Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(4), 963-973**
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.104105

Hans汉斯

概率框架下对角算子的熵数

孙 璐，陈 锦

西华大学，四川 成都
Email: 798207937@qq.com

收稿日期：2021年3月15日；录用日期：2021年4月3日；发布日期：2021年4月20日

摘 要

本文主要讨论了有限维对角算子$\varepsilon_{n,\delta}\left(I_m\right):=\varepsilon_{n,\delta}\left(D_m:\mathbb{R}^m\to l_q^m,\gamma_m\right)$（$1\le q\le 2$，$\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，$n\in\mathbb{N}$）和无限维对角算子$\varepsilon_{n,\delta}\left(D:l_2\to l_q,\mu\right)\asymp n^{-\left(\alpha+\frac{\rho}{2}-\frac{1}{q}\right)}\sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}$（$1\le q\le 2$，$D=\left(\sigma_k\right)$，$\sigma_k\asymp\frac{1}{k^\alpha}$，$\left(\alpha>\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)$，$n\in\mathbb{N}$，$\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$）分别在概率框架下的熵数，并估计了其渐近阶。

关键词

有限维对角算子，无限维对角算子，概率框架，熵数

Entropy Number of Diagonal Operators under Probabilistic Framework

Lu Sun, Jin Chen

Xihua University, Chengdu Sichuan
Email: 798207937@qq.com

Received: Mar. 15th, 2021; accepted: Apr. 3rd, 2021; published: Apr. 20th, 2021

Abstract

In this paper, we mainly talked about the entropy numbers of the finite dimensional diagonal operators $\varepsilon_{n,\delta}\left(I_m\right):=\varepsilon_{n,\delta}\left(D_m:\mathbb{R}^m\to l_q^m,\gamma_m\right)$ which satisfied ($1\le q\le 2$, $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$, $n\in\mathbb{N}$), and

文章引用: 孙璐, 陈锦. 概率框架下对角算子的熵数[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 963-973.
DOI: 10.12677/aam.2021.104105

infinite dimensional diagonal operators $\varepsilon_{n,\delta}\left(D:l_2 \to l_q,\mu\right) \succ\prec n^{-\left(\alpha+\frac{\rho}{2}-\frac{1}{q}\right)}\sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}$ which satisfied ($1\le q\le 2$, $D=\left(\sigma_k\right)$, and $\sigma_k \succ\prec \frac{1}{k^{\alpha}},\left(\alpha>\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)$, $n\in\mathbb{N}$, $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$) and estimated its asymptotic order.

Keywords

The Finite Dimensional Diagonal Operators, Infinite Dimensional Diagonal Operators, Probability Setting, Entropy Numbers

1. 引言及主要结果

熵数是 Kolmogorov 在 20 世纪 30 年代提出的一个非常重要的几何概念，它刻画的是有限个元素构成的集合对集合 K 的逼近程度[1]-[7]。函数空间的熵数一经提出，就得到了国内外学者们的广泛关注，Pietsch [8]的专著《Operator Ideals》一书中就出现了熵数理论，书中重点描述了熵数的基本性质，同时刻画了有限维恒等算子的熵数。熵数的基本性质也在 Carl 和 Stephani [9]、Edmunds 和 Triebel [10]以及 Lorentz [11]等人的专著中有非常详细的阐述。1998 年，Belinsky [12]就具有混合偏导数的函数类的熵数问题做了深入研究。Dinh Dung [13]研究了具有共同光滑函数类的熵数。

接着，对角算子的熵数研究就紧锣密鼓的开始了，Schütt [14]研究了有限维恒等算子的熵数，并得到了精确渐近阶，它推广了 B. Carl [15]的结果。2005 年，Thomas Kühn [10] [16] [17]讨论了满足一定衰减条件的无穷维对角算子的熵数。2011 年，韩永杰[18]讨论了有限维恒等算子在概率框架下的熵数，得到了其渐近阶。2018 年，王桐心[19]讨论了无穷维恒等算子在最坏框架下和概率框架下的熵数，并得到了其渐进阶。2019 年陈锦[20]讨论了有限维对角算子和无限维对角算子在最坏框架下的熵数。在以上研究成果的基础上，本文讨论有限维对角算子和无限维对角算子在概率框架下的熵数，并估计其渐近阶。

首先，给出本文需要用到的符号和定义。

假设$\left(X,\|\cdot\|\right)$为一个赋范线性空间，$\varnothing\ne W\subset X$，其中 W 包含一个由 W 中开集生成的 Borel 域，在 B 上赋予一个概率测度 μ，那么：μ 是定义在 Borel 域上的非负的、σ-可加的函数，且 $\mu(W)=1$。

定义 1.1 设 $\delta\in\left(0,1\right]$，$n\in\mathbb{N}$。则 W 关于测度 μ 在 X 中的$\left(n,\delta\right)$熵数定义为

$$\varepsilon_{n,\delta}\left(W,\mu,X\right)=\inf_{G}\varepsilon_n\left(W\setminus G,X\right)$$

也可以称为 W 在概率框架下的熵数，其中 G 跑遍 B 中测度不超过 δ 的 Borel 集。

定义 1.2 设$\left(X,\|\cdot\|_X\right)$是一个赋范线性空间，同时$\left(Y,\|\cdot\|_Y\right)$也是一个赋范线性空间，且 T 为 X 到 Y 的有界线性算子，$\delta\in\left(0,1\right]$，$n\in\mathbb{N}$。$B$ 为 X 中开集生成的 Borel 域，μ 为 B 上的概率测度，那么称

$$\varepsilon_{n,\delta}\left(T:X\to Y,\mu\right)=\inf_{G\in B}\varepsilon_n\left(T\left(X\setminus G\right),Y\right)$$

为算子 T 在概率框架下的熵数，其中 G 跑遍 B 中测度不超过 δ 的集合。

定义 1.3 我们在 $\mathbb{R}^m$ 上赋予一个标准高斯测度 $\gamma=\gamma_m$，其中

$$\gamma_m(G)=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\int_G \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|_{l_2^m}^2\right)\mathrm{d}x.$$

G 是 $\mathbb{R}^m$ 中任意一个 Borel 可测集，易见 $\gamma_m(\mathbb{R}^m)=1$。那么，$\mathbb{R}^m$ 在 l_q^m 空间中关于标准高斯测度 γ_m 的熵数就可表示为：

$$\varepsilon_{n,\delta}\left(\mathbb{R}^m,\gamma_m,l_q^m\right)=\inf_G \varepsilon_n\left(\mathbb{R}^m\setminus G,l_q^m\right),$$

G 是跑遍所有满足 $\gamma_m(G)\le\delta$ 的 Borel 子集。

定义 1.4 在 Hilbert 空间 l_2 上赋予高斯测度 μ，期望为零，协方差算子 C_μ 的特征向量 $e_n\left(n\in\overset{0}{\mathbb{N}}=\mathbb{N}-\{0\}\right)$ 对应的特征值为 $\lambda_n=n^{-\rho}\quad(\rho>1)$，即

$$C_\mu e_n=\lambda_n e_n, n\in\overset{0}{\mathbb{N}}$$

令 $y_1,\cdots,y_n$ 为 l_2 中任一正交系，$\xi_j=\langle C_\mu y_j,y_j\rangle$，$j=1,\cdots,n$，$B$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中任一 Borel 集，则 l_2 中柱集

$$G=\left\{x\in l_2 \middle| \left(\langle x,y_1\rangle,\cdots,\langle x,y_n\rangle\right)\in B\right\}$$

的测度为

$$\mu(G)=\prod_{j=1}^{n}\left(2\pi\xi_j\right)^{-\frac{1}{2}}\int_B \exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\frac{|\mu_j|^2}{2\xi_j}\right)\mathrm{d}\mu_1\cdots\mathrm{d}\mu_n.$$

设 D 为 l_2 到 $l_{q_0}(1\le q\le\infty)$ 的对角算子。本节主要讨论 D 在概率框架下的熵数，首先介绍一些符号。对任意的 $n\in\mathbb{N}$，记

$$S_k=\left\{n\in\overset{0}{\mathbb{N}} \middle| 2^{k-1}\le n<2^k\right\}.$$

则易见 $m_k=|S_k|=2^{k-1}$，且 $S_k\cap S_{k'}=\varnothing(k\ne k')$，$\overset{0}{\mathbb{N}}=\sum_{k\in\overset{0}{\mathbb{N}}}S_k$，对任意的 $n\in\overset{0}{\mathbb{N}}$，记

$$F_k=span\left\{e_n \middle| n\in S_k\right\}.$$

则易见 F_k 为 $l_q(1\le q\le\infty)$ 的 m_k 维子空间，同时，令

$$I_k:F_k\to\mathbb{R}^{m_k}$$

$$x=\sum_{n\in S_k}x_n e_n\mapsto I_k x=\sum_{j=1}^{m_k}x_{2^{k-1}+j-1}e'_j,$$

则 I_k 为 F_k 到 $\mathbb{R}^{m_k}$ 上的线性同构，且

$$\|x\|_{l_q}=\|I_k x\|_{l_q^{m_k}}=\left\|\left\{\left\langle x,e_{2^{k-1}+j-1}\right\rangle\right\}_{j=1}^{m_k}\right\|_{l_q^{m_k}}\ (1\le p\le\infty).$$

对于 $n\in S_k$，记

$$\xi_n = \left\langle C_\mu e_n, e_n \right\rangle = n^{-\rho},$$

从而，

$$\frac{1}{2^{k\rho}} < \xi_n \le \frac{2^\rho}{2^{k\rho}}.$$

记 $\xi_k' = \frac{1}{2^{k\rho}}$， $\xi_k'' = \frac{2^\rho}{2^{k\rho}}$， $\overline{\xi}_k = \left(\xi_{2^{k-1}}, \cdots, \xi_{2^k-1}\right)$。

为了以后叙述方便，给出如下记号。

若 $x = (x_1, \cdots, x_m), y = (y_1, \cdots, y_m), \beta \in \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}^m$， $1 \le q \le \infty$， 记

$$xy = (x_1 y_1, \cdots, x_m y_m), x^\beta = \left(x_1^\beta, \cdots, x_m^\beta\right), e\left(x, M, l_q^m\right) = \inf_{y \in M} \|x - y\|_{l_q^m}.$$

2. 主要结果的证明

首先介绍有限维对角算子在概率框架下的熵数。

韩永杰[18]首次提出并给出了有限维恒等算子在概率框架下的熵数，并得到了其渐近阶。

引理 2.1 [18]设$1 \le q \le 2$， $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$， 则

$$\varepsilon_{n,\delta}(I_m) := \varepsilon_{n,\delta}\left(I_m : \mathbb{R}^m \to l_q^m, \gamma_m\right) = \varepsilon_{n,\delta}\left(\mathbb{R}^m, l_q^m, \gamma_m\right) \succ\prec 2^{-\frac{n}{m}} m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \sqrt{m + \ln \frac{1}{\delta}}.$$

其中， I_m 为 $\mathbb{R}^m$ 到 l_q^m 上的恒等算子。

引理 2.2 [20]设$1 \le q < p \le \infty$， D_m 为 l_p^m 到 l_q^m 上的对角算子， $n \in \mathbb{N}$， 则

$$\sup_{1 \le k \le m} 2^{-\frac{n}{k}} (\sigma_1 \cdots \sigma_k)^{\frac{1}{k}} k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \ll \varepsilon_n(D_m) \ll \sup_{1 \le k \le m} 2^{-\frac{n}{k}} (\sigma_1 \cdots \sigma_k)^{\frac{1}{k}} m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

定理 2.3 设$1 \le q \le 2$， $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$， $n \in \mathbb{N}$， 则

$$\sup_{1 \le k \le m} 2^{-\frac{n}{k}} (\sigma_1 \cdots \sigma_k)^{\frac{1}{k}} \cdot k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \sqrt{k + \ln \frac{1}{\delta}} \ll \varepsilon_{n,\delta}\left(D_m : \mathbb{R}^m \to l_q^m, \gamma_m\right) \ll \sup_{1 \le k \le m} 2^{-\frac{n}{k}} (\sigma_1 \cdots \sigma_k)^{\frac{1}{k}} \cdot m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \sqrt{m + \ln \frac{1}{\delta}}.$$

证明：估计定理 2.3 的上界：

由文献[21]可知，一定存在绝对正常数C_0，使得

$$\gamma_m\left(x \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \|x\|_{l_2^m} > C_0 \sqrt{m + \ln \frac{1}{\delta}}\right) \le \delta.$$

由引理 2.2，有

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n,\delta}\left(D_m : \mathbb{R}^m \to l_q^m, \gamma_m\right) &\le \varepsilon_n\left(D_m\left(C_0 \sqrt{m + \ln \frac{1}{\delta}}\right) B_2^m, l_q^m\right) \\ &= C_0 \sqrt{m + \ln \frac{1}{\delta}} \varepsilon_n\left(D_m\left(B_2^m\right), l_q^m\right) \\ &\ll \sup_{1 \le k \le m} 2^{-\frac{n}{k}} (\sigma_1 \cdots \sigma_k)^{\frac{1}{k}} \cdot m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \sqrt{m + \ln \frac{1}{\delta}}. \end{aligned}$$

估计定理 2.1 的下界：

令$1\le k\le m$，

$$I_k:l_2^k\to l_2^m$$
$$\left(x_1,\cdots,x_k\right)\mapsto\left(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0\right),$$
$$P_k:l_q^m\to l_q^k$$
$$\left(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_m\right)\mapsto\left(x_1,\cdots,x_k\right),$$

$D_k:l_2^k\to l_q^k$，则$D_k=P_kD_mI_k$。

下证：$\varepsilon_{n,\delta}\left(D_k:\mathbb{R}^k\to l_q^k,\gamma_k\right)\le\varepsilon_{n,\delta}\left(D_m:\mathbb{R}^m\to l_q^m,\gamma_m\right)$。

事实上，存在$Q_m\subset\mathbb{R}^m$，且$\gamma_m\left(Q_m\right)\ge1-\delta$，使得

$$\varepsilon_{n,\delta}\left(D_m:\mathbb{R}^m\to l_q^m,\gamma_m\right)=\varepsilon_n\left(D_m\left(Q_m\right),l_q^m\right).$$

从而存在$y_1,\cdots,y_l\left(l\le2^n\right)$，使得

$$D_m\left(Q_m\right)\subset\bigcup_{j=1}^{l}\left\{y_j+\varepsilon_{n,\delta}B_q^m\right\}.$$

令$Q_k=P_kQ_m$，则$\gamma_k\left(Q_k\right)\ge1-\delta$。若不然，$\gamma_k\left(Q_k\right)<1-\delta$，令

$$F=\left\{\left(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1},\cdots,x_m\right)\middle|\left(x_1,\cdots,x_k\right)\in Q_k,-\infty<x_j<\infty,j=k+1,\cdots,m\right\},$$

则$\gamma_m\left(F\right)=\gamma_k\left(Q_k\right)<1-\delta$，而$Q_m\subset F$，矛盾。

因此，

$$\varepsilon_{n,\delta}\left(D_k:\mathbb{R}^k\to l_q^k,\gamma_k\right)\le\varepsilon_{n,\delta}\left(D_k\left(Q_k\right),l_q^k,\gamma_k\right).$$

易见，$D_k\left(Q_k\right)=P_k\left(D_m\left(Q_m\right)\right)$，所以

$$D_k\left(Q_k\right)\subset\bigcup_{j=1}^{l}\left\{P_ky_j+\varepsilon_{n,\delta}B_q^k\right\}.$$

所以

$$\varepsilon_{n,\delta}\left(D_k:\mathbb{R}^k\to l_q^k,\gamma_k\right)\ll\varepsilon_{n,\delta}\left(D_m:\mathbb{R}^m\to l_q^m,\gamma_m\right).$$

下面估计$\varepsilon_{n,\delta}\left(D_k:\mathbb{R}^k\to l_q^k,\gamma_k\right)$的下界。

设G为$\mathbb{R}^k$中任一Borel集，且$\gamma_k\left(G\right)<\delta$。对$t\ge0$，令$G_t=\left\{x\in\mathbb{R}^k\,\middle|\,\|x\|_{l_2^k}\ge t\right\}$，则存在$t_1\ge\sqrt{k+\ln\frac{1}{\delta}}$，使得$\gamma_k\left(G_{t_1}\right)=\delta$。

令$D=G\cap G_{t_1},D_1=G-D,D_2=G_{t_1}-D$。则

$$\begin{cases}\|x\|_{l_2^k}\le t_1 & x\in D_1\\ \|x\|_{l_2^k}\ge t_1 & x\in D_2\end{cases}$$

且

$$Vol_k\left(\mathbb{R}^k-G\right)\ge Vol_k\left(\mathbb{R}^k-G_{t_1}\right),$$

那么

$$2^{\frac{n}{k}}\varepsilon_n\left(D_k\left(\mathbb{R}^k-G_{t_1}\right),l_q^k\right)\geq\left(\frac{Vol_k\left(D_k\left(\mathbb{R}^k-G_{t_1}\right)\right)}{Vol_k\left(B_q^k\right)}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\geq\left(\sigma_1\cdots\sigma_k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\frac{Vol_k\left(\left(\mathbb{R}^k-G_{t_1}\right)\right)}{Vol_k\left(B_q^k\right)}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\geq\left(\sigma_1\cdots\sigma_k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\frac{t_1^k Vol_k\left(B_2^k\right)}{Vol_k\left(B_q^k\right)}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\geq\left(\sigma_1\cdots\sigma_k\right)^{\frac{1}{k}}k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\sqrt{k+\ln\frac{1}{\delta}}.$$

即

$$\varepsilon_n\left(D_k\left(\mathbb{R}^k-G\right),l_q^k\right)\geq 2^{-\frac{n}{k}}\left(\sigma_1\cdots\sigma_k\right)^{\frac{1}{k}}k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\sqrt{k+\ln\frac{1}{\delta}},$$

从而

$$\varepsilon_{n,\delta}\left(D_k:\mathbb{R}^k\to l_q^k,\gamma_k\right)\gg 2^{-\frac{n}{k}}\left(\sigma_1\cdots\sigma_k\right)^{\frac{1}{k}}k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\sqrt{k+\ln\frac{1}{\delta}},$$

故

$$\varepsilon_{n,\delta}\left(D_m:\mathbb{R}^m\to l_q^m,\gamma_m\right)\gg\sup_{1\leq k\leq m}2^{-\frac{n}{k}}\left(\sigma_1\cdots\sigma_k\right)^{\frac{1}{k}}k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\sqrt{k+\ln\frac{1}{\delta}}.$$

综上可知，定理 2.1 得证。

其次，介绍无穷维对角算子在概率框架下的熵数。

主要估计对角线元素满足 $\sigma_k=\frac{1}{k^\alpha}$ 的无穷维对角算子在概率框架下的熵数。首先，介绍一些符号和定义。

下面建立估计对角算子在概率框架下熵数上界的离散化定理。

定理 2.4 设 D 为 l_2 到 $l_q\left(1\leq q<\infty\right)$ 的对角算子，且对角线上元素满足

$$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_k\geq\cdots>0,n\in\mathbb{N},\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right],n\in\overset{0}{\mathbb{N}}$$

$\{n_k\}$ 为非负整数列，$\{\delta_k\}$ 为非负数列，且满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}n_k\leq n,\quad\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\leq\delta.$$

则

$$\varepsilon_{n,\delta}\left(D\right):=\varepsilon_n\left(D:l_2\to l_q,\mu\right)\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-\frac{k}{2}\rho}\varepsilon_{n_k,\delta_k}\left(D_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right).$$

其中

$$D_k:l_2^{m_k}\to l_q^{m_k}$$

$$x=\left(x_1,\cdots,x_{m_k}\right)\mapsto D_k x=\left(\sigma_{2^{k-1}}x_1,\cdots,\sigma_{2^k-1}x_{2^k-1}\right).$$

估计定理 2.4 的上界：

证明：对于任意的 $k\in\overset{0}{\mathbb{N}}$ 由 $\varepsilon_{n_k,\delta_k}\left(D_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)$ 的定义知，存在 $M_k\subset l_q^{m_k}$，使得 $|M_k|\le 2^{n_k}$，且

$$\gamma_{m_k}\left(\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|e\left(D_k y,M_k,l_q^{m_k}\right)>\varepsilon_{n_k,\delta_k}\right.\right\}\right)\le\delta_k.$$

其中 $\varepsilon_{n_k,\delta_k}:=\varepsilon_{n_k,\delta_k}\left(D_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)$。

令

$$D^k:l_2\to l_q$$

$$x=(x_n)\mapsto D^k x=\left(0,\cdots,0,\cdots,\sigma_{2^{k-1}}x_{2^{k-1}},\cdots,\sigma_{2^k-1}x_{2^k-1},0,\cdots\right),$$

对 $x\in l_2$，则 $D^k x\in F_k$。易见

$$e\left(D^k x,I_k^{-1}M_k,l_q\right)=e\left(\left\{\left\langle D^k x,e_{2^{k-1}+j-1}\right\rangle\right\}_{j=1}^{m_k},M_k,l_q^{m_k}\right).$$

令

$$G_k=\left\{x\in l_2\left|e\left(D^k x,I_k^{-1}M_k,l_q\right)>\xi_k''^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{n_k,\delta_k}\right.\right\}.$$

则

$$\begin{aligned}\mu(G_k)&=\mu\left(\left\{x\in l_2\left|e\left(\left\{\left\langle D^k x,e_{2^{k-1}+j-1}\right\rangle\right\}_{j=1}^{m_k},M_k,l_q^{m_k}\right)\ge\xi_k''^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{n_k,\delta_k}\right.\right\}\right)\\&=\gamma_{m_k}\left(\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|e\left(e(D_k y)\xi_k^{\frac{1}{2}},M_k\xi^{\frac{1}{2}},l_q^{m_k}\right)>\xi_k''^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{n_k,\delta_k}\right.\right\}\right)\\&\le\gamma_{m_k}\left(\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|\xi_k''^{\frac{1}{2}}e\left(D_k y,M_k,l_q^{m_k}\right)>\xi_k''^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{n_k,\delta_k}\right.\right\}\right)\\&=\gamma_{m_k}\left(\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|e\left(D_k y,M_k,l_q^{m_k}\right)>\varepsilon_{n_k,\delta_k}\right.\right\}\right)\\&\le\delta_k.\end{aligned}$$

令 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k, M=\sum I_k^{-1}M_k$。

则

$$\mu(G)\le\sum\mu(G_n)\le\sum\delta_k\le\delta,$$

$$|M|\le 2^{\sum_{n=1}^{\infty}n_k}\le 2^n.$$

因此

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n,\delta}\left(D:l_2\to l_q,\mu\right)&\ll\sup_{x\in l_2\setminus G}e\left(Dx,M,l_q\right)\\&\ll\sup_{x\in l_2\setminus G}\sum e\left(D_k x,I_k^{-1}M_k,l_q\right)\\&\ll\sum_k 2^{-\frac{k}{2}\rho}\varepsilon_{n_k,\delta_k}\left(D_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right).\end{aligned}$$

现在建立估计无穷维对角算子在概率框架下熵数下界的离散化定理。

定理 2.5 设 D 满足引理 1.1 的条件，$n\in\mathbb{N}$，记 $k\succ\prec\log n$，且 $m_k=2^{k+1}$，则

$$\varepsilon_{n,\delta}\left(D:l_2\to l_q,\mu\right)\gg 2^{-\frac{k}{2}\rho}\varepsilon_{n,\delta}\left(D_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right),$$

其中，

$$D_k:l_2^{m_k}\to l_q^{m_k}$$

$$x=\left(x_1,\cdots,x_{m_k}\right)\mapsto D_k x=\left(\sigma_{2^{k-1}}x_1,\cdots,\sigma_{2^k-1}x_{2^k-1}\right).$$

证明： 令 $S=\left\{j\left|2^{k-1}\le j<2^k-1\right.\right\}$，则 $|S|=2^{k-1}$，$F_s=span\left\{e_j\left|j\in s\right.\right\}$，则 $\dim F_s=2^{k-1}$，

对 $\forall j\in S$，$\xi_j=\left\langle C_\mu e_j,e_j\right\rangle=j^{-\rho}$，则 $\frac{1}{2^{\rho k}2^{\rho}}<\xi_j\le\frac{2^{\rho}}{2^{\rho k}}$。令

$$\xi_k'=\frac{1}{2^{\rho k}},\xi_k''=\frac{2^{\rho}}{2^{\rho k}},\overline{\xi}_k=\left(\xi_{2^{k-1}},\cdots,\xi_{2^k-1}\right).$$

令 M_1 为 $l_q\cap F_s$ 中的子集，且 $|M|\le 2^n$，则

$$\mu\left\{x\in l_2\cap F_s\left|e\left(D_k x,M_1,l_q\cap F_s\right)>\varepsilon_{n,\delta}\right.\right\}\le\delta.$$

其中 $\varepsilon_{n,\delta}:=\varepsilon_{n,\delta}\left(D:l_2\to l_q,\mu\right)$。

令

$$I_s:F_s\to\mathbb{R}^{m_k}$$

$$x=\sum_{j\in s}x_j e_j\mapsto I_s x=\sum_{j=1}^{m_k}x_{2^{k-1}+j-1}e_j'.$$

则 I_s 为 F_s 到 $\mathbb{R}^{m_k}$ 线性算子，且

$$\|x\|_{l_q}=\|I_s x\|=\left\|\left\{\left\langle x,e_{2^{k-1}+j-1}\right\rangle\right\}_{j=1}^{m_k}\right\|_{l_q^m}.$$

令

$$G=\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|e\left\{\left(D_k y\right),\left(I_s M_1\right),l_q^{m_k}\right\}>\xi_k'^{-\frac{1}{2}}\varepsilon_{n,\delta}\right.\right\}.$$

则

$$\begin{aligned}\gamma_{m_k}(G)&=\gamma_{m_k}\left(\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|e\left(\left(D_k y\right)\xi_k'^{\frac{1}{2}},\left(I_s M_1\right)\xi_k'^{\frac{1}{2}},l_q^{m_k}\right)>\varepsilon_{n,\delta}\right.\right\}\right)\\&\le\gamma_{m_k}\left(\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|e\left(\left(D_k y\right)\overline{\xi}_k^{\frac{1}{2}},\left(I_s M_1\right)\overline{\xi}_k^{\frac{1}{2}},l_q^{m_k}\right)>\varepsilon_{n,\delta}\right.\right\}\right)\\&=\mu\left(\left\{x\in l_2\cap F_s\left|e\left(\left(Dx,e_j\right)_{j\in s},I_s M_1,l_q^{m_k}\right)>\varepsilon_{n,\delta}\right.\right\}\right)\\&\le\mu\left(\left\{x\in l_2\cap F_s\left|e\left(Dx,M_1,l_q\right)>\varepsilon_{n,\delta}\right.\right\}\right)<\delta.\end{aligned}$$

所以

$$\varepsilon_{n,\delta}\left(D_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)\le e\left(D_k\left(\mathbb{R}^{m_k}\setminus G\right),I_sM_1,l_q^{m_k}\right)$$
$$=\sup_{y\in\mathbb{R}^{m_k}\setminus G} e\left(D_ky,I_sM_1,l_q^{m_k}\right)$$
$$\ll 2^{\frac{\rho}{2}k}\varepsilon_{n,\delta}.$$

即

$$\varepsilon_{n,\delta}(D:l_2\to l_q,\mu)\gg 2^{-\frac{\rho}{2}k}\varepsilon_{n,\delta}\left(D_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right).$$

定理 2.6 设$1\le q\le 2$，$D=(\sigma_k)$为l_2到l_q上的对角算子，且$\sigma_k\succ\prec\frac{1}{k^\alpha},\left(\alpha>\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right),n\in\mathbb{N},\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，则

$$\varepsilon_{n,\delta}\left(D:l_2\to l_q,\mu\right)\succ\prec n^{-\left(\alpha+\frac{\rho}{2}-\frac{1}{q}\right)}\sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}.$$

证明：估计定理 2.6 上界。

对$\forall k\in\mathbb{N}$，令

$$n_k=\begin{cases}2^k2^{(1-\beta)(k'-k)},k\le k'\\2^k2^{(1+\beta)(k'-k)},k>k'\end{cases},\delta_k=\frac{\delta\cdot n_k}{n},$$

其中$k'\succ\prec\log n,0<\beta<1$。

则$\sum n_k\le n,\sum\delta_k\le\delta$，且由引理 2.1 及定理 2.5，得

$$\varepsilon_{n,\delta}\left(D:l_2\to l_q,\mu\right)\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-\frac{\rho k}{2}}\varepsilon_{n_k,\delta_k}\left(D_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)$$
$$=\sum_{k\le k'}2^{-\frac{\rho k}{2}}\varepsilon_{n_k,\delta_k}\left(D_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)+\sum_{k>k'}2^{-\frac{\rho k}{2}}\varepsilon_{n_k,\delta_k}\left(D_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)$$
$$=I_1+I_2.$$

$$I_1\ll\sum_{k\le k'}2^{-\frac{\rho k}{2}}\sup_{1\le j\le m_k}2^{-\frac{n_k}{j}}\varepsilon_{n_k,\delta_k}\left(\frac{1}{2^{(k-1)\alpha}}\cdots\frac{1}{\left(2^{k-1}+j-1\right)^\alpha}\right)^{\frac{1}{j}}\cdot m_k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\sqrt{m_k+\ln\frac{1}{\delta_k}}$$
$$\ll\sum_{k\le k'}2^{-\frac{\rho k}{2}}2^{-\frac{2^k2^{(1-\beta)(k'-k)}}{2^{k-1}}}\cdot\frac{1}{2^{k\rho}}\cdot2^{\frac{k}{q}}+\sum_{k\le k'}2^{-\frac{\rho k}{2}}2^{-\frac{2^k2^{(1-\beta)(k'-k)}}{2^{k-1}}}\cdot\frac{1}{2^{k\rho}}\cdot2^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)k}\sqrt{\ln\frac{1}{\delta}\frac{2^k}{2^k2^{(1-\beta)(k'-k)}}}$$
$$\ll\sum_{k\le k'}2^{-\left(\frac{\rho}{2}+\alpha-\frac{1}{q}\right)k}2^{-2\cdot2^{(1-\beta)(k'-k)}}+\sum_{k\le k'}2^{-\left(\frac{\rho}{2}+\alpha-\frac{1}{q}+\frac{1}{2}\right)k}\cdot2^{-2\cdot2^{(1-\beta)(k'-k)}}\sqrt{\beta(k'-k)}$$
$$\ll2^{-\left(\frac{\rho}{2}+\alpha-\frac{1}{q}\right)k'}\sum_{0\le\xi\le k'-1}2^{\left(\frac{\rho}{2}-\frac{1}{q}\right)\xi-2^{(1-\beta)\xi}}+2^{-\left(\frac{\rho}{2}+\alpha-\frac{1}{q}+\frac{1}{2}\right)k'}\sum_{0\le\xi\le k'}2^{\left(\frac{\rho}{2}-\frac{1}{q}+\frac{1}{2}\right)\xi-2\cdot2^{(1-\beta)\xi}}\sqrt{\beta\xi}\sqrt{\ln\frac{1}{\delta}}$$
$$\ll2^{-\left(\frac{\rho}{2}+\alpha-\frac{1}{q}\right)k'}+2^{-\left(\frac{\rho}{2}+\alpha-\frac{1}{q}+\frac{1}{2}\right)k'}\sqrt{\ln\frac{1}{\delta}}\ll n^{-\left(\frac{\rho}{2}+\alpha-\frac{1}{q}\right)}\sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}.$$

$$I_2 \ll \sum_{k>k'} 2^{-\frac{\rho k}{2}} \sup_{1\le j\le m_k} 2^{-\frac{n_k}{j}} \left(\frac{1}{2^{(k-1)\alpha}} \cdots \frac{1}{\left(2^{k-1}+j-1\right)^{\alpha}} \right)^{j} \cdot 2^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)k} \sqrt{2^k + \ln \frac{2^{-\beta(k'-k)}}{\delta}}$$

$$\ll 2^{-\left(\frac{\rho}{2}+\alpha-\frac{1}{q}\right)k'} \sum_{\xi>0} 2^{-\left(\frac{\rho}{2}+\alpha-\frac{1}{q}\right)\xi-2\cdot 2^{-(1+\beta)\xi}} + 2^{-\left(\frac{\rho}{2}+\alpha-\frac{1}{q}\right)k'} \sum_{\xi>0} 2^{-\left(\frac{\rho}{2}+\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)\xi-2\cdot 2^{(1-\beta)\xi}} \sqrt{\beta\xi} \sqrt{\ln \frac{1}{\delta}}$$

$$\ll n^{-\left(\frac{\rho}{2}+\alpha-\frac{1}{q}\right)} \sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}.$$

估计定理 2.6 的下界。

$$\varepsilon_{n,\delta} \gg 2^{-\frac{\rho k}{2}} 2^{-\frac{n}{2^{k-1}}} \frac{1}{\left(2^k-1\right)^{\alpha}} \left(2^{k-1}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \sqrt{2^{k-1}+\ln\frac{1}{\delta}}$$

$$\gg 2^{-\left(\frac{\rho}{2}+\alpha-\frac{1}{q}+\frac{1}{2}\right)k} \sqrt{2^k+\ln\frac{1}{\delta}}$$

$$\gg n^{-\left(\frac{\rho}{2}+\alpha-\frac{1}{q}\right)} \sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}.$$

综上所述，定理 2.6 得证。

参考文献

[1] Oloff, R. (1978) Entropieeigenschaften von Diagonaloperatoren. *Mathematische Nachrichten*, **86**, 157-165. https://doi.org/10.1002/mana.19780860115

[2] Tikhominov, V.M. (1976) Some Questions in Approximation Theory. Izdat.Moskov. Gos. Univ., Moscow.

[3] Makavoz, Y.I. (1972) On a Device for Getting Lower Estimates of the Widths of Sets in Banach Spaces. *Mat. Sb.*, **87**, 136-142.

[4] Kashin, B.S. (1977) Widths of Certain Finite-Dimensional Sets and Classes of Smooth Function. *Izv.Akad. Nauk SSSR, Ser.MAT.*, **41**, 33-351.

[5] Babenko, K.I. (1960) On the Approximation of Periodic Functions of Several Variables by Trigonometric Polynomials. *Dokl. Akad. Nauk.SSSR*, **132**, 247-253.

[6] Galeev, E.M. (1985) Kolmogorov Widths of Classes of Periodic Functions of Many Variables αpW~ and αpH~ in the Space qL. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **49**, 916-934.

[7] Temlyakov, V.N. (1986) Approximation of Functions with Bounded Mixed Derivative. *Tr. Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR*, **178**, 1-112.

[8] Pietsch, A. (1978) Operator Ideals. Mathematische Monographien, Vol. 16. VEB Deutscher Verlagder Wissenschaften, Berlin.

[9] Carl, B. and Stephani, I. (1990) Entropy, Compactness and the Approximation of Operators. Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511897467

[10] Edmunds, D.E. and Triebel, H. (1996) Function Spaces, Entropy Numbers, Differential Operator. Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 120, Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511662201

[11] Lorentz, G. (1985) Manfred v. Golitschek, Yuly Makovoz, Constructive Approximation. Springer, Berlin.

[12] Belinsky, E.S. (1998) Estimates of Entropy Numbers and Gaussian Measures for Classes of Functions with Bounded Mixed Derivative. *Journal of Approximation Theory*, **93**, 114-127. https://doi.org/10.1006/jath.1997.3157

[13] Dung, D. (2001) Non-Linear Approximations Using of Finite Cardinality or Finite Pseudo-Dimension. *Journal of Complexity*, **17**, 467-492. https://doi.org/10.1006/jcom.2001.0579

[14] Schütt, C. (1984) Entropy Numbers of Diagonal Operators between Symmetric Banach Spaces. *Journal of Approximation Theory*, **40**, 121-128. https://doi.org/10.1016/0021-9045(84)90021-2

[15] Carl, B. (1980) Entropy Numbers of Diagonal Operators with an Application to Eigenvalue Problems. *Journal of Approximation Theory*, **32**, 135-150. https://doi.org/10.1016/0021-9045(81)90110-6

[16] Kühn, T. (2005) Entropy Numbers of General Diagonal Operators. *Revista Matamatica Complutense*, **18**, 479-491. https://doi.org/10.5209/rev_REMA.2005.v18.n2.16697

[17] Marcus, M.B. (1974) The ε-Entropy of Some Compact Subsets of l^p. *Journal of Approximation Theory*, **10**, 304-312. https://doi.org/10.1016/0021-9045(74)90102-6

[18] 韩永杰. 概率框架和平均框架下的熵数[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2011.

[19] 王桐心. 不同框架下对角算子的熵数[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2018.

[20] Chen, J., Lu, W., Xiao, H., Wang, Y. and Tan, X. (2019) Entropy Number of Diagonal Operator. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **7**, 738-745. https://doi.org/10.4236/jamp.2019.73051

[21] Maivorov, V.E. (1994) Linear Widths of Function Spaces Equipped the Gaussian Measure. *Journal of Approximation Theory*, **77**, 74-88. https://doi.org/10.1006/jath.1994.1035