Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(4), 1168-1174
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.104126

Hans汉斯

非均匀复变解析函数零点的孤立性及惟一性

陈怡凡，张军奇，陶继成

中国计量大学应用数学系，浙江 杭州
Email: 1732013779@qq.com, 2571515108@qq.com, jchtaofd@sina.com

收稿日期：2021年3月22日；录用日期：2021年4月11日；发布日期：2021年4月28日

摘 要

本文把复变解析函数的孤立性定理及惟一性定理推广到非均匀复变解析函数上。通过对非均匀复变解析函数零点定义及性质的推广，给出非均匀复变解析函数的零点的孤立性定理及解析函数的惟一性定理。

关键词

非均匀复变函数，零点的孤立性定理，零点的唯一性定理

Solidarity and Uniqueness Theorems of Zeros of Heterogeneous Complex Analytic Functions

Yifan Chen, Hanqi Zhang, Jicheng Tao

Department of Applied Mathematics, China Jiliang University, Hangzhou Zhejiang
Email: 1732013779@qq.com, 2571515108@qq.com, jchtaofd@sina.com

Received: Mar. 22nd, 2021; accepted: Apr. 11th, 2021; published: Apr. 28th, 2021

Abstract

In this paper, the isolation theorem and uniqueness theorem of complex analytic functions are extended to heterogeneous complex analytic functions. By extending the definition of zero and the properties of analytic function of heterogeneous complex variable, the isolation theorem of zero and uniqueness theorem of analytic function of heterogeneous complex variable are given.

Keywords

Heterogeneous Complex Function, The Isolation Theorem of Zero, The Uniqueness Theorem of Analytic Function

文章引用: 陈怡凡, 张军奇, 陶继成. 非均匀复变解析函数零点的孤立性及惟一性[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 1168-1174. DOI: 10.12677/aam.2021.104126

1. 引言

在文献[1]中，作者推广复变函数理论到非均匀复变函数理论，建立了非均匀函数的解析性理论，获得了解析函数的一些判定定理，文献[2]进一步讨论了解析函数的积分理论，建立了 Cauchy 公式，Cauchy 定理，在这些理论基础上，文献[3] [4] [5] [6] [7]研究了解析函数的级数理论、解析函数与调和函数的关系、解析函数解一般曲线上的实积分，建立了泰勒定理、罗朗级数定理、留数定理和非均匀调和函数的积分表示。本文考虑到局部和整体的关系对研究数学唯一解的存在的意义，因此进一步推广文献[8]-[13]的复变函数理论的解析函数零点的孤立性和唯一性理论到非均匀复变函数上，利用唯一性讨论获得了一些具体区域解析函数的显示表达式。

2. 预备知识

本节给出一些有关于非均匀复数、以及非均匀复变函数的基本定义，和一些基本性质，具体可见参考文献[1]-[6]。

2.1. 非均匀复数的定义

本定义集合 $C_K=\{z\,|\,z=a+jb\}$，其中 a,b 均为实数 R 中的元素，同时 $j^2=-k,k\geq 0$。

在 C_K 中引入数乘运算，

$$z=a+jb, z\in C_K, m\in R, mz=ma+jmb,$$

在 C_K 中引入加法运算，

$$z_1=a_1+jb_1, z_2=a_2+jb_2, z_1\in C_K, z_2\in C_K,$$

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+j(b_1+b_2).$$

在加法和数乘运算构成线性空间，再引入如下乘法运算则构成域：

$$z_1z_2=(a_1a_2-kb_1b_2)+j(a_1b_2+a_2b_1).$$

定理 2.1 [1] 在上述数乘、加法和乘法运算，C_K 为 R 上的一个域，我们称其为非均匀复数域。

我们在复数域 C_K 上可以定义非均匀复数的模 $|\xi|_k$。

$$|\xi|_k=\sqrt{x^2+ky^2}\text{，其中 }\xi=x+jy, j^2=-k, k>0$$

则按照此定义得到的模、三角不等式是成立的。并且可以得出如下的三角表示和指数表示：

$$\xi=|\xi|_k\left(\cos\left(\sqrt{k}\varphi\right)+\frac{j}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}\varphi\right)\right)=|\xi|_k\,\mathrm{e}^{j\varphi}\text{，其中 }\tan\left(\sqrt{k}\varphi\right)=\frac{\sqrt{k}y}{x}$$

为了可以简化计算并更容易取得主值，我们可取 $0\leq\sqrt{k}\varphi<2\pi$，具体参见文献[5] [6]。

2.2. 非均匀复变函数的微分

下面给出非均匀复变函数的定义，导数以及解析性等概念，详见文献[1]：

定义 2.2 已知 g 是一个从 C_K 到 C_K 的映射，那么我们称 $g(z)$ 为 C_K 上的非均匀复函数。

定义 2.3 已知函数 $w=g(z)$ 在某一点 z_0 的邻域内，或包含该点的区域 D 内是有定义的，则可以考虑比值

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}=\frac{g(z_0+\Delta z)-g(z_0)}{\Delta z} \quad (\Delta z\neq 0)$$

如果当 z 按照任意方式趋于 z_0 时，即当 Δz 按照任意方式趋于 0 时，比值 $\Delta w/\Delta z$ 的极限都存在，且其值有限，则称此极限为函数 $g(z)$ 在 z_0 的导数，并记为 $g'(z_0)$，即

$$g'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0},$$

这时称函数 $g(z)$ 于点 z_0 可导。

定义 2.4 如果函数 $w=g(z)$ 在区域 D 内可微，则称 $g(z)$ 为区域 D 内的解析函数，或称函数 $g(z)$ 在区域 D 内解析。函数在某点解析，是指在该点的某一个邻域内是解析的，函数在某个闭域解析，是指在包含该闭域的某区域内解析。

2.3. 非均匀复变函数的积分

本小节给出非均匀复变函数有关于积分的一些基本概念，并入复变函数中已知的 Cauchy 积分公式以及 Cauchy 积分定理一样进行一些推广，详见参考文献[2]。

定义 2.5 已知非均匀复数域 Z_k 上存在一条有向曲线 C:

$$z=z(t) \quad (\alpha\le t\le\beta)$$

其中该曲线以 $a=z(\alpha)$ 为起点，$b=z(\beta)$ 为终点，$g(z)$ 沿该有向曲线 C 有定义，则可以沿着 C 从 a 到 b 的方向上，在 C 上取分点：$a=z_0,z_1,\cdots,z_{n-1},z_n=b$，这样则可以将曲线 C 划分为 n 个弧段，在从 z_{t-1} 到 z_t 的每一个弧段上任取一点 ξ_t，那么

$$S_n=\sum_{t=1}^{n}g(\xi_t)\Delta z_t,\quad \Delta z_t=z_t-z_{t-1}$$

随着分点的增多，弧段有一个明显加细的情况，如果所有弧段的和数 S_n 的极限存在且为 S，那么则可以称 $g(z)$ 沿 C (从 a 到 b)可积，S 就为其上的积分，记号为 $\int_C g(z)\mathrm{d}z$，其中 C 为积分路径。

定理 2.6 [2] 已知 D 非均匀复数域 C_K 上的单连通区域，且函数 $g(z)$ 在该单连通区域内解析，C 为 D 内任一条周线，则有，$\int_C g(z)\mathrm{d}z=0$。

定理 2.7 [2] 已知非均匀复数域 C_K 上存在区域 D 的边界周线(复周线) C，且函数 $g(z)$ 在 D 内解析，并且在区域及其边界上连续，则有

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{g(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \quad (z\in D)。$$

2.4. 非均匀幂级数

本小节我们主要对均匀复变函数的幂函数进行推广，从而得到非均匀复变函数的幂级数的有关定义，详见文献[3]。

定理 2.8 [3] 若非均匀幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 的收敛椭圆域是 $T:|z-a|_k<R$，则该幂级数在其椭圆域内绝对收敛并且内闭一致收敛至解析函数 $g(z)$，即

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, \tag{2.1}$$

同时在 T 内，幂级数(2.1)进行逐项求导，且如下等式成立，

$$\begin{aligned} g^{(p)}(z) &= c_p p! + c_{p+1}(p+1)P(p-1)\cdots 2(z-a)+\cdots \\ &+ c_n n(n-1)\cdots(n-p+1)(z-a)^p+\cdots \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中(2.1)和(2.2)中的收敛椭圆半径 R 相同，并且其中的系数 c_p 满足下面的关系

$$c_p=\frac{g^{(p)}(a)}{p!}(p=0,1,2,\cdots).$$

定理 2.9 [3] 已知 $g(z)$ 是区域 D 内的一非均匀解析函数，$a\in D$，那么只要椭圆 $T:|z-a|_k<R$ 且 $T\subset D$ 内，则 $g(z)$ 在 T 内就可以展开成非均匀幂级数：

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

其中系数 $c_p=\dfrac{g^{(p)}(a)}{p!}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{T_\rho}\dfrac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi-a)^{n+1}}(p=0,1,2,\cdots)$，$(T_\rho=|\xi-a|_k=\rho,\rho<R)$且展开唯一。

3. 非均匀复变解析函数零点的定义及性质

3.1. 非均匀复变解析函数零点的定义

定义 3.1 若函数 $g(z)$ 在区域 D 内非均匀解析，且在点 a 的值为零，那么称点 a 为非均匀解析函数 $g(z)$ 的零点。

如果非均匀解析函数 $g(z)$ 在 $|z-a|_k<R$ 内不恒为零，若 $g(z)$ 在点 a 展成幂级数满足下面的关系，$g(a)=g'(a)=\cdots=g^{(m-1)}(a)=0$，但 $g^{(m)}(a)\neq 0$，则称 m 为零点 a 的阶，a 则称为 $g(z)$ 的 m 阶零点。尤其是当 $m=1$ 时，该点 a 也称 $g(z)$ 的单零点。

3.2. 非均匀复变解析函数零点的性质

定理 3.2 若非均匀解析函数 $g(z)$ 不恒为零，则 a 为 $g(z)$ 的 m 阶零点的充要条件是

$$g(z)=(z-a)^m\varphi(z)$$

其中 $\varphi(z)$ 是邻域 $|z-a|_k<R$ 内的非均匀解析函数，并且满足 $\varphi(a)\neq 0$。

证明：必要性由假设有，

$$g(z)=\frac{g^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m+\frac{g^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(z-a)^{m+1}+\cdots$$

令 $\varphi(z)=\dfrac{g^{(m)}(a)}{m!}+\dfrac{g^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(z-a)+\cdots$

即可得结论。

充分性由假设有，

$$g(z)=(z-a)^m\varphi(z)$$

$\varphi(z)$ 在 a 处泰勒展开，注意到泰勒展开的唯一性得

$$g(z)=\frac{g^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m+\frac{g^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(z-a)^{m+1}+\cdots,$$

其中 $\varphi(a)=\dfrac{g^{(m)}(a)}{m!}\neq 0$。

定理 3.3 (零点的孤立性) 若非均匀解析函数 $g(z)$ 不恒为零，则 a 为 $g(z)$ 的零点，那么一定存在该点 a 的一个邻域，使得 a 是 $g(z)$ 该邻域内的唯一零点。

证明： 已知 a 为 $g(z)$ 的 m 阶零点，于是由定理 3.2， $g(z)=(z-a)^m\varphi(z)$ 其中 $\varphi(a)=\dfrac{g^{(m)}(a)}{m!}\neq 0$，从而由 $\varphi(z)$ 在点 a 的连续性和保号性，存在一邻域 $|z-a|_k<r$，使得 $\varphi(z)$ 于其中恒不为零，故 $g(z)$ 在其中无异于 a 的其他零点。

推论 3.4 已知函数 $g(z)$ 在区域 $K:|z-a|_k<R$ 内非均匀解析，在 K 内有 $g(z)$ 的一列零点 $z_n\,(z_n\neq a)$ 收敛于 a，则 $g(z)$ 在 K 内一定是恒等于零的。

证明： 因为 $g(z)$ 在区域 $K:|z-a|_k<R$ 内非均匀解析，那么该函数一定在 a 点连续，同时使得 $g(z_n)=0$，并且让 n 趋于无穷，然后取极限，则可以得到 $g(a)=0$。综上所述，该点 a 则一定是一个非孤立的零点。于是根据定理 3.3， $g(z)$ 在 K 内一定是恒为零的。

3.3. 非均匀复变解析函数的惟一性

本小节，我们利用非均匀解析函数零点的孤立性，讨论解析函数整体与局部的关系，建立下面的惟一性定理：

定理 3.6 (惟一性定理) 设 $g_1(z)$ 和 $g_2(z)$ 都是区域 D 内的非均匀解析函数；且在 D 内存在一个收敛于 $a\in D$ 的点列 $\{z_n\}(z_n\neq a)$，满足 $g_1(z_n)=g_2(z_n)$，则 $g_1(z)$ 和 $g_2(z)$ 在 D 内恒等。

证明： 令 $g(z)=g_2(z)-g_1(z)$，那么我们只需证明 $g(z)$ 在 D 内恒为零就行了。

已知 $g(z)$ 在 D 内解析，同时在 D 内有一列零点 $\{z_n\}(z_n\neq a)$ 收敛于 $a\in D$。如果区域 D 本身就是以 a 为心的圆，或者 D 就是整个 z 平面，那么根据推论 3.4 可知 $g(z)$ 恒等于零。

而在一般情形下，只要利用区域的道路连通性就可以获得，类似的证明参考文献[8] [9]。

推论 3.7 已知非均匀函数 $g_1(z)$ 和 $g_2(z)$ 在区域内非均匀解析 D，并且 D 内的某一子区域(或一小段弧)上 $g_1(z)=g_2(z)$，则在区域 D 内， $g_1(z)\equiv g_2(z)$。

例 3.1 设非均匀复变函数 $g_1(z)$ 和 $g_2(z)$ 在区域 D 内非均匀解析，且在 D 内 $g_1(z)g_2(z)\equiv 0$。

则， $g_1(z)$ 或 $g_2(z)$ 在 D 内恒为零。

证明： 若在区域 D 内存在 $z_0\in D$ 使 $g_1(z_0)\neq 0$，又因为 $g_1(z)$ 在 z_0 解析，所以连续，存在 z_0 的邻域 $K\subset D$，使 $g_1(z)$ 在 K 内恒不为零。由

$$g_1(z)g_2(z)\equiv 0,$$

可得

$$g_2(z)\equiv 0.$$

由定理 3.6 知 $g_2(z)\equiv 0\quad(z\in D)$。

例 3.2 这些恒等式 $\sin^2 z+\cos^2 z=1$， $\cos(2z)=1-2\sin^2 z$ 等，在 z 平面上也成立。

例 3.3 由推论 3.7 可以得到，数学分析中的初等函数的幂级数展开也可以推广到非均匀复变函数中，如：

$$\exp z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2}+\cdots,$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+\cdots,$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}+\cdots$$

注 3.8 惟一性定理揭示了解析函数一个非常深刻的性质，函数在区域 D 内整体的值，不仅仅是整体的值，也是局部的值。由此可以得到与复变解析函数相似的结论，非均匀复变解析函数在区域 D 的局部与整体之间有着十分紧密的内在联系。

利用唯一性定理，文献[9]的 178 页的习题进一步推广到非均匀复变函数上，获得如下命题：

命题 3.9 设区域 D 包含实轴上的区间 $(a,b)=I$，$g(z)=p(x,y)+jq(x,y)$ 在 D 内解析，且 $p(z,0)+jq(z,0)$ 在 D 内解析，则必有 $g(z)=p(z,0)+jq(z,0)$，$\forall z\in D$。

利用这个命题，可以方便地将含有 x,y 的解析函数化简为仅含单变元 $z=x+jy$ 的形式。

利用旋转和平移可以把命题 3.9 推广到更一般的情况：

定理 3.10 设 $g(z)=p(x,y)+jq(x,y)$ 在区域 D 内非均匀解析，$a=a_0+ja_1\in D$ 且 $p(z-ja_1,a_1)+jq(z-ja_1,a_1)$ 在 D 内非均匀解析，则必有 $g(z)=p(z-ja_1,a_1)+jq(z-ja_1,a_1)$，$\forall z\in D$。

证明： 因为 $a=a_0+ja_1\in D$，在 D 内存在邻域 $U=\{z\,|\,|z-a|<r,r>0\}$，作区域 $D_0=\{z'\,|\,z'=z-a,z\in D\}$，$U_0=\{z'\,|\,z'=z-a,z\in U\}$，则 $U_0=\{z'\,|\,|z'|<r\}\subset D_0$，在 z' 平面的区域 D_0 内有实轴的一段区间 $(-r,r)$，记 $z'=z-a$，$z'=x'+jy'$，令 $f(z')=g(z)$，则有

$$\begin{aligned}f(z')=g(z)&=p(x,y)+jq(x,y)\\&=p(x'+a_0,y'+a_1)+jq(x'+a_0,y'+a_1)\\&=u(x',y')+jv(x',y')\end{aligned}$$

且 $f(z')$ 在区域 D_0 内关于 z' 解析，$p(z-ja_1,a_1)+jq(z-ja_1,a_1)$ 在 D 内解析，从而有 $u(z',0)+jv(z',0)$ 在区域 D_0 内关于 z' 解析，因此推论 3.9 的条件成立，在区域 $f(z')=u(z',0)+jv(z',0)$，即 $g(z)=p(z-ja_1,a_1)+jq(z-ja_1,a_1)$，$\forall z\in D$。

注 3.11 定理 3.10 可以看成命题 3.9 的推广，事实上，当 a 在实轴上时，$a_1=0$，就是命题 3.9。

下面利用旋转推广命题 3.9：

定理 3.12 设 $g(z)=p(x,y)+jq(x,y)$ 在区域 D 内解析，$a=|a|_k\left(\cos\left(\sqrt{k}\varphi\right)+\frac{j}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}\varphi\right)\right)=|a|_k\,\mathrm{e}^{j\varphi}\in D$，且 $m(z)$ 在 D 内解析，其中 $m(z)$ 为下面函数，

$$\begin{aligned}m(z)=p&\left(z\cos\left(\sqrt{k}\varphi\right)\mathrm{e}^{-j\varphi},\frac{z}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}\varphi\right)\mathrm{e}^{-j\varphi}\right)\\&+jq\left(z\cos\left(\sqrt{k}\varphi\right)\mathrm{e}^{-j\varphi},\frac{z}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}\varphi\right)\mathrm{e}^{-j\varphi}\right)\end{aligned}$$

则必有 $g(z)=m(z)$，$\forall z\in D$。

证明： 因为 $a=|a|_k\left(\cos\left(\sqrt{k}\varphi\right)+\frac{j}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}\varphi\right)\right)=|a|_k\,\mathrm{e}^{j\varphi}\in D$，在 D 内存在邻域 $U=\{z\,|\,|z-a|<r,r>0\}$，作区域 $D_0=\{z'\,|\,z'=z\mathrm{e}^{j\varphi},z\in D\}$，$U_0=\{z'\,|\,z'=z\mathrm{e}^{-j\varphi},z\in U\}$，则 $U_0=\{z'\,|\,\left|z'-|a|_k\right|<r\}\subset D_0$，在 z' 平面的区域 D_0 内有实轴的一段区间 $\left(-r+|a|_k,r+|a|_k\right)$，记 $z'=z\mathrm{e}^{-j\varphi}$，$z'=x'+jy'$，令 $f(z')=g(z)$，则有

$$\begin{aligned} f(z') &= g(z) = p(x,y) + jq(x,y) \\ &= p\left(x'\cos\left(\sqrt{k}\varphi\right) - y'\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}\varphi\right), \frac{x'}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}\varphi\right) + y'\cos\left(\sqrt{k}\varphi\right)\right) \\ &\quad + jq\left(x'\cos\left(\sqrt{k}\varphi\right) - y'\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}\varphi\right), \frac{x'}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}\varphi\right) + y'\cos\left(\sqrt{k}\varphi\right)\right) \\ &= u(x',y') + jv(x',y') \end{aligned}$$

且 $f(z')$ 在区域 D_0 内关于 z' 解析，$m(z)$ 在 D 内解析，从而有， $u(z',0)+jv(z',0)$ 在区域 D_0 内关于 z' 解析，且在实区间 $\left(-r+|a|_k, r+|a|_k\right)$ 有 $g(z)=m(z)$，因此命题 3.9 的条件成立，在区域 $f(z')=u(z',0)+jv(z',0)$，即 $g(z)=m(z)$， $\forall z \in D$ 。

注 3.13 根据上面的结论，若函数是解析的，则部分性质决定整体的性质，并且在适当的条件下进一步证明了文献[6]的定理 3.2 的结论。

致　谢

作者对审稿人提出的宝贵意见表示感谢！本课题的研究得到中国计量大学 23 届大学生科研计划项目(2020x23078)，2020 年中国计量大学大学生开放实验项目(XL2020082)和 2020 年校级一流本科课程建设项目(200113)的资助。

参考文献

[1] 赵雪娇，陈雲，陶继成. 非均匀复数和非均匀复变函数[J]. 应用数学进展, 2017, 6(1): 69-77.

[2] 陈雲，赵雪娇，陶继成. 非均匀复变函数的积分[J]. 应用数学进展, 2017, 6(2): 153-164.

[3] 杨彦晖，江宇婕，陶继成. 非均匀复变函数的级数理论[J]. 应用数学进展, 2020, 9(2): 178-186.

[4] 杨彦晖，江宇婕，陶继成. 非均匀洛朗级数和孤立奇点分类[J]. 教学方法创新与实践, 2020, 3(3): 1-5.

[5] 俞荣杰，郑允望，陶继成. 几类特殊的非均匀解析函数和非均匀泊松型积分公式[J]. 高等数学研究，2021. (未出版)

[6] 郑允望，俞荣杰，陶继成. 非均匀解析函数与非均匀调和函数的刻画[J]. 中国计量大学学报，2020，31(100): 531-538.

[7] 张罕奇，陈怡凡，陶继成. 非均匀复变函数的留数理论[J]. 应用数学进展, 2021, 10(2): 587-597.

[8] 戴滨林，杨世海. 复变函数[M]. 上海：复旦大学出版社, 2019.

[9] 钟玉泉，复变函数论[M]. 北京：高等教育出版社, 2013.

[10] 龚昇. 简明复分析[M]. 合肥：中国科学技术大学出版社, 2009.

[11] Ahlfors, L. (1990) Complex Analysis. China Machine Press, Beijing.

[12] Churchill, R. (1960) Complex Variables and Applications. McGraw-Hill Book Company Inc., New York.

[13] Rudin, W. (1974) Real and Complex Analysis. Osborne McGraw-Hill, New York.