_0)$。

通常，可以直接验证 Fréchet 导算子满足下边的几条性质：

唯一性；线性性，即 $(\alpha f_1+\beta f_2)'(x_0)=\alpha f_1'(x_0)+\beta f_2'(x_0)$。

称常值映射的导算子为 0 算子，有界线性算子的导算子为其本身。在有限维空间中，通常的多元映射的 Jacobi 矩阵为映射的 Fréchet 导数。对于多元函数，Fréchet 导数即为梯度，对于单变量，Fréchet 导数即为普通导数。

定理 2.1 [7] [8] (链式法则)设 Banach 空间 X,Y,Z，开集 $D_1\subset X$，$D_2\subset Y$，映射 $f:D_1\to Y$，$g:D_2\to Z$，$f(D_1)\subset D_2$。若 f 在 $x_0\in D_1$，g 在点 $y_0=f(x_0)$ 处 Fréchet 可微，则复合映射 $g\circ f$ 在点 x_0 处 Fréchet 可微，且 $(g\circ f)'(x_0)=g'(y_0)\circ f'(x_0)$。

下述给出链式法则求解的例子。

例 2.2 设 $\{X,(\cdot,\cdot)_X\}$ 和 $\{H,(\cdot,\cdot)_H\}$ 为 Hilbert 空间，且 $z\in H$ 固定。存在有界线性算子 A，考虑函数

$$E_z=g\circ f:X\to\mathbb{R},\quad E_z(x)=\|Ax-z\|_H^2,$$

此时，有 $E_z(x)=g(f(x))$，其中

$$g(y)=\|y\|_H^2,\quad f(x)=Ax-z,$$

由任意的 Hilbert 空间 H 中，$g(y)=\|y\|_H^2$ 是 Fréchet 可微的，则易知

$$g'(y)=(2y,h)_H,\quad f'(x)h=Ah,$$

由链式法则有

$$E'(x)h=g'(f(x))f(x)h=(2y,f'(x)h)_H=2(Ax-z,Ah)_H=2(A^*(Ax-z),h)_X$$

其中，A^* 为 A 伴随算子。

下面引入 Gâteaux 微分的概念，它比 Fréchet 微分更弱，且也是微积分知识中方向导数概念的推广。

定义 2.4 [7]设 $D\subset X$ 为开集，映射 $f:D\to Y$，如果对每一 $h\in X$，极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}$$

存在，则称 f 在 x_0 处 Gâteaux 可微，或简称 G-可微，且称上述极限为 f 在 x_0 处沿方向 h 的 Gâteaux 微分，记为 $D(f(x_0)h)$，即

$$D(f(x_0)h)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}。$$

注 f 在 x_0 处沿方向 h 的 Gâteaux 微分唯一，而且 Gâteaux 微分也具有线性运算性质。

例 2.3 在 Hilbert 空间 H 上范数的平方。取 $\{H,(\cdot,\cdot)_H\}$ 是一个具有标准范数 $\|\cdot\|_H$ 的实 Hilbert 空间，确定函数 $f:H\to\mathbb{R}$ 的 Gâteaux 导数 $f(x)=\|x\|_H^2$，则有

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(x+th)-f(x))=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\|x+th\|_H^2-\|x\|_H^2\right)=\lim_{t\to 0}\frac{2t(x,h)_H+t^2\|h\|_H^2}{t}=2(x,h)_H$$

因此 $f'(x)h=(2x,h)_H$。

在 Riesz 表示定理[9]的意义上，将 H 与其对偶空间 H^* 等同，则有 $f(x)=\|x\|_H^2$ 的简单公式 $f'(x)=2x$，将 H 中某一个元素所得结果 $f'(x)$ 称为 f 的梯度，因此，可以区分由 $f'(x)h=(2x,h)_H$ 法则和 $f'(x)=2x$ 法则给出的导数。

3. 几种导数微分之间的关系

3.1. 几种导数微分的关系

这里将主要介绍微积分中的导数微分、单侧导数、Fréchet 微分及 Gâteaux 微分四者之间的关系。Fréchet 微分及 Gâteaux 微分是非线性映射中两种常见的微分，Gâteaux 微分是弱微分，而 Fréchet 微分是强微分，这两种微分分别是微积分中的方向导数和全微分在无穷维上的推广，这两种微分和微积分中的微分一样可微和可导等价。

下面将探讨一下四者之间有何关系。

对于基础微积分中的微分，定义 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，即欧氏空间中，而 Fréchet 微分及 Gâteaux 微分，在泛函中的微分，定义 $f:X\to Y$，X，Y 为赋范线性空间。可知所定义的空间发生变化，从而易知只要定义的空间转变，可相互转化，泛函中的微分是微积分中微分的推广，微积分中讨论比较具体的微分，泛函所讨论的微分更一般化。下面来重点讨论 Fréchet 可微和 Gâteaux 可微的关系。

因为 Gâteaux 微分是比 Fréchet 微分更弱的微分，则不难得出 Fréchet 可微可以推导出 Gâteaux 可微，

而 Gâteaux 可微不足以保证 Fréchet 可微。而且在微积分普通导数中，有单向导数的说法，但是在 Fréchet 微分及 Gâteaux 微分中没有单向导数的说法。

定理 3.1.1 [7]设 $D \in X$ 是开集，映射 $f: D \to Y$，$x_0 \in D$，若 f 在点 x_0 处 Fréchet 可微，则 f 在点 x_0 处必具有有界线性的 Gâteaux 微分，且满足

$$D\left[f\left(x_0\right)h\right] = d\left[f\left(x_0\right)h\right]$$

即 f 在点 x_0 的 Fréchet 导算子和 Gâteaux 导算子相等，均用 $f'\left(x_0\right)$ 表示。

例 3.1.1 考虑映射 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，

$$f\left(x,y\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } y = x^2 \text{ and } x \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

这个函数在原点是 Gâteaux 可微的，而它在原点都不连续，更不用说 Fréchet 可微。

考虑 f 在点 x_0 处有有界线性的 Gâteaux 微分，能否推出 f 在点 x_0 处 Fréchet 可微，答案是否定的。

例 3.1.2 设 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 具有下列形式

$$f\left(x,y\right) = \begin{cases} x_1 + x_2 + \dfrac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2} & x \neq \left(0,0\right) \\ 0 & x = \left(0,0\right) \end{cases}$$

则 f 在 $x = \left(0,0\right)$ 处 Gâteaux 可微，且具有有界线性性的 Gâteaux 微分：

$$D\left(f\left(0\right)h\right) = f'\left(0\right)h = h_1 + h_2 = \left(1,1\right)\cdot\left(h_1,h_2\right)$$

但是 f 在 $x = \left(0,0\right)$ 处不 Fréchet 可微。

可知还需要加条件才能保证 Fréchet 可微，因此，在下述推论 3.1.1 将给出 Gâteaux 微分推出 Fréchet 可微的条件。

推论 3.1.1 [7]称 f 在点 x_0 处 Fréchet 可微。如果 f 在点 x_0 处具有有界线性的 Gâteaux 微分，且 Gâteaux 导映射 Df 在 x_0 点连续。

3.2. 导数微分的通用求法

导数和微分是微积分中有力的计算工具，不定积分是其逆运算，通常是只知道某一个函数的导数和微分，通过计算，将这个函数“复原”出来。上述已经讨论了几种导数微分的定义，某一些性质及关系等，下面讨论导数微分及 Fréchet 微分及 Gâteaux 微分的通用求法。

关于导数的通用算法，通过前面几种导数的定义可知，只要已知各种导数的存在性之后，各种导数的形式便可以由下述式子导出：

$$g'\left(x\right) = \lim_{t\to 0}\frac{F\left(x+th\right) - F\left(x\right)}{t}$$

即此式子为导数的通用公式。一维情形时记 $h=1$，表示的是普通导数。下面举例说明。

例 3.2.1 函数在某一点处取值。取 $X = C\left[0,1\right]$，通过 $f\left(x\left(\cdot\right)\right) = \cos\left(x\left(1\right)\right)$，我们定义 $f: X \to \mathbb{R}$。设 $h = h\left(u\right)$ 是 $C\left[0,1\right]$ 中另一元素，计算 f 在 $x\left(\cdot\right)$ 处沿 $h\left(\cdot\right)$ 方向上的方向导数。

解 记 $\delta\left(\cdot\right)$ 为函数或者泛函的微分，由 Gâteaux 微分的定义可知

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f\left(x+th\right)\right) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\cos\left(x\left(1\right)+th\left(1\right)\right) - \cos\left(x\left(1\right)\right)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\left(x\left(1\right)+th\left(1\right)\right)\Big|_{t=0} \\ &= -\sin\left(x\left(1\right)+th\left(1\right)\right)h\left(1\right)\Big|_{t=0} = -\sin\left(x\left(1\right)\right)h\left(1\right)\end{aligned}$$

因此，$\delta f(x,h)=-\sin(x(1))h(1)$。映射 $h(\cdot)\mapsto -\sin(x(1))h(1)$ 关于 $h\in C[0,1]$ 是线性和连续的，则在任意点 $x\in X$ 都存在 Gâteaux 导数 $f'(x)$，且满足 $f'(x)h=-\sin(x(1))h(1)$

注 例 3.2.1 中，没有参考增量 h 就不可能表达 $f'(x)$，因此要注意 $f'(x)\in X^*$ 的计算法则。

4. 对前述问题的补充——弱导数

本节将把函数求偏导数的运算扩展，使得对一些按通常意义不能求偏导数的函数按扩展了的意义可以求偏导数。

定义 4.1 [10] [11]设 u 是定义在开集 $\Omega\subseteq R^n$ 上的局部可积函数，α 为 n 重指标，m 为正整数。若存在 Ω 上的局部可积函数 v，使对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，下述等式

$$(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)\partial^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega v(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

成立，则称 v 为 u 的 α 阶弱导数，记作 $v=\partial^\alpha u$。如果对所有 $|\alpha|\le m$，u 在 Ω 上都有 α 阶弱导数，则称 u 在 Ω 上 m 阶弱可微。这里用符号 $W^m(\Omega)$ 表示由全体在 Ω 上 m 阶弱可微的函数组成的集合。

定理 4.1 [10] [12]设 u，v 都是开集 $\Omega\subseteq R^n$ 上的两个局部可积函数，则有下述结论：

1) 若对任意非负的 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 都成立

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\ge\int_\Omega v(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

则 $u(x)\ge v(x)$，a.e. $x\in\Omega$；

2) 若对任意非负的 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 都成立

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega v(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

则 $u(x)=v(x)$，a.e. $x\in\Omega$。

上述等式恒等于零时得到变分法基本引理[8]。由于几乎处处相等的函数看作是相同的函数，所以根据上述定理 4.1 知，如果局部可积函数有 α 阶弱导数，则易知其 α 阶弱导数是唯一的。另外，运用分部积分公式可看出，在 Ω 上 m 阶连续可微的函数必在 Ω 上 m 阶弱可微，即 $C^m(\Omega)\subseteq W^m(\Omega)$，且当 $u\in C^m(\Omega)$ 时，对任意 $|\alpha|\le m$，u 在 Ω 上的 α 阶弱导数 $\partial^\alpha u$ 与其通常意义的 α 阶偏导数是一致的。

例 4.1 考虑函数 $u(x)=|x|$，取 $x\in(-1,1)$，由例 1.1 易知函数 $u(x)$ 在 $x\in(-1,1)$ 不可导，即没有连续导数，但是在 $(-1,1)$ 中有弱导数

$$v(x)=D(u(x))=\begin{cases}1 & x>0\\-1 & x<0\end{cases}$$

此时得到的函数 $v(x)$ 在 $(-1,1)$ 中没有弱导数。

弱导运算中有一个很重要的性质，就是它与函数列在很弱意义下的极限运算可以交换次序。

推论 4.1 [10]设在开集 $\Omega\subseteq R^n$ 上的局部可积函数列定义为 $u_k\ (k=1,2,\cdots)$，而 u，v 是 Ω 上的局部可积函数，α 是 n 重指标。设每个 u_k 都在 Ω 上有 α 阶弱导数 $\partial^\alpha u_k\ (k=1,2,\cdots)$ 且对任意开集 $U\subset\subset\Omega$ 成立

$$\lim_{k\to\infty}\|u_k-u\|_{L^1(U)}=0 \text{ 和 } \lim_{k\to\infty}\|\partial^\alpha u_k-v\|_{L^1(U)}=0,$$

则 u 在 Ω 上的 α 阶弱导数，且 $\partial^\alpha u=v$。

下面的定理说明，尽管求弱导数的运算比求普通意义的偏导数的运算弱很多，但可用通常意义的偏导数按 L^1 范数局部逼近弱导数，从而以上推论在某种意义上逆命题成立。

定理 4.2 [10]若开集 $\Omega\subseteq R^n$ 上局部可积函数 u 是在 Ω 上的 α 阶弱导数，则存在函数列 $u_k\in C^\infty(\Omega)(k=1,2,\cdots)$，使对任意开集 $U\subset\subset\Omega$，下述式子

$$\lim_{k\to\infty}\|u_k-u\|_{L^1(U)}=0 \text{ 和 } \lim_{k\to\infty}\|\partial^\alpha u_k-\partial^\alpha u\|_{L^1(U)}=0\text{，}$$

成立，进一步如果 $u\in W^m(\Omega)$，那么函数列 $u_k\in C^\infty(\Omega)(k=1,2,\cdots)$ 可取得使对任意开集 $U\subset\subset\Omega$ 和任意 n 重指标 $|\alpha|\le m$，可得以上两个等式都成立。

弱导数应用广泛[13] [14]，涉及到各种边值问题解的存在性，工程逼近等。如何判断一个函数是否有弱导数的问题在一定条件下可以转化为对这个函数的差商作积分估计的问题。对于某一个函数，有导数一定有弱导数，但是有弱导数不一定有导数。

5. 总结与运用

本文研究了在微积分中的导数微分及 Fréchet 微分及 Gâteaux 微分的概念，应用案例分析及相互关系。泛函中的微分是微积分中微分的推广。微积分中讨论的微分是比较具体的，泛函所讨论的微分更一般化，因为 Gâteaux 微分是弱微分，而 Fréchet 微分是强微分，可知 Gâteaux 微分比 Fréchet 微分更弱，最后通过分析总结，得出微积分中的微分与泛函中的微分，它们定义的空间发生变化，只要定义的空间转变，可相互转化；Fréchet 可微可以推导出 Gâteaux 可微，而 Gâteaux 可微要保证连续性才能推出 Fréchet 可微。而且在微积分普通导数中，有单向导数的说法，但是在 Fréchet 微分及 Gâteaux 微分中没有单向导数的说法，最后补充弱导数的定义及其一些性质。

下述是几种导数微分的一些应用：

导数的应用：插值与拟合；当某一个函数的解析式比较复杂或只知函数表时，直接研究它比较困难，通过逼近，引入多项式的插值问题。本节引入 n 次 Lagrange 插值公式[15]，即可表示为

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{w_n(x)}{(x-x_i)w_n'(x_i)}$$

其中 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为插值节点，y_i 为其相应的函数值，记 $w_n(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$，则 $w_n'(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)$。特别地，当 $n=1$ 时，有线性插值公式

$$p_1(x)=y_0\times\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\times\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

当 $n=2$ 时，有抛物插值公式

$$p_2(x)=y_0\times\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\times\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_1\times\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

例 5.1 已知 $\sqrt{100}=10,\sqrt{121}=11,\sqrt{144}=12$，用线性插值公式和抛物插值公式求 $\sqrt{125}$ 的近似值。

解 线性插值公式：由题可取 $x_0=121,x_1=144;y_0=11,y_1=12$，由上述线性插值公式，则得

$$p_1(x)=11\times\frac{x-144}{121-144}+y_1\times\frac{x-121}{144-121}\text{，}\quad\sqrt{125}\approx p_1(125)=11.17391\text{。}$$

抛物插值公式：

取 $x_0=100,x_1=121,x_2=144;y_0=10,y_1=11,y_2=12$，由上述的抛物插值公式，则得

$$p_2(x)=10\times\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}+11\times\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}+12\times\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)}$$

$\sqrt{125}\approx p_2(125)=11.18107$。值得注意的是 $\sqrt{125}=11.1803398\cdots$，上述两种插值所得的近似值分别达到 3 位和 4 位有效数值，且相对于线性插值公式，抛物插值公式所得值更加精确。

例 5.2 考虑拟合下列数据的最小二乘解。

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
y_i	0.9	1.9	2.8	3.3	4.0	5.7	6.5

解 在坐标平面上描出点(x_i, y_i)，$(i=0,1,\cdots,6)$，分布大致成一直线，故设$s(x)=a_0+a_1x$。则

$$\psi(a_0,a_1)=\sum_{i=0}^{6}\left[s(x_i)-y_i\right]^2=\sum_{i=0}^{6}\left(a_0+a_1x_i-y_i\right)$$

故而

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial a_0}=0\Leftrightarrow\sum\limits_{i=0}^{6}2\left(a_0+a_1x_i-y_i\right)\times 1=0\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial a_1}=0\Leftrightarrow\sum\limits_{i=0}^{6}2\left(a_0+a_1x_i-y_i\right)\times x_i=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a_0\sum_{i=0}^{6}1+a_1\sum_{i=0}^{6}x_i=\sum_{i=0}^{6}y_i$$

$$\Leftrightarrow a_0\sum_{i=0}^{6}x_i+a_1\sum_{i=0}^{6}x_i^2=\sum_{i=0}^{6}y_ix_i$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=0}^{6}1 & \sum\limits_{i=0}^{6}x_i\\ \sum\limits_{i=0}^{6}x_i & \sum\limits_{i=0}^{6}x_i^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=0}^{6}y_i\\ \sum\limits_{i=0}^{6}y_ix_i\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix}7 & 4.2\\ 4.2 & 3.64\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25.1\\ 20.18\end{pmatrix}$$

则可得出$a_0=0.843, a_1=4.57$，故$s^*(x)=0.843+4.57x$为所求的最小二乘解。

通过观察数据，预测函数的表达式，与插值法类似，进行数据拟合，与插值法不同的是插值时函数必须通过所有点，而数据拟合的最小二乘法[15]不需要，只要求在最小二乘意义下最接近的所有数据点即可。例 5.2 说明了一般形式的曲线拟合。

涉及到导数的问题非常多，如文献[16] [17] [18] [19] [20]等，不仅用到各种导数，还涉及计算的问题。

弱导数的应用：可以用来定义弱解[17] [18] [19] [20]；设$\Omega\subset\mathbf{R}$是有界区间，$h(x,t):\Omega\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$是关于$t$的连续函数，考虑第一边值问题

$$\begin{cases}-u''=h(x,u), & x\in\Omega\\ u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

其中$u=u(x)$表示待求函数，如果存在$u\in H_0^1(\Omega)$，使得对任意$\varphi\in H_0^1(\Omega)$，都有

$$\int_\Omega v(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega\varphi(x)\cdot h(x,u)\mathrm{d}x$$

则称$f(x)$为对应问题的弱解。其中$v(x)$为$u(x)$的一阶弱导数，记为$u'(x)=v(x)$。

事实上，根据原方程左右两边同时乘以任意$\varphi\in H_0^1(\Omega)$再在Ω上积分，同时使用格林公式就得到弱

解的定义式。

G、F 导数的应用：将微分方程的弱解转化为对应泛函的临界点：在上述第一边值问题中，其弱解等价于下面泛函的临界点：

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|u'|^{2}\mathrm{d}x-\int_{\Omega}H(x,u)\mathrm{d}x,$$

其中 $H(x,u)=\int_{0}^{u}(x,t)\mathrm{d}t$，此时泛函 J 的 G 或者 F 导数为

$$\langle J'(u),\varphi\rangle=\frac{1}{2}\int_{\Omega}u'\varphi'\mathrm{d}x-\int_{\Omega}\varphi h(x,u)\mathrm{d}x,\quad \forall\varphi\in H_{0}^{1}(\Omega),$$

然而，该泛函的临界点为其 G 导数恒为零的点，亦即 $\langle J'(u),\varphi\rangle\equiv 0$ 时对任意的 $\varphi\in H_{0}^{1}(\Omega)$，有

$$\int_{\Omega}v(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int_{\Omega}\varphi(x)\cdot h(x,u)\mathrm{d}x,$$

这恰好是原问题弱解的定义从而实现了原问题弱解与泛函临界点之间的转化。

致　谢

全体作者感谢审稿人和编辑的细心指导。

基金项目

贵州省科技厅科研基金立项项目(编号：黔科合 J 字 LKM[2013]35 号)，贵州省研究生科研基金立项项目(编号：黔教合 YJSCXJH[2020]083)。

参考文献

[1] Li, J.H. (2016) Proof of Lagrange Mean Value Theorem and Its Application in Text Design. *Chemical Engineering Transactions* (*CET Journal*), **51**, 325-330.

[2] 程小力. 局部凸空间中的拟-Fréchet 微分及其应用[J]. 浙江师大学报(自然科学版), 1996(2): 16-21. http://www.cqvip.com/qk/97508X/199602/2097690.html

[3] Kadıoğlu, F. and Tekin, G. (2016) Viscoelastic Plate Analysis Based on Gâteaux Differential. *MATEC Web of Conferences*, **43**, Article No. 04004. https://doi.org/10.1051/matecconf/20164304004

[4] 杨志和. 二阶非线性椭园型方程弱解的两个估计[J]. 成都科技大学学报, 1985(4): 93-100. http://www.cnki.com.cn/Article/CJFDTotal-SCLH198504011.htm

[5] 陈纪修, 於崇华, 金路. 微积分(上册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[6] 张世清. 泛函分析及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2018.

[7] 钟承奎, 范先令, 陈文塬. 非线性泛函分析引论[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1900.

[8] Strauss, W.A. (2007) Partial Differential Equations: An Introduction. 2nd Edition, John Wiley & Sons Inc., Hoboken.

[9] 时宝, 王兴平, 盖明久, 等. 泛函分析引论及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2009.

[10] 崔尚斌. 偏微分方程现代理论引论[M]. 北京: 科学出版社, 2015.

[11] Evans, L.C. (2010) Partial Differential Equations. Vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Berkeley. https://doi.org/10.1090/gsm/019

[12] 陆文端. 微分方程中的变分法(修订版) [M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[13] 王跃. 负模量基尔霍夫型问题进展[J]. 应用泛函分析学报, 2020, 22(4): 230-258.

[14] Ninomiya, S. and Victoir, N. (2008) Weak Approximation of Stochastic Differential Equations and Application to Derivative Pricing. *Applied Mathematical Finance*, **15**, 107-121. https://doi.org/10.1080/13504860701413958

[15] 黄云清, 舒适, 陈艳萍, 等. 数值计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 2009.

[16] 王跃, 索洪敏, 熊宗洪, 等. 椭圆型广义 Kirchhoff 问题的多重解[J]. 扬州大学学报(自然科学版), 2020, 23(5),

19-22.

[17] Wang, Y. and Yang, X. (2020) Infinitely Many Solutions for a New Kirchhoff-Type Equation with Subcritical Exponent. *Applicable Analysis*, 14 p. https://doi.org/10.1080/00036811.2020.1767288

[18] 王跃, 叶红艳, 索洪敏. 一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的非局部问题正解的存在性[J]. 应用数学, 2019, 32(2): 452-456.

[19] Takaoka, H. (2016) A Priori Estimates and Weak Solutions for the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation on Torus Below H 1/2. *Journal of Differential Equations*, **260**, 818-859. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.09.011

[20] 王跃, 梁金平, 索洪敏. 一类非局部近共振问题多重解的存在性[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(4): 53-58.