Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(3), 801-808
Published Online March 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.103088

Hans汉斯

两个微分算子乘积的自伴性

王红军

河北工业大学理学院，天津
Email: 18135515783@163.com

收稿日期：2021年2月25日；录用日期：2021年3月23日；发布日期：2021年3月30日

摘　要

本文研究了闭区间上两个一阶微分算子乘积自伴的充分必要条件，并且给出度量图上两个一阶局部微分算子积的自伴顶点条件。在研究闭区间上积算子自伴性的基础上，运用度量图上高阶局部微分算子的自伴顶点条件得到了积算子自伴的充分必要条件。

关键词

闭区间，度量图，积算子，自伴性

The Self-Adjointness of the Product of Two Differential Operators

Hongjun Wang

College of Science, Hebei University of Technology, Tianjin
Email: 18135515783@163.com

Received: Feb. 25th, 2021; accepted: Mar. 23rd, 2021; published: Mar. 30th, 2021

Abstract

In this paper, we study the necessary and sufficient conditions for the self-adjointness of the product of the two first-order differential operators on closed interval, and the self-adjoint vertex conditions of the product of two first-order local differential operators on metric graph are given. Based on the self-adjointness of the product operator on closed interval, the necessary and sufficient conditions which make the product operators be self-adjoint operators are obtained by using the self-adjoint vertex conditions of the higher-order differential operator on metric graph.

文章引用: 王红军. 两个微分算子乘积的自伴性[J]. 应用数学进展, 2021, 10(3): 801-808.
DOI: 10.12677/aam.2021.103088

Keywords

Closed Interval, Metric Graph, Product Operators, Self-Adjointness

1. 引言

关于微分算子自伴性的讨论开始于十九世纪三十年代的 Sturm-Liouville 问题[1]。随着科学技术的发展，许多物理工程系统模型都需要用几何图来描述，度量图上微分算子模型随之出现，主要集中在描述度量图上局部微分算子的自伴性。1998 年 Carlson R. [2]得到度量图上 M 阶局部微分算子的自伴顶点条件。

关于闭区间上的乘积算子(下称积算子)或幂的自伴性，也有一些描述。1998 年在文献[3]中给出了 $[a,b]$ 上两个 n 阶微分算子的积算子自伴的充分必要条件。文献[4] [5]给出了区间上两个高阶微分算子乘积自伴的充分必要条件。但关于度量图上积算子的自伴性问题，至今还没有系统研究。本文利用研究闭区间上积算子的自伴性的方法和度量图上 n 阶局部微分算子的自伴顶点条件得到了度量图上两个一阶局部微分算子乘积自伴的充分必要条件。

本文主要内容如下：第二章中给出闭区间上两个一阶微分算子的积算子自伴的充分必要条件；第三章给出度量图上微分算子自伴的判定准则和两个一阶局部微分算子的积算子自伴的充分必要条件。

2. 闭区间上的两个微分算子乘积的自伴性

2.1. 基础知识

闭区间 $[a,b]$ 上所有平方可积的函数所组成的空间记为 $L^2[a,b]$，其内积和范数为

$$(f,g)_{L^2[a,b]}=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x,\quad \|f\|_{L^2[a,b]}=\left(\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

令 n 阶实对称微分算式

$$l(f)=\sum_{j=0}^{n}c_j(x)f^{(j)}(x),$$

系数 $c_j(x)$ 为实值函数且 $c_j(x)\in C^n[a,b]$。应用分部积分法，

$$(l(f),g)_{L^2[a,b]}-(f,l(g))_{L^2[a,b]}=[f,g]_n(b)-[f,g]_n(a),$$

其中

$$[f,g]_n(x)=\left(\overline{\boldsymbol{C}_g}(x)\right)^{\top}\boldsymbol{Q}_n(x)\boldsymbol{C}_f(x),$$

$[f,g]_n$ 表示关于 $l(f)$ 的 Lagrange 双线性型，

$$\boldsymbol{C}_g(x)^{\top}=\left(g(x),g'(x),\cdots,g^{(n-1)}(x)\right),\quad \left(\boldsymbol{C}_f(x)\right)^{\top}=\left(f(x),f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)\right).$$

$\boldsymbol{Q}_n(x)$ 表示关于 $[f,g]_n(x)$ 的 Lagrange 双线性矩阵。令

$$\boldsymbol{Q}_n(x)=\left(d_{ij}(x)\right)_{n\times n},$$

根据文献[6]得

$$d_{ij}(x)=\begin{cases}\sum\limits_{h=i}^{n-j-1}(-1)^h\binom{h}{i}\dfrac{\mathrm{d}^{h-i}c_{j+h+1}(x)}{\mathrm{d}x^{h-i}}, & 0\le j+i\le n-1,\\ 0, & n-1\le j+i\le 2n-2,\end{cases} \tag{1}$$

且 $\boldsymbol{Q}_n(x)$ 满足以下性质

$$\boldsymbol{Q}_n^*(x)=-\boldsymbol{Q}_n(x),\ \left(\boldsymbol{Q}_n^{-1}(x)\right)^*=-\boldsymbol{Q}_n^{-1}(x).$$

令 $L_{max}(f)$ 为 $[a,b]$ 上由微分形式 $l(f)$ 生成的最大算子，其定义域为

$$D_{max}(l)=\left\{f\in L^2[a,b]: f^{(n-1)}\in AC[a,b], l(f)\in L^2[a,b]\right\},$$

其中 $AC[a,b]$ 表示在闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的全体所组成的集合。

2.2. 闭区间上两个一阶算子乘积的自伴性

本文讨论闭区间 $[a,b]$ 上由微分算式 $l(f)=if'$ 生成的微分算子，设 L_1 和 L_2 为 $L^2[a,b]$ 中由 $l(f)$ 生成的两个微分算子

$$\begin{cases}L_1(f)=l(f)=if',\\ (a_1+a_2i)f(a)+(b_1+b_2i)f(b)=0,\end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases}L_2(f)=l(f)=if',\\ (a_3+a_4i)f(a)+(b_3+b_4i)f(b)=0,\end{cases} \tag{3}$$

其中

积算子 T 定义如下：

$$\begin{cases}L(f)=l^2(f)=-f'',\\ (a_1+a_2i)f(a)+(b_1+b_2i)f(b),\\ (a_3+a_4i)if(a)+(b_3+b_4i)if(b)=0,\end{cases} \tag{4}$$

若积算子等价于

$$\begin{cases}L(f)=l^2(f)=-f'',\\ \boldsymbol{AC}_f(a)+\boldsymbol{BC}_f(b)=0,\end{cases} \tag{5}$$

则

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1+a_2i & 0\\ 0 & a_3i-a_4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_1+b_2i & 0\\ 0 & b_3i-b_4\end{bmatrix}$$

其中

$$\left(\boldsymbol{C}_f(a)\right)^\top=\left(f(a),f'(a)\right),\ \boldsymbol{C}_f(b)^\top=\left(f(b),f'(b)\right)$$

经过计算得 $l^2(f)$ 的 Lagrange 双线性矩阵为

$$Q_2(x)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

定理 1 积算子 $L=L_2L_1$ 为自伴的充要条件为

$$\begin{cases}a_2a_3-a_1a_4=b_2b_3-b_1b_4\\ a_1a_3+a_2a_4=b_1b_3+b_2b_4\end{cases}$$

成立且满足

$$\mathrm{Rank}(\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B})=2.$$

证因为 $l^2(f)$ 为对称微分算子，则有 $l^2(f)$ 生成的微分算子的充要条件为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_2^{-1}(a)\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2^{-1}(b)\boldsymbol{B}^* \text{ 且 } \mathrm{Rank}(\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B})=2.$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_2^{-1}(a)\boldsymbol{A}^*&=\begin{bmatrix}a_1+a_2i & 0\\ 0 & a_3i-a_4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_1-a_2i & 0\\ 0 & -a_3i-a_4\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}0 & a_2a_3-a_1a_4-(a_1a_3+a_2a_4)i\\ a_1a_4-a_2a_3-(a_2a_4+a_1a_3)i & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2^{-1}(b)\boldsymbol{B}^*&=\begin{bmatrix}b_1+b_2i & 0\\ 0 & b_3i-b_4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_1-b_2i & 0\\ 0 & -b_3i-b_4\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}0 & b_2b_3-b_1b_4-(b_1b_3+b_2b_4)i\\ b_1b_4-b_2b_3-(b_2b_4+b_1b_3)i & 0\end{bmatrix},\end{aligned}$$

证毕。

3. 闭区间上的两个微分算子乘积的自伴性

3.1. 基础知识

定义 1 [7]若图 G 中的顶点集 $V=\{v_i\}$ 与边集 $E=\{e_i\}$ 有限，则称图 G 为有限图。

集合 E 中的元素是无序二元组，可用 (v_i,v_j) 表示，其中 $v_i,v_j\in V$。

定义 2 若给有限图 G 每条边定义一个长度 l_{e_k}，即：$l_{e_k}\in(0,+\infty]$，则称图 G 为有限度量图。

定义 3 [8]若有限度量图 G 的边长度都为有限时，则称图 G 为紧致图。

在本文中所涉及的度量图都是有向紧致图。顶点 v 的度是指与 v 相连的边的条数，记作 $\delta(v)$。对于有向紧致图来说，顶点的度可分为入度和出度。入度是指以该顶点为终点的边数，出度是指以该顶点为起点的边数。设顶点 v 的入度为 s，将以 v 为终点的边记为 $e_1,\cdots,e_s$，那么顶点 v 的出度为 $\delta(v)-s$，将以 v 为起点的边记为 $e_{s+1},\cdots,e_{\delta(v)}$。

定义 4 [2]任取度量图 G 上的一条边 e_k，令 $[a_k,b_k]$ 表示 e_k 对应的区间，空间 $L^2(G)$ 表示 $\oplus_k L^2[a_k,b_k]$，$L^2(G)$ 上定义内积和范数：

$$(f,g)_{L^2(G)}=\sum_k\int_{a_k}^{b_k}f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x,\quad \|f\|_{L_2(G)}=\sum_k\|f\|_{L^2[a_k,b_k]}=\sum_k\left(\int_{a_k}^{b_k}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

在边 e_k 上定义 n 阶对称微分算式 $t(f)=\sum_{j=0}^{n}p_j(x)f^{(j)}(x)$，系数 $p_j(x)$ 为实值函数且 $p_j(x)\in C^n[a_k,b_k]$。

用 $C[a_k,b_k]$ 表示在区间 $[a_k,b_k]$ 上连续函数的全体所组成的集合，度量图 G 上最大算子 T_{max} 定义如下：

$$\begin{cases} T_{max}(f)=t(f), f\in D_{max}(t), \\ D_{max}(t)=\left\{f\in L^2(G):\forall k\in N, f_k, f_k',\cdots, f_k^{(n-1)}\in C[a_k,b_k], f_k^{(n-1)}\in AC[a_k,b_k], t(f)\in L^2(G)\right\} \end{cases}$$

下面给出局部算子的定义，用 $C_{comp}^{\infty}(G)$ 表示在度量图 G 上具有紧支集且无限次可微实值函数的全体所组成的集合，首先定义度量图上的函数集合 M：

$$M:=\left\{\varphi\in C_{comp}^{\infty}(G):\forall v\in V,\exists 领域U_v,使得\varphi在U_v中为常值函数\right\}.$$

定义 5 [9]任取集合 M 中的函数 φ，如果 $D(t)$ 中的函数 f 都满足 $\varphi f\in D(t)$，则称算子 T 为局部算子。

假设，f,g 为 $D_{max}(t)$ 中支集仅包含一个顶点 v 的函数，使用分部积分法可得，

$$\left(t(f),g\right)_{L^2(G)}-\left(f,t(g)\right)_{L^2(G)}=[f,g]_v,$$

其中 $[f,g]_v$ 是一个由 f 和 g 在顶点 v 处的边值构成的非退化多项式[9]。顶点 v 在于其相连的 $\delta(v)$ 条边上的取值分别为 $\alpha_i, i=1,\cdots,\delta(v)$，并且将 α_i 与顶点 v 的关系记为 $\alpha_i\sim v$。

引理 1 任取 $D_{max}(t)$ 中的函数 f，定义 f 在顶点 v 处的边值为空间 $C^{n\delta(v)}$ 中向量 $\hat{\boldsymbol{f}}$，其中 $\hat{\boldsymbol{f}}$ 的第 $ni+j-(n-1)$ 个元素 $\hat{f}_{ni+j-(n-1)}$ 为

$$\hat{f}_{ni+j-(n-1)}=f^{(j)}(\alpha_i),\quad j=0,\cdots,n-1, i=1,\cdots,\delta(v).$$

则在顶点 v 处存在一个可逆的 $n\delta(v)\times n\delta(v)$ 边值矩阵 $\boldsymbol{S}_v$，使得

$$[f,g]_v=\hat{\boldsymbol{g}}^*\boldsymbol{S}_v\hat{\boldsymbol{f}}.$$

在顶点 v 处，局部算子定义域中的函数所满足的单个条件为

$$\sum_{j,i}b_{j,i}\hat{f}_{ni+j-(n-1)}=0,\quad j=0,\cdots,n-1, i=1,\cdots,\delta(v).$$

局部算子定义域中的函数在顶点 v 处所满足的条件构成的最大线性无关集为 $\boldsymbol{B}_v\hat{\boldsymbol{f}}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{B}_v$ 是一个 $K(v)\times n\delta(v)$ 矩阵。

定理 2 [2]设在度量图上由微分形式 $t(f)$ 生成的 n 阶局部微分算子 T 为自伴算子，算子 T 在顶点 v 所满足的顶点条件为 $\boldsymbol{B}_v\hat{\boldsymbol{f}}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{B}_v$ 是一个 $K(v)\times n\delta(v)$ 的行线性无关矩阵，$\left(K(v)\le n\delta(v)\right)$，经过计算 $\boldsymbol{B}_v$ 是一个 $\frac{n}{2}\delta(v)\times n\delta(v)$，并且满足

$$\boldsymbol{B}_v\left(\boldsymbol{S}_v^*\right)^{-1}\left(\boldsymbol{B}_v^*\right)=\boldsymbol{0}. \tag{6}$$

定义 6 令 $\boldsymbol{B}_v\hat{\boldsymbol{f}}=\boldsymbol{0}$ 是局部微分算子 T 在顶点 v 处的顶点条件，若 $\boldsymbol{B}_v$ 是满足等式(6)的 $\frac{n}{2}\delta(v)\times n\delta(v)$ 的行线性无关矩阵，则称该顶点条件为 T 在顶点 v 处的自伴顶点条件。

3.2. 闭区间上两个一阶算子乘积的自伴性

度量图 G 上任取一条边，令 $[a_k,b_k]$ 表示 e_k 对应的区间。设微分算式为

$$t(f)=if'.$$

记 $\boldsymbol{Q}_1$ 表示关于 $t(f)$ 的 Lagrange 双线性矩阵，$\boldsymbol{S}_1$ 表示由 $t(f)$ 生成的局部算子的边值矩阵。计算可得

$$\boldsymbol{Q}_1(x)=[i]\text{，则 } \boldsymbol{S}_1=\begin{bmatrix} i & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & i & & & \\ & & & -i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -i \end{bmatrix}_{\delta(v)\times\delta(v)}$$

度量图 G 上由 $t(f)$ 生成的两个个二阶局部微分算子 T_1、T_2 定义如下：

$$\begin{cases} T_1(f)=t(f)=if', \\ \boldsymbol{B}_1\hat{f}=0, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} T_2(f)=t(f)=if', \\ \boldsymbol{B}_2\hat{f}=0, \end{cases} \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{B}_2$ 分别为 $K_1(v)\times 2\delta(v)$ 和 $K_2(v)\times 2\delta(v)$ 矩阵。

微分算式的幂为

$$t^2(f)=t(t(f))=-f''.$$

计算可得

$$\boldsymbol{Q}_2(x)=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

向量 $[f(x),f'(x)]^{\top}$ 与 $[if'(x)]^{\top}$ 关系如下，

$$[if'(x)]=[0 \quad i]\begin{bmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{bmatrix},$$

后文中 $\boldsymbol{H}(x)=[\boldsymbol{H}_1(x) \quad \boldsymbol{H}_2(x)]=\begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}$ 表示过渡矩阵，其中

$$\boldsymbol{H}_1(x)=[0]\text{，}\boldsymbol{H}_2(x)=[i].$$

引理 2 经计算，有如下关系，

$$i*(-1)=-i\text{，}1*(-i)=-i\text{，}0=-1*0+0*(-1).$$

在度量图 G 上的顶点 v 有

$$\begin{bmatrix} if'(\alpha_1) \\ if'(\alpha_2) \\ \vdots \\ if'(\alpha_{\delta(v)}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}(\alpha_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boldsymbol{H}(\alpha_{\delta(v)-s}) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boldsymbol{H}(\alpha_{\delta(v)}) \end{bmatrix}_{\delta(v)\times 2\delta(v)}\begin{bmatrix} f(\alpha_1) \\ f'(\alpha_1) \\ f(\alpha_2) \\ f'(\alpha_2) \\ \vdots \\ f(\alpha_{\delta(v)}) \\ f'(\alpha_{\delta(v)}) \end{bmatrix}$$

定理 3 度量图上两个局部微分算子的积算子还是局部微分算子。

积算子 T 定义如下：

$$\begin{cases} T_1(f)=t^2(f)=-f'', \\ \boldsymbol{B}_1\left(f(\alpha_1),f(\alpha_2),\cdots,f\left(\alpha_{\delta(v)}\right)\right)^{\top}=0, \\ \boldsymbol{B}_2\left(if'(\alpha_1),if'(\alpha_2),\cdots,if'\left(\alpha_{\delta(v)}\right)\right)^{\top}=0, \end{cases} \tag{9}$$

若积算子等价于

$$\begin{cases} T(f)=t^2(f)=-f'', \\ \boldsymbol{B}\left(f(\alpha_1),f'(\alpha_1),f(\alpha_2),f'(\alpha_2),\cdots,f\left(\alpha_{\delta(v)}\right),f'\left(\alpha_{\delta(v)}\right)\right)^{\top}=0, \end{cases} \tag{10}$$

则

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_3 & 0 & \boldsymbol{H}_4 & \cdots & \boldsymbol{H}_{\delta(v)+2} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B}_2\widetilde{\boldsymbol{H}_2(\alpha_1)} & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{B}_2\widetilde{\boldsymbol{H}_2\left(\alpha_{\delta(v)}\right)} \end{bmatrix}_{(K_1(v)+K_2(v))\times 2\delta(v)}$$

$\boldsymbol{B}_1$ 是 $(K_1(v)+K_2(v))\times 2\delta(v)$ 矩阵，其中 $\boldsymbol{H}_3,\boldsymbol{H}_4,\cdots,\boldsymbol{H}_{\delta(v)+2}$ 都是 $K_1(v)\times 1$ 矩阵，并且 $\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_3 & \boldsymbol{H}_4 & \cdots & \boldsymbol{H}_{\delta(v)+2}\end{bmatrix}$。$\widetilde{\boldsymbol{H}_2(\alpha_j)}$ 表示 $\delta(v)\times 1$ 矩阵。该矩阵中的第 j 行元素为 i，其余元素为零，$j=1,2,\cdots,\delta(v)$。矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的共轭转置为

$$\boldsymbol{B}^*=\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_3^* & 0 \\ 0 & \widetilde{\boldsymbol{H}_2^*(\alpha_1)}\boldsymbol{B}_2^* \\ \boldsymbol{H}_4^* & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{H}_{\delta(v)+2}^* & 0 \\ 0 & \widetilde{\boldsymbol{H}_2^*\left(\alpha_{\delta(v)}\right)}\boldsymbol{B}_2^* \end{bmatrix}_{2\delta(v)\times(K_1(v)+K_2(v))}$$

根据引理在顶点 v 有

$$[f,g]_v(x)=\hat{f}^{\top}\boldsymbol{S}_2\hat{g},$$

积算子在顶点 v 处的边值矩阵 $\boldsymbol{S}_2$ 为

$$\boldsymbol{S}_2=\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_2(\alpha_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boldsymbol{Q}_2(\alpha_s) & & & \\ & & & -\boldsymbol{Q}_2(\alpha_{s+1}) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\boldsymbol{Q}_2\left(\alpha_{\delta(v)}\right) \end{bmatrix}_{2\delta(v)\times 2\delta(v)}$$

定理 3 积算子 $T=T_2T_1$ 为自伴算子的充要条件为

$$\boldsymbol{B}_1\left(\boldsymbol{S}_2^*\right)^{-1}\boldsymbol{B}_2^*=0，\ \boldsymbol{B}_2\left(\boldsymbol{S}_2^*\right)^{-1}\boldsymbol{B}_1^*=0 \text{ 且 } K_1(v)+K_2(v)=\delta(v).$$

证积算子 $T_1=T_2T_1$ 为(10)的形式，根据定理 2，要证明积算子为自伴的，等价于证明 $\boldsymbol{B}_1$ 的秩为 $2\delta(v)$ 且 $\boldsymbol{B}_1\left(\boldsymbol{S}_2^*\right)^{-1}\boldsymbol{B}_1^*=0$。$\boldsymbol{B}_1$ 的秩为 $K_1(v)+K_2(v)=\delta(v)$，由上面求得的矩阵 $\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_1^*$ 和 $\boldsymbol{S}_2^*$，并运用引理 2 得

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{B}_1\left(\boldsymbol{S}_2^*\right)^{-1}\boldsymbol{B}_1^* \\
&=\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_3 & 0 & \boldsymbol{H}_4 & \cdots & \boldsymbol{H}_{\delta(v)+2} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B}_2\widetilde{\boldsymbol{H}_2(\alpha_1)} & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{B}_2\widetilde{\boldsymbol{H}_2\left(\alpha_{\delta(v)}\right)} \end{bmatrix} \\
&\cdot\begin{bmatrix} \left(\boldsymbol{Q}_2^*\right)^{-1}(\alpha_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \left(\boldsymbol{Q}_2^*\right)^{-1}(\alpha_s) & & & \\ & & & \left(-\boldsymbol{Q}_2^*\right)^{-1}(\alpha_{s+1}) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \left(-\boldsymbol{Q}_2^*\right)^{-1}\left(\alpha_{\delta(v)}\right) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_3^* & 0 \\ 0 & \widetilde{\boldsymbol{H}_2^*(\alpha_1)}\boldsymbol{B}_2^* \\ \boldsymbol{H}_4^* & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{H}_{\delta(v)+2}^* & 0 \\ 0 & \widetilde{\boldsymbol{H}_2^*\left(\alpha_{\delta(v)}\right)}\boldsymbol{B}_2^* \end{bmatrix} \\
&=\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{B}_1\left(\boldsymbol{S}_1^*\right)^{-1}\boldsymbol{B}_2^* \\ \boldsymbol{B}_2\left(\boldsymbol{S}_1^*\right)^{-1}\boldsymbol{B}_1^* & 0 \end{bmatrix}_{(K_1(v)+K_2(v))\times(K_1(v)+K_2(v))}
\end{aligned}
$$

由此可得 $\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{S}_2^*\right)^{-1}\boldsymbol{B}^*=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{B}_1\left(\boldsymbol{S}_1^*\right)^{-1}\boldsymbol{B}_2^*=0$，$\boldsymbol{B}_2\left(\boldsymbol{S}_1^*\right)^{-1}\boldsymbol{B}_1^*=0$，证毕。

参考文献

[1] 曹之江. 常微分算子[M]. 上海: 上海科技出版社, 1987.

[2] Carlson, R. (1998) Adjoint and Self-Adjoint Differential Operators on Graphs. *Electronic Journal of Differential Equations*, **1998**, 1-10.

[3] Sun, J. and An, J.Y. (1998) On Self-Adjointness of the Product of Two N-Order Differential Operators on [a,b]. *Annals of Differential Equations*, **18**, 48-55.

[4] 晴晴, 桂霞, 欢欢. 高阶微分算子积的自伴性[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2012, 41(3): 227-230.

[5] 郑建平. 两个奇数阶微分算子乘积的自共轭性[D]: [硕士学位论文]. 呼和浩特: 内蒙古大学, 2002.

[6] 葛素琴, 王万义, 索建青. 两个四阶奇异微分算子积的自伴性[J]. 应用数学, 2014, 27(4): 865-873.

[7] Kuchment, P. (2004) Quantum Graphs: I. Some Basic Structures. *Waves Random Media*, **14**, S107-S128. https://doi.org/10.1088/0959-7174/14/1/014

[8] 赵佳. 无穷度量图上 Sturm-Liouville 算子的谱性质[D]: [博士学位论文]. 天津: 天津大学, 2016.

[9] Zhao, J. and Shi, G.L. (2015) Structures on Self-Adjoint Vertex Conditions of Local Sturm-Liouville Operators on Graphs. *Boundary Value Problems*, **2015**, Article Number: 162. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0422-5