Advances in Applied Mathematics 应用数学进展**, 2021, 10(4), 1222-1228**
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.104132

Hans汉斯

Cantor集与Cantor函数性质探究

栾佳璇

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连
Email: luan_3590@163.com

收稿日期：2021年3月25日；录用日期：2021年4月15日；发布日期：2021年4月28日

摘 要

Cantor集是由德国数学家格奥尔格·康托尔在1883年引入的。因其构思精巧且性质独特，Cantor集应用广泛并且为众多数学问题提供了解决的思路和方法。而Cantor函数是由Cantor集构造的，它的特异性质也可以应用在很多数学问题中。它们特殊奇妙的性质使得其获得无与伦比的魅力，吸引了众多数学工作者对它进行探索和研究。本文从Cantor集与Cantor函数的构造出发，重点探讨了Cantor集与Cantor函数的性质。

关键词

Cantor集，Cantor函数，Cantor集性质，Cantor函数性质

Research on the Properties of Cantor Sets and Cantor Functions

Jiaxuan Luan

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: luan_3590@163.com

Received: Mar. 25th, 2021; accepted: Apr. 15th, 2021; published: Apr. 28th, 2021

Abstract

The Cantor set was introduced by the German mathematician Georg Cantor in 1883. Because of its ingenious conception and unique nature, Cantor set is widely used and provides ideas and methods for solving many mathematical problems. Cantor function is constructed from Cantor set, and its special properties can also be applied to many mathematical problems. Their special and

文章引用: 栾佳璇. Cantor 集与 Cantor 函数性质探究[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 1222-1228.
DOI: 10.12677/aam.2021.104132

wonderful nature makes them incomparable charm, which attracts many mathematicians to explore and study them. Starting from the construction of Cantor set and Cantor function, this paper mainly discusses the properties of Cantor set and Cantor function.

Keywords

Cantor Set, Cantor Function, Cantor Set Properties, Cantor Function Properties

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

Cantor 集是由德国数学家格奥尔格·康托尔在 1883 年引入的。因其构思精巧且性质独特，Cantor 集应用广泛并且为众多数学问题提供了解决的思路和方法。而且，康托尔和其他数学家通过考虑 Cantor 集奠定了现代点集拓扑学的基础。而 Cantor 函数是定义在 $[0,1]$ 上的一个连续的、单调递增的、几乎处处可微的函数，在实际问题的求解中扮演着重要的角色，而且 Cantor 函数特殊奇妙的性质使得其获得无与伦比的魅力，吸引了众多数学工作者对它进行探索和研究。如它不满足 Newton-Leibniz 公式，它可以将疏朗集映成连续区间，它在 $[0,1]$ 上的导数 $\Theta'(x)$ 几乎处处等于 0，即 $\Theta'(x)=0$ a.e.于 $[0,1]$ 且 $\int_{[0,1]}\Theta'(x)\mathrm{d}m=0$ 等。如此多特殊且奇妙的性质使得 Cantor 函数有着无与伦比的魅力吸引了众多数学工作者对它进行探索和研究。

因此，Cantor 集与 Cantor 函数的研究备受国内外学者的关注。本文从 Cantor 集与 Cantor 函数的构造出发，重点探讨了 Cantor 集与 Cantor 函数的性质。

2. Cantor 集

2.1. Cantor 集构造

Cantor 集是数学领域中一个十分重要的点集，也称为 Cantor 三分集或者 Cantor 完全集。有界闭区间 $[a,b](a<b)$ 上的 Cantor 集的构造思想如下：

将有界闭区间 $[a,b]$ 三等分，如图 1。

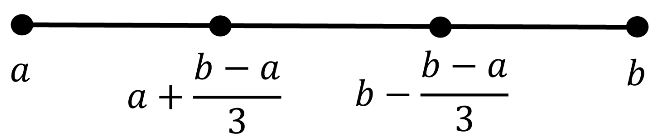

Figure 1. Schematic diagram of trisection of bounded closed interval $[a,b]$

图 1. 有界闭区间 $[a,b]$ 三等分示意图

定义算子 F：

$$F^1=F([a,b])=\left[a,a+\frac{b-a}{3}\right]\cup\left[b-\frac{b-a}{3},b\right];$$

$$F^2=F\left(F\left([a,b]\right)\right)=\left[a,a+\frac{b-a}{3^2}\right]\cup\left[a+\frac{2(b-a)}{3^2},a+\frac{3(b-a)}{3^2}\right]$$
$$\cup\left[b-\frac{3(b-a)}{3^2},b-\frac{2(b-a)}{3^2}\right]\cup\left[b-\frac{b-a}{3^2},b\right].$$

以此类推得到

$$\begin{aligned}F^k&=F\left(F^{k-1}\left([a,b]\right)\right)\\&=\left[a,a+\frac{b-a}{3^k}\right]\cup\left[a+\frac{2(b-a)}{3^k},a+\frac{3(b-a)}{3^k}\right]\cup\cdots\\&\cup\left[b-\frac{(3^k-3)(b-a)}{3^k},b-\frac{(3^k-2)(b-a)}{3^k}\right]\cup\left[b-\frac{(3^k-1)(b-a)}{3^k},b\right].\end{aligned}$$

这样就得到了集列 $\left\{F^k\left([0,1]\right)\right\}$。

显然，该集列是递降的，并由单调有界定理知其是收敛集列。

记集列 $\left\{F^k\left([0,1]\right)\right\}$ 的极限是 Cantor 集 C，即

$$C=\lim_{k\to\infty}F^k\left([a,b]\right).$$

为 Cantor(三分)集，或者 Cantor 完全集，简称为 Cantor 集。

称 $G\triangleq\left([0,1]\setminus C\right)$ 为 Cantor 余集。

2.2. Cantor 集性质及证明

以下性质证明中用定义在 $[0,1]$ 上 Cantor 函数代替定义在 $[a,b]$ 上 Cantor 函数，因为有 $[0,1]\sim[a,b]$。其证明过程如下：

注意到

$$\varphi(t)=(1-t)a+tb,t\in[0,1]$$

是区间 $[0,1]$ 到区间 $[a,b]$ 的一个一一对应，故区间 $[0,1]$ 与区间 $[a,b]$ 有相同的基数 c。

性质 1 Cantor 集是有界闭集。

证 对 $\forall i\in\mathbb{N}_+$，$F^i\left([0,1]\right)$ 是 2^i 个长度为 3^{-i} 的互不相交的闭区间的并集，而且由构造过程可知 $\left\{F^k\left([0,1]\right)\right\}$ 是一个递降集列，由单调有界定理知该集列收敛，而且其极限集是一个递降闭集列的交，故 C 是有界闭集。

性质 2 Cantor 集是非空自密集。

证 设 $\forall x_0\in C$，则 $x_0\in F^i\left(i=1,2,\cdots\right)$，即对每一个 i，x_0 属于长度为 $\frac{1}{3^i}$ 的 2^i 个闭区间中的一个。于是，对于 $\forall\delta>0$，$\exists n$，满足 $\frac{1}{3^i}<\delta$，使得 F^i 中包含 x_0 的闭区间含于 $\left(x_0-\delta,x_0+\delta\right)$。这个闭区间内有两个端点，它们是 C 中的点而且总有一个不是 x_0。因此，说明 x_0 是 C 的极限点。又由 x_0 的任意性可知 $C'\supset C$，故 C 为非空自密集。

注： 由性质 1 和性质 2 可知，Cantor 集是完全集。

性质 3 Cantor 集是疏朗集[1]。

证 若想证明 C 是疏朗集，只需证明 C 的内部是空集即可。

对任意的点 $x_0\in C$，对 $\forall\delta>0$，取 $i\in\mathbb{N}_+$，使得 $3^{-i}<\delta$。

由于 $F^i([0,1])$ 是 2^i 个互不相交的长度为 3^{-i} 的闭区间的并，故 x_0 的 δ-邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内必含有不属于 $F^i([0,1])$ 的点，从而含有 G 中的点。

设 $\forall y_0\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap G$。因为 y_0 是开集 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap G$ 中的点，故存在 $\varepsilon>0$，使得 $\bigcup(y_0,\varepsilon)\subset(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap G$，亦即 $\bigcup(y_0,\varepsilon)\subset(x_0-\delta,x_0+\delta)$，$\bigcup(y_0,\varepsilon)\cap C=\varnothing$。由 y_0 的任意性知 C 的内部是空集，即 C 是疏朗集。

性质 4 Cantor 余集是开集，因它是 $[a,b]$ 中可列个互不相交的开区间的并，且这些开区间的长度之和为 1。

证 事实上，

$$G=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left([0,1]\setminus F^i([0,1])\right)$$

是可列个互不相交的开区间的并，而 $[0,1]\setminus F^i([0,1])$ 是其中那些长度为 $\frac{1}{3^i}$ 的互不相交的开区间的并，共 2^{i-1} 个。它们的长度之和为 $\frac{2^{i-1}}{3^i}$，故构成 G 的那些开区间的长度之和为

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{i-1}}{3^i}=1.$$

性质 5 Cantor 集是零测度集。

证 事实上，因为

$$C=\bigcap_{i=1}^{\infty}F^i,$$

其中的 F^i(在构造 C 的过程中第 i 步的集合)是 2^i 个长度为 3^{-i} 的互不相交的闭区间的并集，所以我们有

$$m^*(C)\le m^*(F^i)\le 2^i\cdot 3^{-i},$$

从而得知 $m(C)=m^*(C)=0$。故，Cantor 集是零测度集。

性质 6 Cantor 集 C 具有连续基数 c [2]。

证 若要证明 C 具有连续基数 c，只需证明 $C\sim[0,1]$。

将 $[0,1]$ 中的点用三进制小数表示，则对 $[0,1]$ 中任意一点 $x\in[0,1]$ 有

$x=0.a_1a_2\cdots a_k\cdots=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots+\frac{a_k}{3^k}+\cdots$，其中 $a_i=0,1,2\,(i=1,2,\cdots,k,\cdots)$。

设 $\forall x_0\in[0,1]\cap C$。因 x_0 为 C 中的点，由 Cantor 集的构造过程可知，将 x_0 用上述三进制小数表示成 $x_0=0.b_1b_2\cdots b_k\cdots$ 具有特点 $b_i=0,2\,(i=1,2,\cdots,k,\cdots)$。

作映射 $\varphi:C\to[0,1]$，$0.b_1b_2\cdots b_k\cdots\mapsto 0.c_1c_2\cdots c_k\cdots$，其中 $c_i=\begin{cases}0,b_i=0\\1,b_i=2\end{cases}(i=1,2,\cdots,k,\cdots)$ 显然，φ 是 C 到 $[0,1]$ 的一个一一对应，则称集合 C 与集合 $[0,1]$ 对等。

故知 $\overline{\overline{C}}=\overline{\overline{[0,1]}}=c$。

3. Cantor 函数

3.1. Cantor 函数构造

定义 $\Theta(0)=0$，$\Theta(1)=1$；在 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 上，定义 $\Theta(x)=\frac{1}{2}$；在 $\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)$ 上，定义 $\Theta(x)=\frac{1}{2^2}$；在 $\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)$

上，定义$\Theta(x)=\frac{3}{2^2}$。

一般地，对任意自然数 k，在

$$\left(\frac{1}{3^k},\frac{2}{3^k}\right),\left(\frac{7}{3^k},\frac{8}{3^k}\right),\left(\frac{19}{3^k},\frac{20}{3^k}\right),\cdots,\left(\frac{3^k-2}{3^k},\frac{3^k-1}{3^k}\right)$$

上，$\Theta(x)$的值分别定义为

$$\frac{1}{2^k},\frac{3}{2^k},\frac{5}{2^k},\cdots,\frac{2^k-1}{2^k}.$$

当$x\in C,x\notin\{0,1\}$时，定义

$$\Theta(x)=\sup\{\Theta(t)\mid t\in G,t<x\},$$

称此函数为 Cantor 函数。

即

$$\Theta(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & x=1\\ \frac{1}{2} & x\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\\ \frac{1}{2^2} & x\in\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)\\ \frac{3}{2^2} & x\in\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)\\ \vdots & \vdots\\ \frac{1}{2^k} & x\in\left(\frac{1}{3^k},\frac{2}{3^k}\right)\\ \frac{3}{2^k} & x\in\left(\frac{7}{3^k},\frac{8}{3^k}\right)\\ \frac{5}{2^k} & x\in\left(\frac{19}{3^k},\frac{20}{3^k}\right)\\ \vdots & \vdots\\ \frac{2^k-1}{2^k} & x\in\left(\frac{3^k-2}{3^k},\frac{3^k-1}{3^k}\right)\\ \vdots & \vdots\\ \sup\{\Theta(t)\mid t\in G,t<x\} & x\in C,x\notin\{0,1\}\end{cases}$$

3.2. Cantor 函数性质及证明

性质 1 Cantor 函数是$[0,1]$上连续的单调不减函数[3]。

证首先证明 Cantor 函数是单调不减的，可由上述的 Cantor 函数构造过程及其定义知，对$\forall x<y\in[0,1]$有$\Theta(x)\le\Theta(y)$，故 Cantor 函数是$[0,1]$上的单调不减函数。又由 Cantor 函数的定义可知$\Theta([0,1])=[0,1]$，所以 Cantor 函数不可能有间断点，Cantor 函数连续。

性质 2 Cantor 函数在$[0,1]$上几乎处处可微。

证 由于 Cantor 函数 $\Theta(x)$ 是在闭区间 $[0,1]$ 上的单调函数，又因为闭区间上的单调函数的不可微点集为零测集[4]，所以 Cantor 函数在 $[0,1]$ 上的不可微点集是零测集，即 Cantor 函数在 $[0,1]$ 上几乎处处可微。

性质 3 Cantor 函数在 $[0,1]$ 中的可微点组成的集合的基数为 c。

证 Cantor 函数在 $[0,1]$ 中的可微点组成的集合为 G，不可微点组成的集合为 C。由 Cantor 集的性质 5 知 $mC=0$，易建立集合 G 与集合 $[0,1]$ 之间的一一对应。因此，$\overline{\overline{G}}=\overline{\overline{[0,1]}}=c$。

性质 4 Cantor 函数不是绝对连续函数。

证 注意到 Cantor 函数是依 Cantor 完全集 C 的结构构造的，$C=\lim_{k\to\infty}F^k([0,1])$。而 $F^k([0,1])$ 是 2^k 个互不相交的长度为 $\frac{1}{3^k}$ 的闭区间的并，故对任意的 $\delta>0$，存在 $k\in\mathbb{N}_+$，使 $2^k\cdot\frac{1}{3^k}<\delta$。

将构成 $F^k([0,1])$ 的所有闭区间从左到右记为

$$[x_1,y_1],[x_2,y_2],\cdots,[x_p,y_p],$$

其中

$$p=2^k,$$

$$0=x_1<y_1\le x_2<y_2\le\cdots\le x_p<y_p=1,$$

$$y_i-x_i=\frac{1}{3^k},\ i=1,2,\cdots,p.$$

所以

$$\sum_{i=1}^{k}|y_i-x_i|=\frac{p}{3^k}=\frac{2^k}{3^k}<\delta.$$

由于 Cantor 函数连续，且在 Cantor 余集 G 的每个构成区间上都取常值，故

$$0=\Theta(x_1)<\Theta(y_1)=\Theta(x_2)<\Theta(y_2)=\cdots=\Theta(x_p)<\Theta(y_p)=1,$$

因此有

$$\sum_{i=1}^{k}|\Theta(y_i)-\Theta(x_i)|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

故 Cantor 不是绝对连续函数。

注：Cantor 函数 $\Theta(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是常值函数且几乎处处可微，且 $\Theta'(x)=0$ a.e.于 $[0,1]$，故 Cantor 函数是 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 奇异函数。

4. Cantor 集和 Cantor 函数的应用

Cantor 集和 Cantor 函数的构思巧妙，性质十分特别。Cantor 集是 Cantor 在解三角级数问题时做出来的，它具有若干重要特征。Cantor 函数是由 Cantor 集构造的，它的特异性质也可以应用在很多数学问题中。

4.1. Cantor 集可作为否定命题的反例

i) Lebesgue 可测集一定是 Borel 集[5]。

Cantor 集不为 Borel 集且它的外测度为零，故为 Lebesgue 可测集。

ii) 测度为零的集合一定是可列集[6]。

因 Cantor 集 $\overline{\overline{C}}=c$，故其不是可列集且测度为零。

iii) 疏朗集均为孤立点集。

Cantor 集为疏朗集，但$C'=C$是完全集，故不为孤立点集。

iv) 不含有孤立点的非空闭集一定含有内点。

Cantor 是不含有孤立点的非空闭集，但由于其还是疏朗集，故其没有内点。

4.2. Cantor 函数可作为否定命题的反例

i) 在连续映射下可测集的象一定可测。

Cantor 函数$\Theta(x)$，令$f(x)=\dfrac{x+\Theta(x)}{2}$，则$f:[0,1]\to[0,1]$为严格单调增的连续函数。并使得$m(f(C))=\dfrac{1}{2}$，其中$C$为 Cantor 集，取不可测集$W\subset f(C)$，则有$f^{-1}(W)\subset C$可测，使$f\left(f^{-1}(W)\right)=W$不可测。

ii) 在连续映射下可测集的原象一定可测。

上例中的函数f为$[0,1]$上的同胚映射，且其反函数f^{-1}在$[0,1]$上连续递增，可以使得可测集$f^{-1}(W)$的原象W不可测。

iii) 所有连续函数均满足 Newton-Leibniz 公式。

Cantor 函数$\Theta(x)$不满足 Newton-Leibniz 公式。Cantor 函数$\Theta(x)$在$[0,1]$上几乎处处可微，且$\Theta'(x)=0$ a.e.于$[0,1]$，在$[0,1]$上几乎处处连续，故R-可积。但是

$$\int_0^1\Theta'(x)\mathrm{d}x=0<1=\Theta(1)-\Theta(0).$$

故不满足 Newton-Leibniz 公式。

参考文献

[1] 董大校. Cantor 集性质的应用[J]. 玉溪师范学院学报, 2009, 25(8): 18-22.

[2] 周民强. 实变函数论[M]. 第 3 版. 北京: 北京大学出版社, 2016.

[3] 李翠香, 石凌, 刘丽霞. Cantor 集的性质及应用[J]. 大学数学, 2011, 27(2): 156-158.

[4] 吴杰, 夏雪. 著名的 Cantor 函数及其应用实例[J]. 高等函授学报(自然科学版), 2004, 18(5): 26-27.

[5] 黄珊. 对 Cantor 函数单调连续性的探究[J]. 新课程(教研版), 2012(5): 106-107.

[6] 王晶昕, 王炜, 任咏红. 实变函数论[M]. 北京: 科学出版社, 2006.