Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(4), 1359-1379
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.104146

Hans汉斯

半经典次临界增长 Schrödinger-Poisson 方程组变号解的存在性和集中现象

王 星

云南师范大学数学学院，云南 昆明
Email: 1948872435@qq.com

收稿日期：2021年3月27日；录用日期：2021年4月15日；发布日期：2021年4月30日

摘 要

在本文中，研究半经典次临界增长 Schrödinger-Poisson 方程组

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta v + V(x)v + \lambda\psi v = f(v), \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ -\varepsilon^2\Delta\psi = v^2, \quad x \in \mathbb{R}^3;\ v(x) \to 0,\ \psi(x) \to 0,\ \text{当 } |x| \to \infty \text{时}, \end{cases}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是小参数，$\lambda, \mu > 0$ 是参数，$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 是有界位势函数且局部极小点集 M 非空，利用下降流不变集方法和截断技巧证明无穷多变号解的存在性，当 $\varepsilon \to 0$ 时，通过构造惩罚项证明这些解集中在位势函数 V 的局部极小附近。

关键词

半经典 Schrödinger-Poisson 方程组，下降流不变集方法，截断技巧，无穷多变号解，集中现象

Existence and Concentration of Infinitely Many Sign-Changing Solutions of Semiclassical Subcritical Growth Schrödinger-Poisson Systems

Xing Wang

Department of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

文章引用: 王星. 半经典次临界增长 Schrödinger-Poisson 方程组变号解的存在性和集中现象[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 1359-1379. DOI: 10.12677/aam.2021.104146

Email: 1948872435@qq.com

Received: Mar. 27^{th}, 2021; accepted: Apr. 15^{th}, 2021; published: Apr. 30^{th}, 2021

Abstract

In this paper, we study the following semiclassical Schrödinger-Poisson system

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta v + V(x)v + \lambda\psi v = f(v), \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ -\varepsilon^2\Delta\psi = v^2, \quad x \in \mathbb{R}^3;\ v(x) \to 0,\ \psi(x) \to 0,\ \text{as } |x| \to \infty, \end{cases}$$

where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $\lambda > 0$ is a parameter and $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is a bounded potential function, the nonlinearity f is superlinear at the origin and at infinity, and is subcritical growth. We proved the existence of infinitely many sign-changing solutions by the method of invariant sets with descending flow and the truncation technique, and proved that these solutions are located near the local minimum point of the potential function V as $\varepsilon \to 0$ by the penalization method.

Keywords

Semiclassical Schrödinger-Poisson System, Infinitely Many Sign-Changing Solutions, The Method of Invariant Sets with Descending Flow, The Truncation Technique, Infinitely Many Sign-Changing Solutions, Concentration

1. 预备知识

在本文中, 研究半经典次临界增长 Schrödinger-Poisson 方程组:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta v + V(x)v + \lambda\psi v = f(v), \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ -\varepsilon^2\Delta\psi = v^2, \quad x \in \mathbb{R}^3;\ v(x) \to 0,\ \psi(x) \to 0,\ \text{当 } |x| \to \infty \text{ 时}, \end{cases} \tag{1.1}$$

无穷多变号解的存在性和集中现象, 其中 $\varepsilon > 0$ 是一个小参数, $\lambda > 0$. 假设位势函数 V 满足下述条件:

(V_1) $V \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ 且存在 $c_0, c_1 > 0$ 使得

$$c_0 \le V(x) \le c_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

(V_2) 存在一个有界集 $M \subset \mathbb{R}^3$ 使得

$$\langle \nabla V(x), n(x) \rangle > 0, \quad \forall x \in \partial M,$$

其中 $n(x)$ 是 ∂M 在 x 处的外法向. 不失一般性, 我们假定 $0 \in M$. 当 V 满足条件 (V_2) 时, M 内部 V 的临界点集

$$\mathcal{A} = \{x \in \overline{M} | \, \nabla V(x) = 0\}$$

是 M 的非空闭子集. 对于一个集合 $B \subset \mathbb{R}^3$ 和 $\delta > 0$ 我们定义

$$B^\delta = \{x \in \mathbb{R}^3 | \, \operatorname{dist}(x, B) = \inf_{y \in B} |x - y| < \delta\}, \quad B_\delta = \{x \in \mathbb{R}^3 | \, \delta x \in B\}.$$

我们假设非线性项 f 是一个连续函数且满足:

(f_1) $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 0$, $\lim\limits_{|t| \to +\infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty$.

(f_2) 存在 $q > 4$ 使得

$$\frac{1}{q} t f(t) \ge F(t), \ t \in \mathbb{R}^3$$

其中 $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$.

(f_3) 存在 $c > 0$, $r < 6$ 使得

$$|f(t)| \le c(1 + |t|^{r-1}).$$

本文的主要结果如下:

定理1. 假设 $5 < q < 6$ 和 $(V_1) - (V_2)$ 成立. 则对任何正整数 k, 存在 $\varepsilon_k > 0$ 当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_k$ 时, 则问题 (1.1) 至少有 k 对变号解 $\pm v_{j,\varepsilon}, j = 1, 2, \cdots, k$. 此外, 对任何 $\delta > 0$, 存在 $\alpha > 0$, $c = c_k > 0$ 且 $\varepsilon_k(\delta) > 0$ 当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_k(\delta)$ 时, 有

$$|v_{j,\varepsilon}(x)| \le c \exp\left\{ -\frac{\alpha}{\varepsilon} \operatorname{dist}(x, \mathcal{A}^\delta) \right\} \quad \text{对于 } x \in \mathbb{R}^3, \, j = 1, \cdots, k.$$

作变量替换 $x \mapsto \varepsilon x$, 改写方程组 (1.1) 如下:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(\varepsilon x) u + \lambda \varphi u = f(u), & x \in \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \varphi = u^2, \quad x \in \mathbb{R}^3; \ u(x) \to 0, \varphi(x) \to 0 & \text{当 } |x| \to \infty \text{ 时}. \end{cases} \tag{1.2}$$

如果 u 是方程组 (1.2) 的解, 则 $v(x) := u(\frac{x}{\varepsilon}), \psi(x) := \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ 是方程组 (1.1) 的解. 我们只需要研究方

程组 (1.2) 的解. 令 $\varphi=\varphi_u$ 带入到 (1.2) 的第一个方程中, 则得到一个含非局部项的 Schrödinger 方程

$$-\Delta u+V(\varepsilon x)u+\varphi_u u=f(u),\quad x\in\mathbb{R}^3,$$

其相应的能量泛函 J_ε 为

$$J_\varepsilon(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}V(\varepsilon x)u^2dx+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u u^2dx-\int_{\mathbb{R}^3}F(u)dx,\quad u\in H^1(\mathbb{R}^3)\,.$$

我们定义扰动泛函, 首先定义截断函数, 其中 $F(u)=\int_0^u f(t)dt$. 令 $\xi\in C(\mathbb{R},[0,1])$ 是一个偶函数, 使得 $\xi(t)=1$ 当 $|t|\le 1$ 时; $\xi(t)=0$ 当 $|t|\ge 2$ 时; $-2\le\xi'(t)\le 0$ 当 $|t|\ge 0$ 时. 定义

$$b_\varepsilon(x,z)=\xi(\varepsilon z\exp\{\mathrm{dist}(\varepsilon x,M)\}),\ m_\varepsilon(x,z)=\int_0^z b_\varepsilon(x,\tau)d\tau\,;$$

$$b_\varepsilon(z)=b_\varepsilon(0,z)=\xi(\varepsilon z),\ m_\varepsilon(z)=m_\varepsilon(0,z)=\int_0^z b_\varepsilon(\tau)d\tau;$$

且

$$k_\varepsilon(x,z)=\Big(\frac{z}{m_\varepsilon(x,z)}\Big)^\gamma z,\quad K_\varepsilon(x,z)=\int_0^z k_\varepsilon(x,\tau)d\tau\,.$$

令 $\zeta\in C^\infty(\mathbb{R})$, 使得 $\zeta(t)=0$ 当 $t\le 0$ 时; $\zeta(t)=1$ 当 $t\ge 1$ 时, 并且 $0\le\zeta'(t)\le 2$. 定义

$$\chi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-6}\zeta(\mathrm{dist}(x,M_\varepsilon)).$$

扰动泛函 Γ_ε 定义如下

$$\begin{aligned}\Gamma_\varepsilon(u)=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,dx+\sigma\int_{\mathbb{R}^3}K_\varepsilon(x,u)\,dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}E(\varepsilon x)u^2\,dx\\&+\frac{1}{4}\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u u^2\,dx+\frac{1}{2\beta}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)_+^\beta-\int_{\mathbb{R}^3}F(u)\,dx,\end{aligned}$$

对于 $u\in X_\varepsilon=H^1(\mathbb{R}^3)\cap L_\varepsilon^{2+\gamma}(\mathbb{R}^3)$, 其中 $\varepsilon\in(0,1]$, $2<2\beta<r$, $4<2+\gamma<r$, $E(x)=V(x)-\sigma$ 且 $\sigma>0$ 很小, 因此 E 满足假设 (V_1) 和 (V_2)(不同常数 $c_0'=c_0-\sigma>0$). $L_\varepsilon^{2+\gamma}(\mathbb{R}^3)$ 是一个加权空间定义为

$$L_\varepsilon^{2+\gamma}(\mathbb{R}^3)=\Big\{u|\int_{\mathbb{R}^3}\exp\{\gamma\mathrm{dist}(\varepsilon x,M)\}|u|^{2+\gamma}\,dx<+\infty\Big\}$$

赋予范数

$$\|u\|_{L_\varepsilon^{2+\gamma}(\mathbb{R}^3)}=\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\exp\{\gamma\mathrm{dist}(\varepsilon x,M)\}|u|^{2+\gamma}\,dx\Big)^{\frac{1}{2+\gamma}}.$$

当 $1\le p<6$ 时, 则空间 X_ε 紧嵌入 $L^p(\mathbb{R}^3)$. 对 $\forall u,\,\eta\in X_\varepsilon$, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\nabla\eta+E(\varepsilon x)u\eta)\,dx+\sigma\int_{\mathbb{R}^3}k_\varepsilon(x,u)\eta\,dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u\,u\eta\,dx\\&+\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)_+^{\beta-1}\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u\eta\,dx=\int_{\mathbb{R}^3}f(u)\eta\,dx\,.\end{aligned}$$

半经典 Schrödinger-Poisson 方程组在过去的二十年中得到了广泛的研究, 对于这个问题的数学结果以及物理背景, 我们参见文献 [1]及其所含文献. 特别地, 当 $4 < p < 6$, ε, $\lambda > 0$, $\lambda = o(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$ 时, 他们利用对称山路定理证明了变号解的存在性以及集中现象.

本文的难点在于无界区域方程组失去紧性, 为了克服失紧这个困难, 我们利用增加强制项来解决. 本文主要利用扰动方法和分析技巧证明无穷多变号解,并且由文献 [1] [2] [3] [4] [5] 引入惩罚项 $\left(\int_{\mathbb{R}^3} \chi_\varepsilon(x)u^2\,dx - 1\right)_+^\beta$, 得到这些解集中在位势函数 V 的局部极小附近.

2. 辅助结果

下面的引理给出扰动泛函 Γ_ε 中辅助函数的一些初等结果.

引理1. 下列性质成立

(1) $0 \le \frac{zb_\varepsilon(x,z)}{m_\varepsilon(x,z)} \le 1$.

(2) $c_1(1+\varepsilon^\gamma \exp\{\gamma \mathrm{dist}(\varepsilon x, M)\}|z|^\gamma)z \le k_\varepsilon(x,z) \le c_2(1+\varepsilon^\gamma \exp\{\gamma \mathrm{dist}(\varepsilon x, M)\}|z|^\gamma)z$.

(3) $\frac{1}{2+\gamma} zk_\varepsilon(x,z) \le K_\varepsilon(x,z) \le \frac{1}{2} zk_\varepsilon(x,z)$ 对于 $z \in \mathbb{R}$.

(4) $(k_\varepsilon(x,z)-k_\varepsilon(x,w))(z-w) \ge c(1+\varepsilon^\gamma \exp\{\gamma \mathrm{dist}(\varepsilon x, M)\}|z-w|^\gamma)|z-w|^2$ 对于$z, w \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$.

(5) $|(k_\varepsilon(x,z) - k_\varepsilon(x,w))| \le c(1+\varepsilon^\gamma \exp\{\gamma \mathrm{dist}(\varepsilon x, M)\}(|z|^\gamma + |w|^\gamma))|z-w|$.

(6) $\frac{1}{6} zf_\nu(z) \le F_\nu(z) \le \frac{1}{q} zf_\nu(z)$ 对于 $z \in \mathbb{R}$.

证明: 证明比较容易, 这里就忽略.

引理2. 嵌入 $X_\varepsilon = H^1(\mathbb{R}^3) \cap L_\varepsilon^{2+\gamma}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)(1 \le p < 6)$ 是紧的.

证明: 设 $\{u_n\}$ 在 X_ε 中有界, 假设 $u_n \rightharpoonup u$ 在 X_ε 中, $u_n \to u$ 在 $L_{loc}^p(\mathbb{R}^3)(1 \le p < 6)$ 中. 我们首先证明 $u_n \to u$ 在 $L^1(\mathbb{R}^3)$ 中, 对于 $R > 0$, 我们有

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R} |u|\,dx \le &\Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R} \exp\{\gamma \mathrm{dist}(\varepsilon x, M)\}|u|^{2+\gamma}\,dx\Big)^{\frac{1}{2+\gamma}} \\
&\cdot \Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R} \exp\{-\frac{\gamma}{1+\gamma}\mathrm{dist}(\varepsilon x, M)\}|u|^{2+\gamma}\,dx\Big)^{\frac{1+\gamma}{2+\gamma}} \\
\le &\|u\|_{L_\varepsilon^{2+\gamma}(\mathbb{R}^3)} \Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R} \exp\{-\frac{\gamma}{1+\gamma}\mathrm{dist}(\varepsilon x, M)\}|u|^{2+\gamma}\,dx\Big)^{\frac{1+\gamma}{2+\gamma}} = o_R(1)\,.
\end{aligned}
$$

因此当 $n \to \infty$ 时,

$$
\int_{\mathbb{R}^3} |u_n - u|\,dx = \int_{B_R} |u_n - u|\,dx + \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R} |u_n - u|\,dx = o_n(1) + o_R(1) \to 0.
$$

对于 $1 < p < 6$, 我们利用内插不等式, 于是 $u_n \to u$ 在 $L^p(\mathbb{R}^3)(1 < p < 6)$ 中. 因此 $u_n \to u$ 在 $L^p(\mathbb{R}^3)(1 \le p < 6)$ 中.

考虑 Poisson 方程

$$
-\Delta\varphi = u^2, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^3),\ \varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3), \tag{2.1}
$$

该方程的解为

$$\varphi_u(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u^2(y)}{|x-y|}\,dy,$$

函数 φ_u 有下列性质, 参见文献 [6] [7] .

引理3. 对 $\forall u\in H^1(\mathbb{R}^3)$, 我们有

(1) $\varphi_u(x)\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^3$;

(2) $\|\varphi_u\|^2_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)}=\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u u^2\,dx\leq c\|u\|^4_{L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)}\leq c\|u\|^4_{H^1(\mathbb{R}^3)}$;

(3) $\|\varphi_u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\leq c(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|u\|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)})\leq c\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}$;

(4) 如果 $u_n\rightharpoonup u$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中, 则 $\varphi_{u_n}\rightharpoonup\varphi_u$ 在 $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 中.

证明: 结论 (1), (2) 是显然的.

(3) 根据 Hölder 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}\|\varphi_u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}&=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u^2(y)}{|x-y|}\,dy\\&=\frac{1}{4\pi}\int_{|x-y|\geq 1}\frac{u^2(y)}{|x-y|}\,dy+\frac{1}{4\pi}\int_{|x-y|\leq 1}\frac{u^2(y)}{|x-y|}\,dy\\&\leq c\big(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|u\|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)}\big)\leq c\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

(4) 假设 $u_n\rightharpoonup u$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中, 则 φ_{u_n} 在 $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 中是有界的. 假设 $\varphi_{u_n}\rightharpoonup\varphi$ 在 $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 中. 我们有

$$\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\varphi_{u_n}\nabla\eta\,dx=\int_{\mathbb{R}^3}u_n^2\eta\,dx,\quad 对\ \forall\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3),$$

两边取极限, 当 $n\to\infty$ 时, 我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\varphi\nabla\eta\,dx=\int_{\mathbb{R}^3}u^2\eta\,dx,\quad 对\ \forall\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

因此 $\varphi=\varphi_u$, 即 $\varphi_{u_n}\rightharpoonup\varphi_u$ 在 $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 中.

引理4. 设 $\{u_n\}$ 是泛函 Γ_ε 的 (PS) 序列, 则 $\{u_n\}$ 在 X_ε 中有界.

证明: 由

$$\begin{aligned}&\langle D\Gamma_\varepsilon(u),\eta\rangle\\&=\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\nabla\eta\,dx+\sigma\int_{\mathbb{R}^3}k_\varepsilon(x,u)\eta\,dx+\int_{\mathbb{R}^3}E(\varepsilon x)u\eta\,dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u u\eta\,dx\\&\quad+\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)_+^{\beta-1}\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u\eta\,dx-\int_{\mathbb{R}^3}f(u)\eta\,dx,\ 对\ \forall\eta\in X_\varepsilon\,.\end{aligned}$$

根据引理 1 和引理 3, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_\varepsilon(u)-\frac{1}{q}\langle D\Gamma_\varepsilon(u),u\rangle\\
=&(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+E(\varepsilon x)u^2)\,dx+\sigma\int_{\mathbb{R}^3}K_\varepsilon(x,u)dx-\frac{\sigma}{q}\int_{\mathbb{R}^3}k_\varepsilon(x,u)u\,dx\\
&+\frac{1}{2\beta}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)_+^\beta-\frac{1}{q}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)_+^{\beta-1}\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx\\
&+(\frac{1}{4}-\frac{1}{q})\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u u^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\frac{1}{q}uf(u)-F(u)\Big)\,dx\\
\geq& c\Big(\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}+\|u\|^{2+\gamma}_{L^{2+\gamma}_\varepsilon(\mathbb{R}^3)}+\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)_+^\beta+\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u u^2\,dx\Big)-c\,.
\end{aligned}
$$

因此任何 (PS) 序列 $\{u_n\}$ 在 X_ε 中有界.

引理5. 泛函 Γ_ε 在 X_ε 中满足 (PS) 条件.

证明: 设 $\{u_n\}\subset X_\varepsilon$ 是泛函 Γ_ε 的 (PS) 序列. 根据引理 4, $\{u_n\}$ 在 X_ε 中有界. 根据引理 2, 我们假设 $u_n\to u$ 在 $L^p(\mathbb{R}^3)(1\leq p<6)$ 中. 根据引理 1 和引理 4, 我们有

$$
\begin{aligned}
o(1)=&\langle D\Gamma_\varepsilon(u_n)-D\Gamma_\varepsilon(u_m),u_n-u_m\rangle\\
\geq&\int_{\mathbb{R}^3}\big(|\nabla(u_n-u_m)|^2+E(\varepsilon x)(u_n-u_m)^2\big)\,dx\\
&+c\int_{\mathbb{R}^3}\big(1+\varepsilon^\gamma\exp\{\gamma\mathrm{dist}(\varepsilon x,M)\}|u_n-u_m|^\gamma\big)(u_n-u_m)^2\,dx\\
&-c\int_{\mathbb{R}^3}(|u_n|+|u_m|)|u_n-u_m|dx-c\int_{\mathbb{R}^3}(|u_n|^{r-1}+|u_m|^{r-1})|u_n-u_m|\,dx\\
\geq& c\Big(\|u_n-u_m\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}+\|u_n-u_m\|^{2+\gamma}_{L^{2+\gamma}_\varepsilon(\mathbb{R}^3)}\Big)-c\big(\|u_n-u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|u_n-u_m\|_{L^r(\mathbb{R}^3)}\big)\\
=&c\big(\|u_n-u_m\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}+\|u_n-u_m\|^{2+\gamma}_{L^{2+\gamma}_\varepsilon(\mathbb{R}^3)}\big)+o(1).
\end{aligned}
$$

因此 $\{u_n\}$ 在 X_ε 中是一个 Cauchy 列.

3. 泛函 Γ_ε 的临界点

本节, 我们利用下降流不变集方法 [8] 构造泛函 Γ_ε 的临界点序列. 首先我们定义算子 $A:X_\varepsilon\to X_\varepsilon$.

定义1. 给定 $u\in X_\varepsilon$ 定义 $v=Au$ 满足方程

$$
\begin{aligned}
\langle B(v),\eta\rangle:=&\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla v\nabla\eta+E(\varepsilon x)v\eta)dx+\sigma\int_{\mathbb{R}^3}k_\varepsilon(x,v)\eta\,dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u v\eta\,dx\\
&+\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)_+^{\beta-1}\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)v\eta\,dx\\
=&\int_{\mathbb{R}^3}f(u)\eta\,dx,\quad 对\ \forall\eta\in X_\varepsilon\,.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

引理6. 算子 A 有好定义且连续的.

证明: 定义

$$\langle B(v),\eta\rangle=\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla v\nabla\eta+E(\varepsilon x)v\eta)\,dx+\sigma\int_{\mathbb{R}^3}k_\varepsilon(x,v)\eta\,dx$$
$$+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u v\eta\,dx+\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)_+^{\beta-1}\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)v\eta\,dx$$

对于 $\eta\in X_\varepsilon$. 算子 $B:v\in X_\varepsilon\to B(v)\in X_\varepsilon^*$ 是强单调的. 事实上,

$$\begin{aligned}&\langle B(v)-B(\overline{v}),v-\overline{v}\rangle\\ \geq& c\Big(\|v-\overline{v}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}+\|v-\overline{v}\|^{2+\gamma}_{L_\varepsilon^{2+\gamma}(\mathbb{R}^3)}\Big)\,.\end{aligned}\tag{3.2}$$

因此方程 (3.1) 式有唯一解 $v=Au$. 假设 $u,\overline{u}\in X_\varepsilon$, $v=Au$, $\overline{v}=A\overline{u}$. 则

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}\big(|\nabla(v-\overline{v})|^2+E(\varepsilon x)(v-\overline{v})^2\big)\,dx+\sigma\int_{\mathbb{R}^3}\big(k_\varepsilon(x,v)-k_\varepsilon(x,\overline{v})\big)(v-\overline{v})\,dx\\ &+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u(v-\overline{v})^2\,dx+\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)_+^{\beta-1}\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)(v-\overline{v})^2\,dx\\ =&\lambda\int_{\mathbb{R}^3}(\varphi_{\overline{u}}-\varphi_u)\overline{v}(v-\overline{v})\,dx+\Big(\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)\overline{u}^2\,dx-1\Big)_+^{\beta-1}-\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)_+^{\beta-1}\Big)\\ &\cdot\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)\overline{v}(v-\overline{v})\,dx+\int_{\mathbb{R}^3}(f(u)-f(\overline{u}))(v-\overline{v})\,dx\,.\end{aligned}\tag{3.3}$$

估计 (3.3) 式的右边, 设 $u\to\overline{u}$ 在 X_ε 中, 我们有

$$\begin{aligned}\text{RHS}&=o(1)\big(\|v-\overline{v}\|_{L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)}+\|v-\overline{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|v-\overline{v}\|_{L^r(\mathbb{R}^3)}\big)\\ &=o(1)\|v-\overline{v}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\,.\end{aligned}$$

估计 (3.3) 式的左边

$$\text{LHS}\geq\Big(\|v-\overline{v}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}+\|v-\overline{v}\|^{2+\gamma}_{L_\varepsilon^{2+\gamma}(\mathbb{R}^3)}\Big)\,.$$

因此, 当 $u\to\overline{u}$ 在 X_ε 中时, 有 $Au-A\overline{u}=v-\overline{v}\to 0$.

引理7. 存在常数 $d,c,\alpha>0$ 使得

(1) $\langle D\Gamma_\varepsilon(u),u-Au\rangle\geq d\Big(\|u-Au\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}+\|u-Au\|^{2+\gamma}_{L_\varepsilon^{2+\gamma}(\mathbb{R}^3)}\Big)\,.$

(2) $\|D\Gamma_\varepsilon(u)\|\leq c(1+|\Gamma_\varepsilon(u)|+\|u-Au\|^\alpha)\|u-Au\|\,.$

证明: (1) 根据算子 A 的定义, 我们有

$$\begin{aligned}\langle D\Gamma_\varepsilon(u),\eta\rangle =&\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\nabla\eta+E(\varepsilon x)u\eta)dx+\sigma\int_{\mathbb{R}^3}k_\varepsilon(x,u)\eta\,dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u u\eta\,dx\\&+\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)_+^{\beta-1}\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u\eta\,dx-\int_{\mathbb{R}^3}f(u)\eta\,dx\\=&\int_{\mathbb{R}^3}\big(\nabla(u-v)\nabla\eta+E(\varepsilon x)(u-v)\eta\big)dx+\int_{\mathbb{R}^3}\big(k_\varepsilon(x,u)-k_\varepsilon(x,v)\big)\eta\,dx\\&+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u(u-v)\eta\,dx+\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)_+^{\beta-1}\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)(u-v)\eta\,dx\end{aligned}\tag{3.4}$$

对 $\forall\,\eta\in X_\varepsilon$. 因此

$$\langle D\Gamma_\varepsilon(u),u-v\rangle \geq d\Big(\|u-v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}+\|u-v\|^{2+\gamma}_{L_\varepsilon^{2+\gamma}(\mathbb{R}^3)}\Big)\,.$$

(2) 由 (3.4) 式我们有

$$\begin{aligned}\big|\langle D\Gamma_\varepsilon(u),\eta\rangle\big| \leq& c\|u-v\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\|\eta\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}+c\int_{\mathbb{R}^3}\varepsilon^\gamma\exp\{\gamma\mathrm{dist}(\varepsilon x,M)\}(|u|^\gamma+|v|^\gamma)|u-v|\,|\eta|\,dx\\&+c\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u(u-v)\,|\eta|\,dx+\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)_+^{\beta-1}\|u-v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\eta\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\\leq& c\|u-v\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\|\eta\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}+c\big(\|u\|^\gamma_{L_\varepsilon^{2+\gamma}(\mathbb{R}^3)}+\|u-v\|^\gamma_{L_\varepsilon^{2+\gamma}(\mathbb{R}^3)}\big)\|u-v\|_{L_\varepsilon^{2+\gamma}(\mathbb{R}^3)}\\&\cdot\|\eta\|_{L_\varepsilon^{2+\gamma}(\mathbb{R}^3)}+c\|u\|^2_{L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)}\|u-v\|_{L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)}\|\eta\|_{L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)}\\&+\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)_+^{\beta-1}\|u-v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\eta\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,.\end{aligned}$$

在上式我们用了下列估计式,

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u(u-v)\eta\,dx\Big|=&\Big|\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}u^2(y)(u(x)-v(x))\eta(x)\frac{dxdy}{|x-y|}\Big|\\\leq&\, c\|u^2\|_{L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)}\|(u-v)\eta\|_{L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)}\\\leq&\, c\|u\|^2_{L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)}\|u-v\|_{L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)}\|\eta\|_{L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)}\,.\end{aligned}$$

根据引理 4, 我们有

$$\begin{aligned}&\Gamma_\varepsilon(u)-\frac{1}{q}\langle D\Gamma_\varepsilon(u),u\rangle\\\geq& c\Big(\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}+\|u\|^{2+\gamma}_{L_\varepsilon^{2+\gamma}(\mathbb{R}^3)}+\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u u^2\,dx+\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)_+^{\beta}\Big)-c\,.\end{aligned}\tag{3.5}$$

估计 (3.5) 式的左边

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_\varepsilon(u)-\frac{1}{q}\langle D\Gamma_\varepsilon(u),u\rangle\\
\leq&|\Gamma_\varepsilon(u)|+c\big(\|u-v\|^{2+\gamma}_{L^{2+\gamma}_\varepsilon(\mathbb{R}^3)}+\|u-v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}+\|u-v\|^4_{L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)}+\|u-v\|^{2\beta}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\big)\\
&+\mu\big(\|u\|^{2+\gamma}_{L^{2+\gamma}_\varepsilon(\mathbb{R}^3)}+\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}+\|u\|^4_{L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)}+\big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\big)^\beta_+\big)\,.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

注意到 $2+\gamma>4$, $L^{2+\gamma}_\varepsilon(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)$ 并且选取 $\mu>0$ 很小, 有

$$
\begin{aligned}
&\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}+\|u\|^{2+\gamma}_{L^{2+\gamma}_\varepsilon(\mathbb{R}^3)}+\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)^\beta_+\\
\leq&c\big(1+|\Gamma_\varepsilon(u)|+\|u-v\|^{2+\gamma}_{L^{2+\gamma}_\varepsilon(\mathbb{R}^3)}+\|u-v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}+\|u-v\|^4_{L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)}+\|u-v\|^{2\beta}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\big)\,.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

根据 (3.6) 式和 (3.7) 式, 我们得到

$$
\|D\Gamma_\varepsilon(u)\|\leq c\big(1+|\Gamma_\varepsilon(u)|+\|u-v\|^\alpha_{X_\varepsilon}\big)\|u-v\|_{X_\varepsilon}\,,
$$

其中 $\alpha=\max\{2+\gamma,\,2,\,2\beta\}$.

推论1. *给定 b_0, $c_0>0$, 存在 $b=b(b_0,c_0)$, 若 $|\Gamma_\varepsilon(u)|\leq c_0$, $\|D\Gamma_\varepsilon(u)\|\geq b_0$, 则 $u-Au\neq 0$ 且*

$$
\langle D\Gamma_\varepsilon(u),\,u-Au\rangle\geq b\|u-Au\|\,.
$$

现在定义两个凸锥 P 和 Q 为

$$
Q=\{u|u\in X_\varepsilon,\,\|u_+\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}<a\}\,,
$$

$$
P=\{u|u\in X_\varepsilon,\,\|u_-\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}<a\}\,,
$$

其中 a 是一个正常数.

引理8. *存在 $a_0>0$, 当 $0<a<a_0$ 时, 有*

$$
A(\partial Q)\subset Q,\ A(\partial P)\subset P\,.
$$

证明: 给定 $u\in X_\varepsilon$, 定义 $v=Au$ 满足方程 (3.1) 式, 也就是

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla v\nabla\eta+E(\varepsilon x)v\eta)dx+\sigma\int_{\mathbb{R}^3}k_\varepsilon(x,v)\eta\,dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u v\eta\,dx\\
&+\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)^{\beta-1}_+\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)v\eta\,dx=\int_{\mathbb{R}^3}f(u)\eta\,dx,\quad \text{对 }\forall\,\eta\in X_\varepsilon\,.
\end{aligned}
$$

选取 $\eta=v_+$ 为试探函数, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla v_+|^2+E(\varepsilon x)v_+^2)dx+\sigma\int_{\mathbb{R}^3}k_\varepsilon(x,v_+)v_+\,dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u v_+^2\,dx\\&+\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)_+^{\beta-1}\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)v_+^2\,dx=\int_{\mathbb{R}^3}f(u)v_+\,dx.\end{aligned}\tag{3.8}$$

我们估计 (3.8) 式的左边

$$\text{LHS}\geq\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla v_+|^2+E(\varepsilon x)v_+^2)\,dx\geq d_0\|v_+\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}\,,\tag{3.9}$$

其中 d_0 是一个常数. 估计 (3.8) 式的右边

$$\begin{aligned}\text{RHS}&\leq\int_{\mathbb{R}^3}f(u_+)v_+\,dx\leq c\int_{\mathbb{R}^3}(u_+v_++\mu u_+^{r-1}v_+)\,dx\\&\leq d_1\big(\|u_+\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\|v_+\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}+\|u_+\|^{r-1}_{H^1(\mathbb{R}^3)}\|v_+\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\big)\\&=d_1\big(1+\|u_+\|^{r-2}_{H^1(\mathbb{R}^3)}\big)\|u_+\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\|v_+\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\,,\end{aligned}\tag{3.10}$$

其中 d_1 是一个常数. 选取 $a_0>0$ 使得

$$d_1(1+a_0^{r-2})\leq\frac{1}{2}d_0\,.$$

当 $0<a<a_0$, $u\in\partial Q, \|u_+\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}=a$ 时, 我们有

$$\|v_+\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\leq\frac{1}{2}\|u_+\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}=\frac{1}{2}a\,.$$

因此 $v\in Q$, 即 $A(\partial Q)\subset Q$. 类似地 $A(\partial P)\subset P$.

引理9. *存在 $a_0>0$ 当 $0<a<a_0$ 时, 有*

$$c^*=\inf_{u\in\partial P\cap\partial Q}\Gamma_\varepsilon(u)>0\,.$$

证明: 对于 $u\in\partial P\cap\partial Q$, 我们有

$$\begin{aligned}\Gamma_\varepsilon(u)=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+E(\varepsilon x)u^2)\,dx+\sigma\int_{\mathbb{R}^3}K_\varepsilon(x,u)\,dx+\frac{1}{4}\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u u^2\,dx\\&+\frac{1}{2\beta}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_\varepsilon(x)u^2\,dx-1\Big)_+^{\beta}-\int_{\mathbb{R}^3}F(u)\,dx\\\geq&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+E(\varepsilon x)u^2)\,dx-\frac{1}{2}d_1\int_{\mathbb{R}^3}(|u|^2+|u|^r)\,dx\\=&a^2\big(d_0-d_1(1+a^{r-2})\big)\geq\frac{1}{2}a^2d_0:=c^*>0\,.\end{aligned}$$

现在我们定义 Γ_ε 的临界值

$$c_j = c_j(\varepsilon) = \inf_{E\in\Gamma_j} \sup_{u\in E\setminus(P\cup Q)} \Gamma_\varepsilon(u),\ j=1,2,\cdots$$

其中

$$\Gamma_j = \{E|\, E\subset X_\varepsilon,\, E\text{是紧的},\, -E=E,\, \text{对于}\ \eta\in\Lambda,\ \gamma(E\cap\eta^{-1}(\partial P\cap\partial Q))\geq j\},$$

$$\Lambda = \{\eta|\,\eta\in C(X_\varepsilon,\,X_\varepsilon),\,\eta\ \text{是奇的},\ \eta(P)\subset P,\,\eta(Q)\subset Q,\ \eta(u)=u\ \text{当}\ \Gamma_\varepsilon(u)\leq 0\ \text{时}\}.$$

引理10. Γ_j 是非空的, $j=1,2,\cdots$.

证明: 假设 $B=\{x\in\mathbb{R}^3||x|\leq r\}\subset M$. 设 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 为 $C_0^\infty(B)$ 中线性无关的函数族, 存在一个递增序列 $\{R_n\}$ 满足

$$J_0(u)<0,\quad \text{对}\,\forall\, u\in H_n,\ \|u\|_{X_\varepsilon}\geq R_n$$

其中

$$J_0(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V_\infty u^2)\,dx+\frac{1}{2}\sigma\int_{\mathbb{R}^3}e^{\gamma|x|}|u|^{2+\gamma}\,dx+\frac{1}{4}\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_u u^2\,dx-\int_{\mathbb{R}^3}F(u)\,dx$$

$H_n=\operatorname{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$, $V_\infty=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^3}V(x)$. 定义 $\varphi_n\in C(B_n,C_0^\infty(B))$ 为

$$\varphi_n(t)=R_n\sum_{i=1}^n t_ie_i,\quad t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in B_n=\{t|\,t\in\mathbb{R}^n,\,|t|=1\},$$

选取 R_n 满足 $\|\varphi_n(t)\|_{X_\varepsilon}\geq R_n$, 对 $t\in\partial B_n$. 根据 [9] 的引理 5.6, 对 $\forall\eta\in\Lambda$, 我们有 $\gamma(E\cap\eta^{-1}(\partial P\cap\partial Q)))\geq j$, 因此 $E_j=\varphi_{j+1}(B_{j+1})\in\Gamma_j$, $j=1,2,\cdots$.

命题1. 泛函 Γ_ε 有一列变号临界点 $\pm u_j(\varepsilon)$, $j=1,2,\cdots$ 满足

$$\Gamma_\varepsilon(u_j(\varepsilon))=c_j(\varepsilon)\leq m_j,\quad j=1,2,\cdots$$

其中 m_j 与 ε 无关, $j=1,2,\cdots$.

假设 (I_1), (I_2), (A_1), (A_2) 和 (Γ) 成立. 根据 [9] 的定理 4.1, 我们有下列结论

(1) $c_j(\varepsilon)\geq c^*$, $K^*_{c_j(\varepsilon)}\neq\emptyset$, 其中

$$K_c^*=\{u|\,u\in X_\varepsilon\setminus(P\cup Q),\,\Gamma_\varepsilon(u)=c,\,D\Gamma_\varepsilon(u)=0\}.$$

(2) 如果 $c_j(\varepsilon)=c_{j+1}(\varepsilon)=\cdots=c_{j+k-1}(\varepsilon)=c$, 则 $\gamma(K_c^*)\geq k$. 此外因为 $E_j\in\Gamma_j$ 和 $\Gamma_\varepsilon\leq J_0$, 我们有

$$c_j(\varepsilon)\leq\sup_{u\in E_j}J_0(u):=m_j,\quad j=1,2,\cdots.$$

4. 一致有界

在这节我们证明泛函 Γ_ε 临界点的一致有界性, 本文主要利用 Hilbert 空间有界序列的剖面分解和局部 Pohožaev 恒等式. 我们有下列临界点 u 的一致有界性.

命题2. 给定 $L>0$. 假设 $u\in X_\varepsilon$, $D\Gamma_\varepsilon(u)=0$, $\Gamma_\varepsilon(u)\le L$. 则存在与 ε 无关的正常数 α, c, 使得对 $\forall\,\delta>0$, 存在 $\varepsilon(\delta)>0$, 当 $0<\varepsilon<\varepsilon(\delta)$ 时, 有

$$|u(x)|\le c\exp\{-\alpha\mathrm{dist}(x,\,(\mathcal{A}^\delta)_\varepsilon)\}\quad \text{对于 } x\in\mathbb{R}^3\,.$$

引理11. 假设 $u\in X_\varepsilon$, $L>0$, $D\Gamma_\varepsilon(u)=0$, $\Gamma_\varepsilon(u)\le L$. 则 u 在 X_ε 中有界.

证明: 参见引理 4.

引理12. 假设 $u\in X_\varepsilon$, $L>0$, $D\Gamma_\varepsilon(u)=0$, $\Gamma_\varepsilon(u)\le L$. 则存在与 ε 无关的常数 K, 对于 $\forall x\in\mathbb{R}^3$, 有 $|u(x)|\le K$. 此外, 对于 $\forall\ \delta>0$, 存在与 ε 无关的常数 $c=c(\delta)$, 使得对于 $\forall x\in\mathbb{R}^3\setminus(M_\varepsilon)^\delta$, 有 $|u(x)|\le c\varepsilon^3$.

证明: 详细证明参见文献 [4] .

现在我们假设 $\varepsilon_n\to 0$, $u_n\in X_{\varepsilon_n}$, $L>0$, $D\Gamma_{\varepsilon_n}(u_n)=0$, $\Gamma_{\varepsilon_n}(u_n)\le L$. 根据引理 11, u_n 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中有界. 利用剖面分解定理 [10] , 我们有

$$u_n=\sum_{k\in\Lambda}U_k(\cdot-y_{n,k})+r_n \tag{4.1}$$

其中 Λ 是指标集, $y_{n,k}\in\mathbb{R}^3$, U_k, $r_n\in H^1(\mathbb{R}^3)$, 满足

(1) 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中 $u_n(\cdot+y_{n,k})\rightharpoonup U_k$, 当 $n\to\infty$ 时.

(2) $|y_{n,k}-y_{n,l}|\to\infty$, $k,l\in\Lambda$, $k\ne l$, 当 $n\to\infty$ 时.

(3) $\|u_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}=\sum\limits_{k\in\Lambda}\|U_k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}+\|r_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}+o(1)$, 当 $n\to\infty$ 时.

(4) $\|r_n\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\to 0(2\le p<6)$, 当 $n\to\infty$ 时.
$\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)}=\sum\limits_{k\in\Lambda}\|U_k\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)}+o(1)$, 当 $n\to\infty$ 时.

根据引理 12(2), $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{dist}(y_{n,k},M_{\varepsilon_n})<+\infty$. 不失一般性我们假设

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{dist}(y_{n,k},\,M_{\varepsilon_n})=0\,.$$

定义 $y_k^*=\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n y_{n,k}$. 因为 $\mathrm{dist}(y_{n,k},\,M_{\varepsilon_n})=\varepsilon_n^{-1}\mathrm{dist}(\varepsilon_n y_{n,k},\,M)$, 我们有

$$\mathrm{dist}(y_k^*,\,\overline{M})=0,\quad \text{i.e. } y_k^*\in\overline{M}\,.$$

引理13. 假设 $y_n \in \mathbb{R}^3$, $w_n = u_n(\cdot + y_n) \rightharpoonup U$ 在$H^1(\mathbb{R}^3)$ 中, 则 $Z = |U|$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla Z \nabla \eta \, dx + c_1 \int_{\mathbb{R}^3} Z\eta \, dx \le c_2 \int_{\mathbb{R}^3} Z^{r-1}\eta \, dx \quad 对\ \forall\ \eta \in H^1(\mathbb{R}^3),\ \eta \ge 0\,. \tag{4.2}$$

证明: 根据 Kato 引理, $z_n = |u_n(\cdot + y_n)|$ 满足

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3} \nabla z_n \nabla \eta dx + \int_{\mathbb{R}^3} E(\varepsilon_n x) z_n \eta \, dx + \sigma \int_{\mathbb{R}^3} k_\varepsilon(x, z_n)\eta \, dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_{u_n} z_n \eta \, dx \\ &+ \Big(\int_{\mathbb{R}^3} \chi_{\varepsilon_n}(x) u_n^2 \, dx - 1 \Big)_+^{\beta - 1} \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{\varepsilon_n}(x) z_n \eta \, dx \le \int_{\mathbb{R}^3} (\varepsilon z_n + c z_n^{r-1})\eta \, dx,\end{aligned}$$

对 $\forall\ \eta \in H^1(\mathbb{R}^3),\ \eta \ge 0$. 注意到 $k_\varepsilon(x, z_n) \ge z_n$, $\varphi_{u_n} \ge 0$, 我们有

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla z_n \nabla \eta \, dx + c_1 \int_{\mathbb{R}^3} z_n \eta \, dx \le c_2 \int_{\mathbb{R}^3} z_n^{r-1} \eta \, dx,$$

并且

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla z_n(\cdot + y_n) \nabla \eta \, dx + c_1 \int_{\mathbb{R}^3} z_n(\cdot + y_n)\eta \, dx \le c_2 \int_{\mathbb{R}^3} (z_n(\cdot + y_n))^{r-1} \eta \, dx \tag{4.3}$$

对 $\forall\ \eta \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\eta \ge 0$. 因为当 $n \to \infty$ 时, $z_n(\cdot + y_n) = |u_n(\cdot + y_n)| = |w_n| \rightharpoonup |U| = Z$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中, 在 (4.3) 两边取极限, 当 $n \to \infty$ 时, 我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla Z \nabla \eta \, dx + c_1 \int_{\mathbb{R}^3} Z\eta \, dx \le c_2 \int_{\mathbb{R}^3} Z^{r-1}\eta \, dx \quad 对\ \forall\ \eta \in H^1(\mathbb{R}^3),\ \eta \ge 0\,.$$

注1. 假设剖面分解 (4.1) 式成立. 根据引理 13, $Z_k = |U_k|$ 满足不等式 (4.2) 式, 因此存在 $c, \alpha > 0$ 使得

$$|U_k(x)| = Z_k(x) \le ce^{-\alpha|x|},\ x \in \mathbb{R}^3.$$

此外, 选取 $\eta = Z_k$ 为 (4.2) 式的试探函数, 我们有

$$\|Z_k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)} \le c\|Z_k\|^6_{L^6(\mathbb{R}^3)} \le c\|Z_k\|^6_{H^1(\mathbb{R}^3)}.$$

因此存在与 $k \in \Lambda$ 无关的常数 $m > 0$, 使得

$$\|U_k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)} = \|Z_k\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)} \ge m\,.$$

引理14. 在剖面分解 (4.1) 式中指标集 Λ 是有限的.

证明: 根据注 1 和剖面分解 (4.1) 式的性质 (3), Λ 是有限集.

定义

$$\Omega_R^{(n)} = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{k \in \Lambda} B_R(y_{n,k}).$$

引理15. 存在与 n 无关的常数 c, α, 使得

$$\int_{\Omega_R^{(n)}} G_{\varepsilon_n}(x,u_n,\nabla u_n)\,dx \le ce^{-\alpha R},\ \int_{\Omega_R^{(n)}} F(u_n)\,dx \le ce^{-\alpha R}$$

其中

$$\begin{aligned} G_{\varepsilon_n}(x,u_n,\nabla u_n) =& |\nabla u_n|^2 + u_n^2 + \Big(\frac{u_n}{m_{\varepsilon_n}(x,u_n)}\Big)^\gamma u_n^2 + \varphi_{u_n} u_n^2 \\ &+ \Big(\int_{\mathbb{R}^3} \chi_{\varepsilon_n}(x) u_n^2\,dx - 1\Big)_+^{\beta-1} \chi_{\varepsilon_n}(x) u_n^2 \,. \end{aligned}$$

证明: 根据注 1, U_k 指数衰减. 根据剖面分解 (4.1) 式的性质 (4), $\|r_n\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} = o(1),\ 2 \le p < 6$. 因此

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega_R^{(n)})} = o_R(1),\ 2 \le p \le 6\,,$$

其中 $o_R(1) \to 0$ 当 $R \to +\infty$ 时, 利用 Moser 迭代

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega_R^{(n)})} = o_R(1)\,. \tag{4.4}$$

定义 C^∞ 的截断函数 ϕ, $\phi(x) = 0$ 当 $x \notin \Omega_R^{(n)}$ 时; $\phi(x) = 1$ 当 $x \in \Omega_{R+1}^{(n)}$ 时, 并且 $|\nabla\phi| \le 2$. 选取 $\eta = u_n\phi^2$ 为 $\langle D\Gamma_{\varepsilon_n}(u_n), \eta\rangle = 0$ 的试探函数, 我们有

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u_n|^2 + E(\varepsilon_n x)u_n^2 + \sigma k_{\varepsilon_n}(x,u_n)u_n + \lambda\varphi_{u_n} u_n^2)\phi^2\,dx \\ &+ \Big(\int_{\mathbb{R}^3} \chi_{\varepsilon_n}(x) u_n^2\,dx - 1\Big)_+^{\beta-1} \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{\varepsilon_n}(x) u_n^2 \phi^2\,dx \\ =& -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_n u_n 2\phi\nabla\phi\,dx + \int_{\mathbb{R}^3} f(u_n)u_n\phi^2\,dx\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

我们估计 (4.5) 式,

$$\begin{aligned} &\Big|\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_n u_n 2\phi\nabla\phi\,dx\Big| \\ \le& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2\phi^2\,dx + c\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^2|\nabla\phi|^2\,dx\,. \end{aligned}$$

对于 R 足够大, 根据 (4.4) 式有

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(u_n)u_n\phi^2\,dx \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} E(\varepsilon_n x)u_n^2\phi^2\,dx\,. \tag{4.6}$$

和

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_n u_n 2\phi\nabla\phi\,dx\Big| \le \alpha\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2\phi^2\,dx + c_\alpha\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^2|\nabla\phi|^2\,dx\,.$$

因此根据 (4.5) 式, 我们有

$$\int_{\Omega_{R+1}^{(n)}}(|\nabla u_n|^2+u_n^2+(\frac{u_n}{m_{\varepsilon_n}(x,u_n)})^{\gamma}u_n^2+\varphi_{u_n}u_n^2)dx$$

$$+\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_{\varepsilon_n}(x)u_n^2\,dx-1\Big)_+^{\beta-1}\int_{\Omega_{R+1}^{(n)}}\chi_{\varepsilon_n}(x)u_n^2dx$$

$$\le c_0\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^2|\nabla\phi|^2\,dx\le c_0\Big(\int_{\Omega_R^{(n)}}u_n^2dx-\int_{\Omega_{R+1}^{(n)}}u_n^2\,dx\Big).$$

于是我们得到

$$\int_{\Omega_{R+1}^{(n)}}G_{\varepsilon_n}(x,u_n,\nabla u_n)dx\le\theta\int_{\Omega_R^{(n)}}G_{\varepsilon_n}(x,u_n,\nabla u_n)dx$$

其中 $\theta=\frac{c_0}{c_0+1}<1$. 从而

$$\int_{\Omega_R^{(n)}}G_{\varepsilon_n}(x,u_n,\nabla u_n)dx\le ce^{-\alpha R}$$

其中 $\alpha=-\ln\theta>0$. 再根据 (4.6) 式有

$$\int_{\Omega_R^{(n)}}F(u_n)\,dx\le ce^{-\alpha R}.$$

引理16. 假设剖面分解 (4.1) 式成立. 定义 $y_k^*=\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n y_{n,k}$. 则 $y_k^*\in\mathcal{A}$, 即 y_k^* 是 V 在 $\overline{M}$ 中的临界点.

证明: 下面利用局部 Pohožaev 恒等式 [11] [12] 证明如下定理.
因为 $\mathrm{dist}(y_{k,n},M_{\varepsilon_n})\le c<+\infty$, 我们有 $y_k^*=\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n y_{k,n}\in\overline{M}$. 如果 $y_k^*\notin\mathcal{A}$, 则 $t_k=\nabla V(y_k^*)\neq 0$. 利用假设 (V_2) 可知存在 $\delta_1>0$ 使得

$$(t_k,\,\nabla V(x))\ge\frac{1}{2}|t_k|^2>0,\quad (t_k,\,\nabla\mathrm{dist}(x,M))\ge 0\quad \text{对于 } x\in B_{\delta_1}(y_k^*)\,. \tag{4.7}$$

令

$$\delta_2=\min\{|y_k^*-y_l^*|\,\big|\,k,l\in\Lambda,\;y_k^*\neq y_l^*\}\,. \tag{4.8}$$

不失一般性, 我们假设 $\delta_1<\delta_2$ 并且选取 $\delta_0=\frac{1}{100}\delta_1$. 定义

$$B_n=\{x|\,|x-y_{k,n}|\le 2\delta\varepsilon_n^{-1}\},$$

$$T_n=\{x|\,\delta\varepsilon_n^{-1}\le|x-y_{n,k}|\le 2\delta\varepsilon_n^{-1}\}.$$

令 $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\phi(x)=1$ 当 $|x-y_{n,k}|\le\delta\varepsilon_n^{-1}$ 时; $\phi(x)=0$ 当 $|x-y_{n,k}|\ge 2\delta\varepsilon_n^{-1}$ 时, 并且 $|\nabla\phi|\le\frac{2}{\delta}\varepsilon_n(\le 1)$. 对 $\forall\ \eta\in X_\varepsilon$, u_n 是方程 $\langle D\Gamma_{\varepsilon_n}(u_n),\eta\rangle=0$ 的解. 取 $\eta=(t_k,\nabla u_n)\phi$, 我们得到

Pohožaev 恒等式

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\varepsilon_n\int_{\mathbb{R}^3}(t_k,\nabla V(\varepsilon_n x))u_n^2\phi\,dx+\frac{1}{2}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_{\varepsilon_n}(x)u_n^2\,dx-1\Big)_+^{\beta-1}\int_{\mathbb{R}^3}(t_k,\nabla\chi_{\varepsilon_n}(x))u_n^2\phi\,dx\\
&+\sigma\int_{\mathbb{R}^3}(t_k,\nabla_x k_{\varepsilon_n}(x,u_n))\phi\,dx\\
=&\int_{\mathbb{R}^3}(t_k,\nabla u_n)(\nabla u_n,\nabla\phi)\,dx-\int_{\mathbb{R}^3}\Big\{\frac{1}{2}|\nabla u_n|^2+\sigma K_{\varepsilon_n}(x,u_n)+\frac{1}{2}E(\varepsilon_n x)u_n^2+\frac{\lambda}{2}\varphi_{u_n}u_n^2\\
&+\frac{1}{2}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_{\varepsilon_n}(x)u_n^2\,dx-1\Big)_+^{\beta-1}\chi_{\varepsilon_n}(x)u_n^2\Big\}(t_k,\nabla\phi)\,dx-\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^3}u_n^2(t_k,\nabla\varphi_{u_n})\phi\,dx\\
&+\int_{\mathbb{R}^3}F(u_n)(t_k,\nabla\phi)\,dx\,.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

因为 $T_n\subset\Omega^{(n)}_{\delta_0\varepsilon_n^{-1}}$ 和 $\mathrm{supp}\nabla\phi\subseteq T_n$, 根据 (4.7) 式, 我们有

$$
\varepsilon_n\int_{\mathbb{R}^3}(t_k,\,\nabla V(\varepsilon_n x))u_n^2\phi\,dx\geq c\varepsilon_n\int_{B(y_{n,k},\delta\varepsilon_n^{-1})}u_n^2\,dx\geq c\varepsilon_n,
$$

$$
(t_k,\,\nabla\chi_{\varepsilon_n}(x))\phi\geq 0\,,
$$

且

$$
(t_k,\,\nabla_x k_{\varepsilon_n}(x,u_n))=c\,(t_k,\,\nabla\mathrm{dist}(\varepsilon_n x,M))\geq 0\,.
$$

因此 (4.9) 式的左边,

$$
\mathrm{LHS}\geq c\varepsilon_n+\frac{1}{2}\lambda\int_{\mathbb{R}^3}(t_k,\nabla\varphi_{u_n})u_n^2\phi\,dx\,.
\tag{4.10}
$$

我们估计 (4.9) 式右边,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3}(t_k,\nabla u_n)(\nabla u_n,\nabla\phi)\,dx-\int_{\mathbb{R}^3}\Big\{\frac{1}{2}|\nabla u_n|^2+\sigma K_{\varepsilon_n}(x,u_n)+\frac{1}{2}E(\varepsilon_n x)u_n^2+\frac{\lambda}{2}\varphi_{u_n}u_n^2\\
&+\frac{1}{2}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\chi_{\varepsilon_n}(x)u_n^2\,dx-1\Big)_+^{\beta-1}\chi_{\varepsilon_n}(x)u_n^2\Big\}(t_k,\nabla\phi)\,dx+\int_{\mathbb{R}^3}F(u_n)(t_k,\nabla\phi)\,dx\\
\leq& c\int_{T_n}(G_{\varepsilon_n}(x,u_n,\nabla u_n)\,dx+F(u_n))\,dx\\
\leq& ce^{-\alpha\delta\varepsilon_n^{-1}}\,.
\end{aligned}
$$

最后我们估计 $\int_{\mathbb{R}^3}(t_k,\nabla\varphi_{u_n})u_n^2\phi\,dx$ 这一项. 因为

$$
\varphi_{u_n}(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u_n^2(y)}{|x-y|}dy,\quad \nabla\varphi_{u_n}(x)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u_n^2(y)}{|x-y|^3}(x-y)dy,
$$

和

$$\int_{\mathbb{R}^3}(t_k,\nabla\varphi_{u_n})u_n^2\phi(x)\,dx$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u_n^2(y)u_n^2(x)}{|x-y|^3}(t_k,x-y)\phi(x)\,dxdy\,.$$

注意到利用变量替换 $(x,y)\mapsto(y,x)$, 我们有

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u_n^2(y)u_n^2(x)}{|x-y|^3}(t_k,x-y)\phi(x)\phi(y)\,dxdy=0\,,$$

则

$$\int_{\mathbb{R}^3}(t_k,\nabla\varphi_{u_n})u_n^2\phi(x)\,dx=-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u_n^2(y)u_n^2(x)}{|x-y|^3}(t_k,x-y)\phi(x)(1-\phi(y))\,dxdy\,.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^3}(t_k,\nabla\varphi_{u_n})u_n^2\phi(x)\,dx\right|\\
\le& c\iint\limits_{\substack{\{|y-y_{n,k}|\ge\delta_0\varepsilon_n^{-1}\}\\ \{|x-y_{n,k}|\le2\delta_0\varepsilon_n^{-1}\}}}\frac{u_n^2(y)u_n^2(x)}{|x-y|^2}\,dxdy\\
\le& c\iint\limits_{\substack{\{\delta_0\varepsilon_n^{-1}\le|y-y_{n,k}|\le3\delta_0\varepsilon_n^{-1}\}\\ \{|x-y_{n,k}|\le2\delta_0\varepsilon_n^{-1}\}}}\frac{u_n^2(y)u_n^2(x)}{|x-y|^2}\,dxdy+c\iint\limits_{\substack{\{|y-y_{n,k}|\ge3\delta_0\varepsilon_n^{-1}\}\\ \{|x-y_{n,k}|\le2\delta_0\varepsilon_n^{-1}\}}}\frac{u_n^2(y)u_n^2(x)}{|x-y|^2}\,dxdy\\
=&\mathrm{I}+\mathrm{II}\,.
\end{aligned}\tag{4.11}$$

由于 $\widetilde{T}_n=\{y|\,\delta_0\varepsilon_n^{-1}\le|y-y_{n,k}|\le3\delta_0\varepsilon_n^{-1}\}\subset\Omega^{(n)}_{\delta_0\varepsilon_n^{-1}}$ ，我们有

$$|u_n(y)|\le ce^{-\alpha\delta_0\varepsilon_n^{-1}},\ y\in\widetilde{T}_n,$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}\le& ce^{-2\alpha\delta_0\varepsilon_n^{-1}}\int_{|x-y_{n,k}|\le2\delta_0\varepsilon_n^{-1}}\Big(\int_{|y-y_{n,k}|\le3\delta_0\varepsilon_n^{-1}}\frac{dy}{|x-y|^2}\Big)u_n^2(x)\,dx\\
\le& c\varepsilon_n^{-1}e^{-2\alpha\delta_0\varepsilon_n^{-1}}\int_{\mathbb{R}^3}u_n^2(x)\,dx\le c\varepsilon_n^2\,.
\end{aligned}$$

在区域

$$\{(x,y)|\,|x-y_{n,k}|\le2\delta_0\varepsilon_n^{-1},\ |y-y_{n,k}|\ge3\delta_0\varepsilon_n^{-1}\},$$

我们有 $|x-y|\ge\delta_0\varepsilon_n^{-1}$, 因此

$$\mathrm{II}\le c(\delta_0\varepsilon_n^{-1})^2\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}u_n^2(x)u_n^2(y)dxdy\le c\varepsilon_n^2\,.$$

结合 (4.9) 式的左边,

$$\text{LHS} \geq c\varepsilon_n - c\varepsilon_n^2 \geq c\varepsilon_n$$

并且 ε_n 足够小,

$$c\varepsilon_n \leq ce^{-\alpha\delta_0\varepsilon_n^{-1}},$$

矛盾. 故假设不成立, 引理得证.

命题 2 的证明: 根据引理 15 和 Moser 迭代, 有 $\int_{\Omega_R^{(n)}} F(u_n)\,dx \leq ce^{-\alpha R}$ 和 $|u_n(x)| \leq ce^{-\alpha R}$ 对于 $x \in \Omega_R^{(n)}$. 令 $R_n(x) = \min\{|x - y_{n,k}|\,|\,k \in \Lambda\}$, 则 $|u_n(x)| \leq ce^{-\alpha R_n(x)}$. 因为 $\varepsilon_n y_{n,k} \to y_k^* \in \mathcal{A}$, 于是存在 $\varepsilon(\delta)$ 当 $\varepsilon_n \leq \varepsilon(\delta)$ 时, 有 $\varepsilon_n y_{n,k} \in \mathcal{A}^\delta$, 因此

$$|u_n(x)| \leq c\,e^{-\alpha R_n(x)} \leq c\,e^{-\alpha \text{dist}(x,(\mathcal{A}^\delta)_{\varepsilon_n})},\ \ x \in \mathbb{R}^3\,.$$

5. 变号解的集中现象

接下来将证明本文的主要结论, 泛函 Γ_ε 的临界点也是泛函 J_ε 的临界点, 也就是原问题的解.

定理 1 的证明: 给定正整数 k, 根据命题 2, 泛函 Γ_ε, $\varepsilon \in (0, 1]$ 有 k 对变号临界点 $\pm u_j$, $j = 1, \cdots, k$, 对应的临界值满足

$$\Gamma_\varepsilon(u_j) \leq L,\ j = 1, \cdots, k,$$

其中 L 与 ε 无关.

考虑泛函 Γ_ε. 假设 $u \in X_\varepsilon$, $D\Gamma_\varepsilon(u) = 0,\ \Gamma_\varepsilon(u) \leq L$. 则根据命题 2, 给定 $\delta > 0$ 存在 $\varepsilon(\delta) > 0$ 当 $0 < \varepsilon < \varepsilon(\delta)$ 时, 有

$$|u(x)| \leq c\exp\{-\alpha\,\text{dist}(x,\,(\mathcal{A}^\delta)_\varepsilon)\} \quad \text{对于}\ x \in \mathbb{R}^3\,,$$

其中 $c,\ \alpha$ 与 ε 无关. 假设 $\varepsilon(\delta) \leq \min\{\alpha,\,\frac{1}{2c}\}$, 则当 $0 < \varepsilon < \varepsilon(\delta)$ 时, 有

$$\begin{aligned}|u(x)| &\leq c\exp\{-\alpha\,\text{dist}(x,\,(\mathcal{A}^\delta)_\varepsilon)\}\\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon}\exp\{-\varepsilon\,\text{dist}(x,\,(\mathcal{A}^\delta)_\varepsilon)\}\\ &= \frac{1}{2\varepsilon}\exp\{-\text{dist}(\varepsilon x,\,M\}.\end{aligned}$$

因此

$$\varepsilon|u(x)|\exp\{\text{dist}(x,\,M)\} \leq \frac{1}{2}\ \text{和}\ m_\varepsilon(x,u) = u,\ \text{对于}\ x \in \mathbb{R}^3. \tag{5.1}$$

此外定义 $D = \max\{|y|\,\big|y \in \overline{M}\}$, $d = \text{dist}(\mathcal{A}^\delta,\,\partial M)$. 选取整数 l 使得 $ld \geq D$. 则对于 $x \notin \overline{M}_\varepsilon$ 我们

有

$$\begin{aligned} l\mathrm{dist}(x,\,(\mathcal{A}^{\delta})_{\varepsilon}) \geq & l\,\mathrm{dist}((\mathcal{A}^{\delta})_{\varepsilon}, \partial M_{\varepsilon}) + \mathrm{dist}(x, \partial M_{\varepsilon}) \\ \geq & \frac{l}{\varepsilon}d + |x| - \frac{D}{\varepsilon} \geq |x|\,. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} |u(x)| \leq & c\exp\{-\alpha\,\mathrm{dist}(x,\,(\mathcal{A}^{\delta})_{\varepsilon})\} \\ \leq & c\exp\{-\frac{\alpha}{l}|x|\} \quad 对于\ x \notin M_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{\varepsilon}(x)u^2\,dx \leq & c\varepsilon^{-6}\int_{|x|\geq c\varepsilon^{-1}} \exp\{-\frac{2\alpha}{l}|x|\}dx \\ \leq & c\varepsilon^{-8}e^{-\frac{2\alpha}{l}\varepsilon^{-1}} < 1 \end{aligned}$$

且

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^3} \chi_{\varepsilon}(x)u^2\,dx - 1\Big)_+ = 0 \tag{5.2}$$

对于 $\varepsilon < \varepsilon(\delta)$ 充分小. 根据 (5.1) 式和 (5.2) 式推出 $J_{\varepsilon}(u) = \Gamma_{\varepsilon}(u) \leq L,\ DJ_{\varepsilon}(u) = 0.$

因此, 给定正整数 k, 我们得到泛函 Γ_{ε} 有 k 对变号临界点 $\pm u_1, \cdots, \pm u_k$ 满足

$$\Gamma_{\varepsilon}(u_j) \leq L,\ \ j = 1, \cdots, k.$$

给定 $\delta > 0$ 存在 $\varepsilon(\delta)$, 当 $\varepsilon \leq \varepsilon(\delta)$ 时, u_j, $j = 1, \cdots, k$ 满足

$$|u_j(x)| \leq c\exp\{-\alpha\,\mathrm{dist}(x,\,(\mathcal{A}^{\delta})_{\varepsilon})\},\ \ j = 1, \cdots, k,\ \ x \in \mathbb{R}^3$$

并且 $J_{\varepsilon}(u_j) \leq L,\ \ DJ_{\varepsilon}(u_j) = 0$. 定理得证.

参考文献

[1] Chen, Z., Qin, D. and Zhang, W. (2020) Localized Nodal Solutions of Higher Topological Type For Nonlinear Schrödinger－Poisson System. *Nonlinear Analysis*, **198**, Article ID: 111896. https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111896

[2] Chen, S., Liu, J. and Wang, Z.-Q. (2019) Localized Nodal Solutions for a Critical Nonlinear Schrödinger Equations. *Journal of Functional Analysis*, **277**, 594–640. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2018.10.027

[3] Chen, S. and Wang, Z.-Q. (2017) Localized Nodal Solutions of Higher Topological Type for Semiclassical Nonlinear Schrödinger Equations. *Calculus of Variations and Partial Differential*

Equations, **56**, 1-26. https://doi.org/10.1007/s00526-016-1094-4

[4] Liu, X., Liu, J. and Wang, Z.-Q. (2019) Localized Nodal Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations. *Journal of Differential Equations*, **267**, 7411-7461. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.08.003

[5] Byeon, J. and Wang, Z.-Q. (2003) Standing Waves with a Critical Frequency for Nonlinear Schrödinger Equations, II. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **18**, 207-219. https://doi.org/10.1007/s00526-002-0191-8

[6] Ruiz, D. (2006) The Schrödinger–Poisson Equation under the Effect of a Nonlinear Local Term. *Journal of Functional Analysis*, **237**, 655-674. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2006.04.005

[7] Cerami, G. and Vaira, G. (2010) Positive Solutions for Some Non-Autonomous Schrödinger–Poisson Systems. *Journal of Differential Equations*, **48**, 521-543. https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.06.017

[8] Liu, Z. and Sun, J. (2001) Invariant Sets of Descending Flow in Critical Point Theory with Applications to Nonlinear Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, **172**, 257-299. https://doi.org/10.1006/jdeq.2000.3867

[9] Liu, J., Liu, X. and Wang, Z.-Q. (2016) Sign-Changing Solutions for Coupled Nonlinear Schrödinger Equations with Critical Growth. *Journal of Differential Equations*, **261**, 7194-7236. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.09.018

[10] Tintarev, K. and Fieseler, K.-H. (2007) Concentration Compactness. Functional-Analytic Grounds and Applications. Imperial College Press, London. https://doi.org/10.1142/p456

[11] Cerami, G., Devillanova, G. and Solimini, S. (2005) Infinitely Many Bound States for Some Nonlinear Scalar Field Equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **23**, 139-168. https://doi.org/10.1007/s00526-004-0293-6

[12] Devillanova, G. and Solimini, S. (2002) Concentrations Estimates and Multiple Solutions to Elliptic Problems at Critical Growth. *Advances in Difference Equations*, **7**, 1257-1280.