Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(4), 1109-1114
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.104120

关于分块矩阵相似性的探讨

程　宇

保定学院数据科学与软件工程学院，河北 保定
Email: chengyu72@sina.com

收稿日期：2021年3月22日；录用日期：2021年4月11日；发布日期：2021年4月27日

摘　要

本文在已有文献的基础上，给出了当 A_1、B_1 为对合矩阵时，分块矩阵 $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} A_1 & C \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件是 $A_1C + CB_1 = 0$。当 A_1、B_1 为 k-幂零矩阵时，上述两分块矩阵相似的充分条件是 $r\begin{bmatrix} A_1 & C \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} = r(A_1) + r(B_1)$ 和 $A_1C + CB_1 = 0$。最后对 A_1、B_1 为 k-幂零矩阵进行了进一步讨论。

关键词

矩阵的相似，对合矩阵，幂零矩阵，Roth定理

On the Similarity of Block Matrix

Yu Cheng

School of Data Science and Software Engineering, Baoding University, Baoding Hebei
Email: chengyu72@sina.com

Received: Mar. 22nd, 2021; accepted: Apr. 11th, 2021; published: Apr. 27th, 2021

Abstract

This article, on the basis of the existing literature, applying Roth's theory, proves that when the A_1 and B_1 are involutory matrix, the necessary and sufficient condition of similar partitioned of matrix $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} A_1 & C \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$ is $A_1C + CB_1 = 0$. When A_1 and B_1 are k-nilpotent matrix, the sufficient condition for the similarity of the two-block matrices is

文章引用: 程宇. 关于分块矩阵相似性的探讨[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 1109-1114.
DOI: 10.12677/aam.2021.104120

$r\begin{bmatrix} A_1 & C \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} = r(A_1) + r(B_1)$ **and** $A_1C + CB_1 = 0$**. At last, we further discuss that** A_1 **and** B_1 **are *k*-nilpotent matrix.**

Keywords

Matrix's Similarity, Involutory Matrix, Nilpotent Matrix, Roth's Theory

1. 引言

分块矩阵$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$不仅具有相似的结构，而且具有许多相似的特征。Roth 定理[1]给出上述两矩阵相似的充分必要条件是矩阵方程

$$AX - XB = C \tag{1}$$

有解，而文[1]中又进一步给出了当 A、B 分别为幂等矩阵和 2-幂零矩阵时，上述两分块矩阵相似的充要条件[1]。本文讨论并分析得出了当 A、B 都为对合矩阵时，上述两分块矩阵相似的充要条件，及当 A、B 都为 k-幂零矩阵时，上述两分块矩阵相似的充分条件。文中 r 表示矩阵的秩，$R(A)$ 表示矩阵的列空间。

2. 预备知识

2.1. 对合矩阵的定义及性质

设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = E$，则称方阵 A 为对合矩阵[2]。

本文用到的对合矩阵的性质

1) 对合矩阵 $A^{-1} = A$；

2) 若方阵 A 为对合矩阵，则 A 的特征值为 1 或−1 [2]；

3) 对合矩阵的相似矩阵仍为对合矩阵；

4) 若 n 阶方阵 A 为对合矩阵，则 A 与对角矩阵$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r} \end{bmatrix}$相似，其中 $0 \le r \le n$ 为 A 的特征值 1 的重数[2]。

2.2. 幂零矩阵的定义及性质

设 A 为数域 P 上的 n 阶方阵，若存在正整数 m，使得 $A^{m-1} \ne 0, A^m = 0$，则称 A 是幂零指数为 m 的幂零矩阵，记为 m-幂零矩阵[3]。当 $m = 2, 3$ 时，A 为 2-幂零矩阵和 3-幂零矩阵[3]。本文用到的幂零矩阵的性质

1) A 是幂零矩阵，则 A 不可逆；

2) A 为幂零矩阵的充要条件是 A 的特征值全为 0 [3]；

3) 与幂零矩阵相似的矩阵仍为幂零矩阵，矩阵的幂零指数相同，并且相似于严格的上三角矩阵，进而幂零矩阵 A 都有以下分解形式：

$A=P^{-1}\begin{bmatrix}0 & A_1\\ 0 & 0\end{bmatrix}P$，其中 A_1 是方阵；

4) 对 k-幂零矩阵，若当标准型中幂零若当块的阶数小于等于 k。

3. 主要结果

引理 1 [1] (Roth 定理)分块矩阵 $\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & B\end{bmatrix}$ 相似的一个充要条件是矩阵方程 $AX-XB=C$ 有解。

定理 1 已知方阵 A,B,C,D，其中 A 与 B 相似，C 与 D 相似，则 $\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & C\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}B & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}$ 相似。

由相似定义即可证明。

引理 2 [1] 设 A 和 B 都为幂等矩阵，则分块矩阵 $\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & B\end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件是 $AC+CB=C$。

定理 2 设 A_1 和 B_1 均为对合矩阵，则分块矩阵 $\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & B_1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}A_1 & C\\ 0 & B_1\end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件为 $A_1C+CB_1=0$。

证明：必要性：因为 $A_1^2=E_m$，$B_1^2=E_n$，所以 $\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & B_1\end{bmatrix}$ 为对合矩阵，又因为分块矩阵 $\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & B_1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}A_1 & C\\ 0 & B_1\end{bmatrix}$ 相似，$\begin{bmatrix}A_1 & C\\ 0 & B_1\end{bmatrix}$ 也为对合矩阵，

$$\begin{bmatrix}A_1 & C\\ 0 & B_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1 & C\\ 0 & B_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1^2 & A_1C+CB_1\\ 0 & B_1^2\end{bmatrix},$$

即

$$A_1C+CB_1=0.$$

充分性：因为 $A_1C+CB_1=0$，所以 $A_1^2C+A_1CB_1=0$，$A_1^2=E_m$，从而 $A_1CB_1=-C$，取 $X_0=\frac{1}{2}A_1C$，则 X_0 为方程(1)的解。由 Roth 定理知分块矩阵 $\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & B_1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}A_1 & C\\ 0 & B_1\end{bmatrix}$ 相似。

引理 3 [1] 设 A 和 B 是两个 2-幂零矩阵，则分块矩阵 $\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & B\end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件为 $r\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & B\end{bmatrix}=r(A)+r(B)$ 和 $AC+CB=0$。

现将此结论做以下推广。

定理 3 设 A_1 和 B_1 均为 k-幂零矩阵，若满足 $r\begin{bmatrix}A_1 & C\\ 0 & B_1\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & B_1\end{bmatrix}=r(A_1)+r(B_1)$，且 $A_1C+CB_1=0$，则分块矩阵 $\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & B_1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}A_1 & C\\ 0 & B_1\end{bmatrix}$ 相似。

证明：因为 A_1 和 B_1 均为 k-幂零矩阵，由 k-幂零矩阵的性质可得

$$A_1=P^{-1}\begin{bmatrix}0 & A_{11}\\ 0 & 0\end{bmatrix}P,\quad B_1=Q\begin{bmatrix}0 & B_{11}\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}, \tag{2}$$

其中 A_{11} 和 B_{11} 是方阵。

代入(1)式得

$$P^{-1}\begin{bmatrix}0 & A_{11}\\ 0 & 0\end{bmatrix}PX-XQ\begin{bmatrix}0 & B_{11}\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}=C, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix}0 & A_{11}\\ 0 & 0\end{bmatrix}PXQ-PXQ\begin{bmatrix}0 & B_{11}\\ 0 & 0\end{bmatrix}=PCQ, \tag{4}$$

此式是关于 X 的矩阵方程，下证明其有解。

设

$$PXQ=\begin{bmatrix}Y_1 & Y_2\\ Y_3 & Y_4\end{bmatrix},\quad PCQ=\begin{bmatrix}M_1 & M_2\\ M_3 & M_4\end{bmatrix}, \tag{5}$$

展开(4)式得

$$\begin{bmatrix}A_{11}Y_3 & A_{11}Y_4\\ 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & Y_1B_{11}\\ 0 & Y_3B_{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}Y_3 & A_{11}Y_4-Y_1B_{11}\\ 0 & -Y_3B_{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_1 & M_2\\ M_3 & M_4\end{bmatrix}, \tag{6}$$

即

$$A_{11}Y_3=M_1,\quad Y_3B_{11}=-M_4,\quad M_3=0,\quad A_{11}Y_4-Y_1B_{11}=M_2, \tag{7}$$

又据文[4]中的结论，矩阵方程 $A_{11}Y_3=M_1$ 和 $Y_3B_{11}=-M_4$ 有一个公共解 Y_3 的充分必要条件是

$$R(M_1)\subseteq R(A_{11}),\quad R\left(M_4^{\mathrm{T}}\right)\subseteq R\left(B_{11}^{\mathrm{T}}\right),\quad A_{11}M_4+M_1B_{11}=0, \tag{8}$$

(即 M_1 的列向量可由 A_{11} 的列向量组线性表出，M_4 的行向量可由 B_{11} 的行向量组线性表出，且 $A_{11}M_4+M_1B_{11}=0$) [4]。而文[5]中给出了矩阵方程 $A_{11}Y_4-Y_1B_{11}=M_2$ 有解的充分必要条件为

$$r\begin{bmatrix}A_{11} & M_2\\ 0 & B_{11}\end{bmatrix}=r(A_{11})+r(B_{11})\ \ [5], \tag{9}$$

因为 $M_3=0$，(8)式前两个包含关系和(9)式一起等价于矩阵秩的方程如下：

$$r\begin{bmatrix}0 & A_{11} & M_1 & M_2\\ 0 & 0 & M_3 & M_4\\ 0 & 0 & 0 & B_{11}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}0 & A_{11}\\ 0 & 0\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix}0 & B_{11}\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{10}$$

因 M_1 的列向量可由 A_{11} 的列向量组线性表出，M_4 的行向量可由 B_{11} 的行向量组线性表出，所以由矩阵的初等变换即可得(10)式。又对(10)做分块矩阵的初等变换，给其左乘分块矩阵 $\begin{bmatrix}P^{-1} & 0\\ 0 & Q\end{bmatrix}$，右乘分块矩阵 $\begin{bmatrix}P & 0\\ 0 & Q^{-1}\end{bmatrix}$，即化为 $\begin{bmatrix}A_1 & C\\ 0 & B_1\end{bmatrix}$，故(10)等价于

$$r\begin{bmatrix}A_1 & C\\ 0 & B_1\end{bmatrix}=r(A_1)+r(B_1). \tag{11}$$

另外，$A_{11}M_4+M_1B_{11}=0$ 等价于

$$\begin{bmatrix}0 & A_{11}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1 & M_2\\ M_3 & M_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}M_1 & M_2\\ M_3 & M_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & B_{11}\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0, \tag{12}$$

由(2)、(4)及(5)得

$$P^{-1}\begin{bmatrix}0 & A_{11}\\0 & 0\end{bmatrix}PC+CQ\begin{bmatrix}0 & B_{11}\\0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}=0, \tag{13}$$

即

$$A_1C+CB_1=0. \tag{14}$$

综上所述在(11)和(14)的情况下，矩阵方程(4)有解，即矩阵方程(1)有解，故$\begin{bmatrix}A_1 & 0\\0 & B_1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}A_1 & C\\0 & B_1\end{bmatrix}$相似。

定理 3 仅给出了$\begin{bmatrix}A_1 & 0\\0 & B_1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}A_1 & C\\0 & B_1\end{bmatrix}$相似的充分条件，其逆命题并不成立。若$\begin{bmatrix}A_1 & 0\\0 & B_1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}A_1 & C\\0 & B_1\end{bmatrix}$相似，因 A_1 和 B_1 均为 k-幂零矩阵，故$\begin{bmatrix}A_1 & 0\\0 & B_1\end{bmatrix}$也为 k-幂零矩阵。

从而$\begin{bmatrix}A_1 & C\\0 & B_1\end{bmatrix}$为 k-幂零矩阵。所以

$$\begin{bmatrix}A_1 & C\\0 & B_1\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}A_1^k & \sum_{i=0}^{k-1}A_1^iCB_1^{k-1-i}\\0 & B_1^k\end{bmatrix}=0,$$

又因为

$$A_1^k=0,\ B_1^k=0,$$

故

$$\sum_{i=0}^{k-1}A_1^iCB_1^{k-1-i}=0.$$

当 k 为奇数时

$$\begin{aligned}&CB_1^{k-1}+A_1CB_1^{k-2}+A_1^2CB_1^{k-3}+\cdots+A_1^{k-2}CB_1+A_1^{k-1}C\\&=CB_1^{k-1}+A_1\left(CB_1+A_1C\right)B_1^{k-3}+\cdots+A_1^{k-2}\left(CB_1+A_1C\right)=0\end{aligned};$$

当 k 为偶数时

$$\begin{aligned}&CB_1^{k-1}+A_1CB_1^{k-2}+A_1^2CB_1^{k-3}+\cdots+A_1^{k-2}CB_1+A_1^{k-1}C\\&=\left(CB_1+A_1C\right)B_1^{k-2}+\cdots+A_1^{k-2}\left(CB_1+A_1C\right)=0\end{aligned}.$$

由此可知，$A_1C+CB_1=0$不是必要条件。

基金项目

河北省教育厅高等学校科学技术研究项目(Z2015009)。

参考文献

[1] 程世珍. 两个分块矩阵相似性研究[J]. 数学的实践与认识, 2005, 35(3): 191-194.

[2] 董庆华, 颜宁生. 对合矩阵的相似标准型与分解形式[J]. 邵阳学院学报(自然科学版), 2009, 6(4): 17-19.

[3] 王萼芳. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.

[4] Mitra, S.K. (1984) The Matrix Equations AX = C, XB = D. *Linear Algebra and Its Applications*, **59**, 171-181. https://doi.org/10.1016/0024-3795(84)90166-6

[5] Roth, R.E. (1952) The Equations AX-YB = C and AX-XB = C in Matrices. *Proceedings of the AMS—American Mathematical Society*, **A3**, 392-396. https://doi.org/10.2307/2031890