

扩展的Degasperis-Procesi方程的行波解分支

韦敏志¹, 杨凤玲^{2*}

¹广西财经学院, 广西 南宁

²交通银行股份有限公司柳州分行, 广西 柳州

Email: *1961095749@qq.com

收稿日期: 2021年1月23日; 录用日期: 2021年2月17日; 发布日期: 2021年2月25日

摘要

Degasperis-Procesi方程是偏微分方程中非常重要的一个方程。本文主要介绍扩展的Degasperis-Procesi方程, 利用行波变换将偏微分方程转换成常微分方程, 再对方程中的参数进行分析得到相图分支, 根据相图轨道构建出方程精确行波解, 求出其参数表达式。同时证明了在某些参数条件下, 扩展的Degasperis-Procesi方程具有光滑的孤立波解和周期波解。

关键词

扩展的Degasperis-Procesi方程, 动力系统分支理论, 同宿轨, 周期轨, 行波解

Traveling Wave Solutions and Bifurcations for Extended Degasperis-Procesi Equation

Minzhi Wei¹, Fengling Yang^{2*}

¹Guangxi University of Finance and Economics, Nanning Guangxi

²Bank of Communications Co., Ltd. Liuzhou Branch, Liuzhou Guangxi

Email: *1961095749@qq.com

Received: Jan. 23rd, 2021; accepted: Feb. 17th, 2021; published: Feb. 25th, 2021

Abstract

Degasperis-Procesi equation is one of the most important partial differential equations. The presented paper mainly introduces the extended Degasperis-Procesi equation. The partial differential equation is transformed into ordinary differential equation by traveling wave transformation, and then the parameters in the formula are analyzed to obtain the phase diagram branch. Accord-

*通讯作者。

ing to the phase diagram orbit, the exact traveling wave solutions for the equation are constructed. It is proved that the extended Degasperis-Procesi equation has smooth solitary wave solution and periodic wave solution under some certain parametric conditions.

Keywords

Extended Degasperis-Procesi Equation, Bifurcation Theory of Dynamical Systems, Homoclinic Orbit, Periodic Orbit, Traveling Wave Solution

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

孤立波最初由英国科学家罗素(Russell)于 1842 年发现并于 1844 年提出[1], 它满足以下条件: 1) 只在浅水中出现; 2) 只有一个波峰或波谷; 3) 是有限振幅波。罗素认为孤立波是流体运动的一个稳定解, 但他并未成功解释该现象。罗素提出的孤立波现象于 1895 年被荷兰数学家 Korteweg 和 de Vries 成功解释[2]。他们在研究浅水中小振幅长波运动时导出了一种单向运动浅水偏微分方程——KdV 方程, 获得了 KdV 方程的一个行波解, 证明罗素所提出的孤立波是存在的。

1965 年 Zabusky 和 Kruskal 发现, 假定 FPU 问题的震动是连续的, 就可以用 KdV 方程近似描述。对于 KdV 方程中波速不同的两个孤波, 相互碰撞后, 只发生位移, 而波形波速不改变, 类似于粒子的碰撞, 所以他们将这样的孤波命名为孤立子。Cammassa 和 Holm 于[3] 1993 年导出了 Cammassa-Holm (CH)方程, 得到了方程带尖点的孤立子解, 说明孤立子并不都是光滑的。

与孤立波理论研究相关的方程有很多, 其中就包括 Cammassa-Holm (CH)方程和 Degasperis-Procesi (DP)方程。Degasperis 和 Procesi [3]在研究动力学的非线性浅水波模型时提出了以下方程:

$$u_t - u_{xxx} + (a+1)uu_x = au_x u_{xx} + uu_{xxx}, \tag{1}$$

当且仅当 $a = 2$ 或 $a = 3$ 时, 方程(1)完全可积。当 $a = 2$ 时, 方程(1)是 Cammassa-Holm (CH)方程, 可积且具有多孤子尖波峰解; 当 $a = 3$ 时, 方程(1)是无色散形式的 Degasperis-Procesi (DP)方程。

最近 Helal [4]、王[5]、刘[6]等研究了扩展的 CH 和 DP 方程:

$$u_t - u_{xxx} + (a+1)u^2 u_x = (b+1)u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \tag{2}$$

情况 1: $a = 2, b = 1$, 方程(2)是扩展的 Cammassa-Holm (mCH)浅水波方程(见[3])。

情况 2: $a = 3, b = 2$, 方程(2)是扩展的 Degasperis-Procesi (mDP)方程(见[7]), 文献[4] [5] [6]通过使用 tanh 和 sine-cosine、动力系统的分支理论等方法得到了两个扩展 Degasperis-Procesi 方程的具有 peakon 解的孤立波解。

本文研究 $b = 2, a \neq 3$ 的情况, 即以下形式的扩展 Degasperis-Procesi 方程:

$$u_t - u_{xxx} + (a+1)u^2 u_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \tag{3}$$

利用动力系统分支理论[8]研究其相图分支和对应的行波解。

2. 方程(3)的相图

对方程(3)作行波变换 $u(x,t) = u(\xi), \xi = x - ct$, 其中 c 是波速。代入式(3), 积分忽略积分常数, 方程(3)转化为如下的常微分方程:

$$-cu + cu'' + \frac{a+1}{3}u^3 = (u')^2 + uu'', \tag{4}$$

将其转化为以下的二维系统:

$$\frac{du}{d\xi} = y; \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{cu - \frac{a+1}{3}u^3 + y^2}{c-u}, \tag{5}$$

并得到它的首次积分为:

$$H(u, y) = -c^2u^2 + \frac{2}{3}cu^3 + \frac{1}{6}c(a+1)u^4 - \frac{2}{15}(a+1)u^5 + (c-u)^2 y^2 = h, \tag{6}$$

通过变形可以得到:

$$y^2 = \frac{h + c^2u^2 - \frac{2}{3}cu^3 - \frac{1}{6}c(a+1)u^4 + \frac{2}{15}(a+1)u^5}{(c-u)^2}, \tag{7}$$

当 $c-u=0$ 时, 记 $h = h_s$ 。

可以看出, 方程(4)是一个平面动力系统, 定义在参数空间 (c, a, n) 上。由于在实际模型中, 有界解才具有物理意义, 同时(4)式的相图轨道决定了的所有行波解, 所以我们将研究(4)式在相平面 (u, y) 中的相图分支, 对于给定的物理模型, 仅求出方程(4)的有界解。通过观察在系统参数发生变化时, 相图的分支情况, 得出方程的行波解。

设 $u(\xi)$ 是(5)在 $\xi \in (-\infty, +\infty)$ 上的一个连续解, 且 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} u(\xi) = a, \lim_{\xi \rightarrow +\infty} u(\xi) = b$ 。①若 $a = b$, 称 $u(x, t)$ 为一个孤立波解; ②若 $a \neq b$, 称 $u(x, t)$ 为扭结或反扭结波解。式(1)的一个孤立波解对应式(5)的一个同宿轨道, 式(1)的一个扭结或反扭结波解对应式(5)的一个异宿轨道。因此想要分析所有式(1)孤立波的相图分支, 就得先找到式(5)基于系统参数的同宿轨道。

考虑式(5), 首先令 $d\xi = (c-u)d\tau$, 式(5)变为

$$\frac{du}{d\tau} = (c-u)y; \quad \frac{dy}{d\tau} = cu - \frac{a+1}{3}u^3 + y^2, \tag{8}$$

显然, 除直线 $c-u=0$ 外, 式(8)与式(5)具有相同的拓扑相图。且式(7)与式(5)可积, 首次积分与式(6)相同。当 h 不变时, 式(7)确定式(8)的一组不变曲线, 包含不同的曲线分支; 当 h 变化时, 式(7)定义了式(8)不同曲线的动力学行为。

令 $F(u) = cu - \frac{a+1}{3}u^3$, 为了研究系统的临界点, 我们需要找到方程 $F(u) = 0$ 的所有零点。在 (u, y) 相平面中, 方程(5)在 u 轴上的横坐标是 $F(u)$ 的零点。

可以发现, 若 $c(a+1) > 0$, 则 $F(u)$ 有三个平衡点, 分别是 $E_0(0,0)$ 、 $G_{1,2}\left(\sqrt{\frac{3c}{a+1}}, 0\right)$ 。若 $c(a+1) < 0$, 则 $F(u)$ 有一个平衡点 $E_0(0,0)$ 。

设 $E(u_i, 0)$ 是式(7)的平衡点, $M(u_i, 0)$ 是式(7)线性化系统在 $E(u_i, 0)$ 处的系数矩阵, $J(u_i, 0)$ 是它的雅可比行列式, 则

$$J(u_i, 0) = \det M(u_i, 0) = -(c - u_i)[c - (a + 1)u_i^2]$$

由平面动力系统分支定理可知, 当 $J(u_i, 0) > 0$ 时, 哈密顿系统平衡点 $E(u_i, 0)$ 是中心; 当 $J(u_i, 0) < 0$ 时, $E(u_i, 0)$ 是鞍点; 当 $J(u_i, 0) < 0$, 且 Poincaré 指数为 0 时, $E(u_i, 0)$ 是尖点。

由(6)定义的函数, 有

$$h_{\pm} = H(u_{\pm}, 0) = u^2 \left(-c^2 + \frac{2}{3}cu + \frac{1}{6}c(a+1)u^2 - \frac{2}{15}(a+1)u^3 \right); h_o = H(\pm\sqrt{y}, 0) = 0, \tag{9}$$

由以上分析得到四种不同的参数条件下的相图分支, 见图 1。

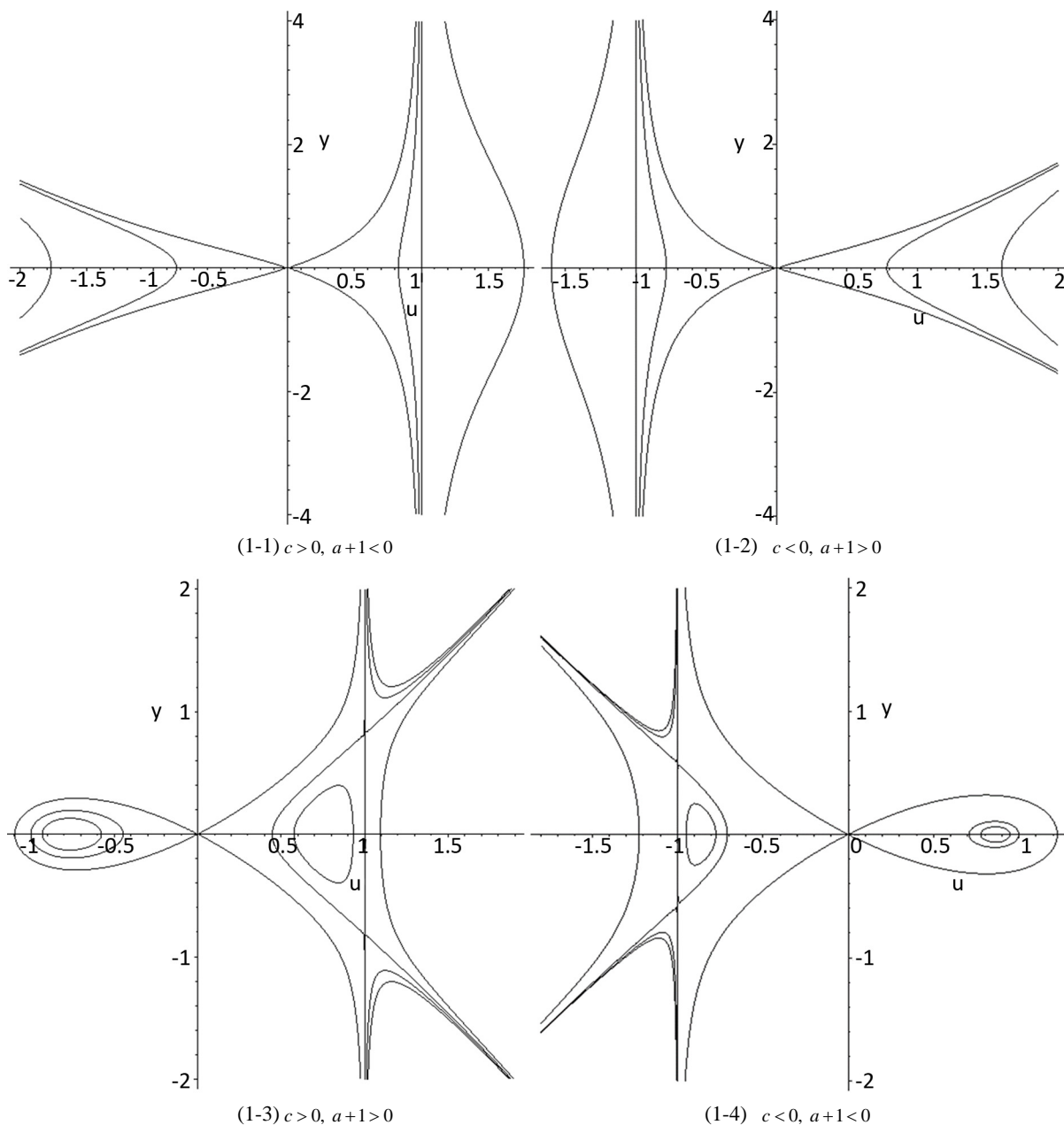


Figure 1. Phase portraits of system (5) on different parametric conditions

图 1. 系统(5)在不同参数条件下的相图

可以发现, $(1-1)c > 0, a+1 < 0, (1-2)c < 0, a+1 > 0$ 两种情况下, 方程不存在行波解, (1-3)与(1-4)对称。

3. 方程(3)的精确行波解及其参数表达式

本章根据第二章所求得的结论, 对动力系统进行相图分析, 在 h 取不同的值时, 得到不同的轨线分支, 通过(7)式的变形, 借助文献[9], 对得到在某些参数条件下方程光滑的孤立波解、周期波解的参数表达式。

3.1. $h = 0$ 时的孤立波解

由图 1(1-3)可知, 当 $h = 0$ 时, 出现同宿轨, 则(7)可变形为

$$y^2 = \frac{u^2 \left[c^2 - \frac{2c}{3}u - \frac{c(a+1)}{6}u^2 + \frac{2}{15}(a+1)u^3 \right]}{(c-u)^2} = \frac{u^2(u-t_1)(u-z_1)(u-z_2)}{(c-u)^2}, \quad (10)$$

其中 t_1 是 $c^2 - \frac{2c}{3}u - \frac{c(a+1)}{6}u^2 + \frac{2}{15}(a+1)u^3$ 的实根, z_1, z_2 是它的复数根。结合(10)和(5)的第一个式子得

$$\pm d\xi = \frac{c-u}{u} \sqrt{\frac{1}{(u-t_1)(u-z_1)(u-z_2)}} du, \quad (11)$$

由[9]的公式 241.00、241.04 和 361.60 得到

$$\pm \xi = g_1 F(\varphi_1, k_1) - \frac{cg_1}{A-t_1} \left[-u + \frac{A+t_1}{2t_1} \Pi \left(\varphi_1, \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}, k_1 \right) - \alpha f_1 \right], \quad (12)$$

其中,

$$A^2 = \left(\frac{z_1+z_2}{2} - t_1 \right)^2 - \frac{(z_1-z_2)^2}{4}, \quad g_1 = \left[\left(\frac{z_1+z_2}{2} - t_1 \right)^2 - \frac{(z_1-z_2)^2}{4} \right]^{\frac{1}{4}},$$

$$k_1^2 = \frac{A + \frac{z_1+z_2}{2} - t_1}{2A}, \quad k_1' = \sqrt{1-k_1^2}, \quad \varphi_1 = \cos^{-1} \left(\frac{u-t_1-A}{u-t_1+A} \right), \quad \alpha = \frac{A-t_1}{A+t_1},$$

$$f_1 = \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{k_1^2 + \alpha^2 k_1'^2}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{k_1^2 + \alpha^2 k_1'^2}{1-\alpha^2}} s du \right).$$

(12)是方程(3)在 $c > 0, a+1 > 0$ 条件下孤立波解的参数表达式。同理, 也可求出方程在 $c < 0, a+1 < 0$ 条件下孤立波解的参数表达式。

3.2. $h = h_s$ 时的周期尖波解

由图 1(1-3)可知, 当 $h = h_s$ 时, 出现周期轨, 则(7)式可变形为

$$y^2 = \frac{(c-u)^2(u-t_1)(u-t_2)(u-t_3)}{(c-u)^2} = (u-t_2)(u-t_3)(u-t_4), \quad (13)$$

其中 $t_2 > t_3 > t_4$ 。结合(13)和(5)的第一个式子得

$$\pm d\xi = \frac{du}{(u-t_2)(u-t_3)(u-t_4)}, \quad (14)$$

由[9]的公式 237.00 得

$$\pm \xi = g_2 \operatorname{sn}^{-1}(\sin \varphi_2, k_2), \quad (15)$$

由(14)式计算(15)式, 得

$$u = \frac{t_2 - t_3 \operatorname{sn}^2\left(\frac{\xi}{g_2}, k_2\right)}{1 - \operatorname{sn}^2\left(\frac{\xi}{g_2}, k_2\right)}, \quad (16)$$

其中, $g_2 = \frac{2}{\sqrt{t_2 - t_3}}$, $\varphi_2 = \sin^{-1} \sqrt{\frac{u - t_2}{u - t_3}}$, $k_2^2 = \frac{t_3 - t_4}{t_2 - t_4}$, $\operatorname{sn} u = \sin \varphi_2$ 。

4. 结论

本文利用动力系统分支理论研究扩展的 Degasperis-Procesi 方程, 在不同的参数条件下获得四个相图, 证明了孤立波解、周期波解的存在, 并获得对应精确解的参数表达式。

基金项目

本文受广西高校中青年教师科研基础能力提升项目(No. 2020KY16019)和广西财经学院青年教师科研发展基金项目(No. 2019QNA03)资助。

参考文献

- [1] Russell, J.S. (1844) On Waves. *Report of 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, London, 311-390.
- [2] Korteweg, D.J. and de Vries, G. (1985) On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **39**, 422-443. <https://doi.org/10.1080/14786449508620739>
- [3] Cammassa, R. and Holm, D. (1993) An Integrable Shallow Water Equation with Peaked Solitons. *Physical Review Letters*, **71**, 1661-1664. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.1661>
- [4] Helal, M.A., Seadawy, A.R. and Zekry, M. (2017) Stability Analysis Solutions of the Nonlinear Modified Degasperis-Procesi Water Wave Equation. *Journal of Ocean Engineering and Science*, **2**, 155-160. <https://doi.org/10.1016/j.joes.2017.07.002>
- [5] Wang, Q. and Tang, M. (2008) New Exact Solutions for Two Nonlinear Equations. *Physics Letters A*, **372**, 2995-3000. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.01.012>
- [6] Liu, Z.R. and Ouyang, Z.Y. (2007) A Note on Solitary Waves for Modified Forms of Camassa-Holm and Degasperis-Procesi Equations. *Physics Letters A*, **366**, 377-381. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.01.074>
- [7] Degasperis, A. and Procesi, M. (1999) Asymptotic Integrability. In: *Symmetry and Perturbation Theory*, World Scientific, Singapore, 23-37.
- [8] Li, J.B. and Dai, H.H. (2007) On the Study of Singular Nonlinear Travelling Wave Equations: Dynamical Approach. Science Press, Beijing.
- [9] Byrd, P.F. and Friedman, M.D. (1971) Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists. 2nd Edition, Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-65138-0>