Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(5), 1550-1558**
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.105165

一类 Holling-III 型的合作捕食者-食饵模型的 Hopf 分支研究

阮 虎

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: 1634248454@qq.com

收稿日期：2021年4月17日；录用日期：2021年5月2日；发布日期：2021年5月21日

摘 要

本文研究带 **Holling-III** 型功能反应合作捕食者-食饵模型的稳定性与 **Hopf** 分支．利用线性化分析和分支理论，首先，讨论平衡点的存在性及唯一正平衡点的局部渐近稳定性，然后以 α^* 为分支参数，给出 **Hopf** 分支存在的条件．最后，利用规范型理论和中心流形定理分析 **Hopf** 分支的方向及分支周期解的稳定性．

关键词

合作模型，**Holling-III** 型功能反应，平衡点，稳定性，**Hopf** 分支

Hopf Bifurcation Analysis of a Holling-III Cooperation Predator-Prey Model

Hu Ruan

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: 1634248454@qq.com

Received: Apr. 17^{th}, 2021; accepted: May 2^{nd}, 2021; published: May 21^{st}, 2021

文章引用: 阮虎. 一类 Holling-III 型的合作捕食者-食饵模型的 Hopf 分支研究[J]. 应用数学进展, 2021, 10(5): 1550-1558. DOI: 10.12677/aam.2021.105165

Abstract

In this paper, we investigate the stability and Hopf bifurcation of a cooperation predator-prey model with Holling-III. Using the linearization analysis and bifurcation theory, firstly, the existence of the equilibrium and the local asymptotic stability of the unique positive equilibrium points are discussed, and then the condition of the existence of Hopf bifurcation is given by taking the α^* as the bifurcation parameter. Finally, using the canonical theory and the central manifold theorem, the direction of Hopf bifurcation and the stability of periodic solution of bifurcation are analyzed.

Keywords

Cooperation Model, Holling-III Functional Response, Equilibrium Points, Stability, Hopf Bifurcation

1. 介绍

自从1920年 Lotka-Volterra 的开创性著作以来, 捕食者与食饵种群间的相互作用是种群动力学重要的研究对象之一 [1–4], 合作模型 [5,6] 便是其中的一种. 在文献 [7], Berec 提出了一种早期的合作狩猎数学模型, 该模型利用常微分方程对具有 Holling-II 型函数响应的捕食-食饵相互作用进行了模型. 随后, Alves 和 Hilker 建立了以下具有 Holling-I 型功能响应的合作模型

$$\begin{cases} \dot{N} = rN(1-\frac{N}{K}) - (\lambda+\alpha P)NP, \\ \dot{P} = e(\lambda+\alpha P)NP - mP, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 N 和 P 分别表示食饵和捕食者种群的密度. 参数 r 代表捕食者的内禀增长率. K 是被捕食者的承载能力, e 是转换效率. m 为捕食者种群的自然死亡率. λ 为捕食者和被捕食者的攻击率. α 是捕食者狩猎合作的参数. 此后捕食者 -食饵相互作用的合作模型引起了广泛的关注和深入的研究 [8–14]. 其中, 文献 [8–11] 讨论了带 Allee 效应的 Holling-I 捕食者 -食饵模型, 给出正平衡点的存在条件及局部稳定性, 并证明了平衡点处 Hopf 分支的存在性. 文献 [12] 分析了带有食饵

保护区的 Rosenzweig-MacArthur 模型的稳定性和 Hopf 分支的存在性. 文献 [13, 14] 考虑了带有 Holling-Tanner 捕食者-食饵模型的局部稳定性. 在研究捕食者-食饵系统时, 功能反应是影响系统动力学行为的重要因素 [15], 其中应用最广泛的是 Holling-II 型功能反应 [16]. 文献 [17] 对带有 Holling-II 型功能反应的 Rosenzweig-MacArthur 系统进行了研究, 分析了系统所有平衡点的稳定性并发现在正平衡点附近有 Hopf 分支产生. 在文 [17] 中作者还将模型 (1.1) 扩展到 Holling-II、Holling-III、 Holling-IV 型功能反应. 特别的, 具有-II型功能反应和捕猎合作的捕食者-食饵模型可以写成

$$\begin{cases} \dot{X} = rX(1-\frac{X}{K}) - \frac{(\lambda+\alpha Y)XY}{1+H(\lambda+\alpha Y)X}, \\ \dot{Y} = \frac{e(\lambda+\alpha Y)XY}{1+H(\lambda+\alpha Y)X} - mY, \end{cases} \tag{1.2}$$

该模型类似于经典的合作结构模型, 其中 H 是捕食者传递猎物的时间. 显然, 当 $\alpha = 0$ 时, 模型 (1.2) 是经典的-II型 Lotka-Volterra 模型. 为方便起见, 我们采用无量纲变量变换

$$x = \frac{e\lambda}{m}X, \;\; y = \frac{\lambda}{m}Y, \;\; \tau = mt.$$

可将系统 (1.2) 约化为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(1-x) - \frac{(1+\alpha y)xy}{1+h(1+\alpha y)x}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{(1+\alpha y)xy}{1+h(1+\alpha y)x} - y, \end{cases} \tag{1.3}$$

文献 [18] 是通过引入线性功能反应来研究食饵-捕食者间的相互作用的, 但在生物学意义下, 线性功能反应对捕食量没有限制, 因此, 我们在系统 (1.3) 中引入 Holling-III 型功能反应, 得到如下模型

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(1-x) - \frac{(1+\alpha y)x^2 y}{1+h(1+\alpha y)x^2}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = sy(1-\frac{y}{x}), \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 α 为合作参数, $\frac{(1+\alpha y)x^2 y}{1+h(1+\alpha y)x^2}$ 为 Holling-III 型功能反应. 系统 (1.4) 中所有参数均为正数. 本文首先分析系统 (1.4) 平衡点的存在性和稳定性; 然后讨论 Hopf 分支的存在性, 并通过规范型理论和文献 [19] 的方法分析 Hopf 分支的方向及分支周期解的稳定性, 最后解释本文的主要结论.

2. 平衡点的存在性和稳定性

2.1. 平衡点的存在性

对于模型 (1.4) ,

(i) 总存在半平凡平衡点 $E_1 = (1, 0)$;

(ii) 设 $\overline{E} = (\overline{x}, \overline{y})$ 是系统 (1.4) 的正平衡解. 然后我们有

$$\overline{y} = \overline{x}$$

并且 $\overline{x}$ 满足下式方程的一个正解

$$\rho_0 x^4 + \rho_1 x^3 + \rho_2 x^2 + x - 1 = 0 \tag{2.1}$$

其中 $\rho_0 = \alpha h,\ \rho_1 = \alpha(1-h)+h,\ \rho_2 = 1-h,$
因为 $\rho_0 > 0$, 但是 ρ_1 和 ρ_2 可能为正或为负. 因此, 我们考虑了以下 3 个区域:

$$\Omega_1 = \{(\alpha,h)|\alpha,h>0,\rho_2>0\};$$

$$\Omega_2 = \{(\alpha,h)|\alpha,h>0,\rho_1>0,\rho_2<0\};$$

$$\Omega_3 = \{(\alpha,h)|\alpha,h>0,\rho_1<0,\rho_2>0\}.$$

(i) 当模型的参数值选择区域 Ω_1 , 方程 (2.1) 仅仅改变一次符号, 因此通过 Descartes 符号准则, 方程 (2.2) 有唯一的正平衡解, 因而系统 (4) 有唯一的正平衡点, 记

$$E^* = (x^*, y^*);$$

(ii) 当模型的参数值选择区域 Ω_2 , 方程 (2.1) 有 3 次符号的改变, 再此使用 Descartes 符号准则, 方程 (2.2) 有 3 个正平衡解, 因而系统 (4) 有 3 个正平衡点, 记

$$E^* = (x_j, y_j),\ j = 1,2,3;$$

(iii) 当模型的参数值选择区域 Ω_3 , 方程 (2.1) 也有 3 次符号的改变, 通过 Descartes 符号准则判断, 方程 (2.2) 有 3 个正平衡解, 因而系统 (4) 有 3 个正平衡点, 记

$$E^* = (x_j, y_j),\ j = 4,5,6.$$

2.2. 平衡点的局部稳定性

系统 (1.4) 在平衡点 $\overline{E} = (\overline{x}, \overline{y})$ 的 Jacobi 矩阵如下

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

下面通过计算系统 (1.4) 在每个平衡点处的 Jacobi 矩阵的特征值, 来确定这些平衡点的稳定性.

定理 1 半平凡平衡点 $E_0 = (1,0)$ 是鞍点.

证明 系统 (1.4) 在平衡点 E_0 处的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J}_{E_0} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{1+h} \\ 0 & s \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

矩阵 (2.3) 的特征值为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = s$. 因此, 平衡点 E_0 是不稳定的.

定理 2 在区域 Ω_1 中, 因为 $-s(s_0+b) > 0$, 假设 $s > s_0$ 成立, 则系统 (1.4) 的正常数平衡点 $E^* = (x^*, y^*)$ 是局部渐近稳定的; 若 $s > s_0$ 成立, 则 $E^* = (x^*, y^*)$ 是不稳定的.

证明 系统 (1.4) 在平衡点 E^* 处的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J}_{E^*} = \begin{pmatrix} s_0 & b \\ s & -s \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

其中

$$s_0 = -1 + \frac{2(1-x^*)h(1+\alpha x^*)(x^*)^2}{1+h(1+\alpha x^*)(x^*)^2};$$

$$b = \frac{(x^*)^2(-\alpha h(x^*)^2 + \alpha(h-2)x^* - 1)}{1+h(1+\alpha x^*)(x^*)^2}$$

矩阵 (2.4) 的特征方程为

$$\lambda^2 - (s_0 - s)\lambda - s(s_0+b) = 0$$

因为

$$s_0 + b = \frac{-3\alpha h(x^*)^4 + 2(\alpha h - h - \alpha)(x^*)^3 + (h-1)(x^*)^2 - 1}{1+h(1+\alpha x^*)(x^*)^2},$$

所以在区域 Ω_1 中, $-s(s_0+b) > 0$,定理证明完毕.

3. Hopf 分支的存在性

本节选取参数 α 来研究系统 (1.4) 在正常数平衡点 E^* 处的 Hopf 分支的存在性.

若 $\alpha = \alpha^* = \frac{2h(1-x^*)(x^*)^2-(s+1)h(x^*)^2-s-1}{(s+1)h(x^*)^3-2h(1-x^*)(x^*)^3}$, 让 $tr[J(\overline{E})] = 0$, $det[J(\overline{E})] > 0$. 因此 $J(\overline{E})$ 有一对纯虚根 $\lambda_{1,2} = \pm\imath(det[J(\overline{E})])^{\frac{1}{2}}$. 令 $\lambda_{1,2} = \beta(\alpha) \pm \imath\omega(\alpha)$, 其中 $\beta(\alpha) = \frac{1}{2}tr[J(\overline{E})]$, $\omega(\alpha) = \frac{1}{2}(4det[J(\overline{E})] - tr[J(\overline{E})]^2)^{\frac{1}{2}}$. 因此,

$$\beta(\alpha^*) = 0, \;\; \beta'(\alpha^*) < 0.$$

定理 3 由于 $\beta(\alpha^*) = 0, \beta'(\alpha^*) < 0$. 则横截性条件成立. 因此, 根据Poincare-Andronov-Hopf 分支定理知, 当 α 穿过 α^* 时, 系统 (1.4) 在正平衡点 $\overline{E}$ 处产生 Hopf 分支.

4. Hopf 分支的方向和稳定性

本节利用规范型理论来讨论系统 (1.4) 在正常数平衡点 $\overline{E}$ 附近产生的 Hopf 分支的方向和稳定性. 对系统 (1.4) 作变量代换,我们将平衡点 $\overline{E}=(\overline{x},\overline{y})$ 通过变换 $x^*=x-\overline{x}$ 和 $y^*=y-\overline{y}$ 变换到原点. 为了方便起见, 我们仍然用 x 和 y 分别表示 x^* 和 y^*. 因此, 局部系统变成为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(x+\overline{x})-(x-\overline{x})^2-\frac{(1+\alpha(y+\overline{y}))(x+\overline{x})^2(y+\overline{y})}{1+h((1+\alpha(y+\overline{y}))(x+\overline{x})^2}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=s(y+\overline{y})(1-\frac{y+\overline{y}}{x+\overline{x}}). \end{cases} \tag{4.1}$$

将系统(4.1)重写为

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = J(\overline{E}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x,y,\alpha) \\ g(x,y,\alpha) \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

其中

$$f(x,y,\alpha)=a_1x^2+a_2xy+a_3y^2+a_4x^3+a_5x^2y+a_6xy^2+a_7y^3+\cdots,$$

$$g(x,y,\alpha)=b_1x^2+b_2xy+b_3y^2+b_4x^3+b_5x^2y+b_6xy^2+b_7y^3+\cdots.$$

并且

$$a_1=1-2x^*-\frac{2(1+\alpha x^*)x^*}{(1+h(1+\alpha x^*)(x^*)^2)^2},\quad a_2=-\frac{2(1+\alpha x^*)(x^*)^2}{(1+h(1+\alpha x^*)(x^*)^2)^2},\ a_3=-\frac{2(1+\alpha x^*)}{(1+h(1+\alpha x^*)(x^*)^2)^3},$$

$$a_4=-\frac{2(1+\alpha x^*)x^*}{(1+h(1+\alpha x^*)(x^*)^2)^3},\ a_5=-\frac{\alpha x^*}{(1+h(1+\alpha x^*)(x^*)^2)^4},\quad a_6=-\frac{\alpha (x^*)^2}{(1+h(1+\alpha x^*)(x^*)^2)^4}.$$

$$b_1=\frac{-s}{x^*},\quad b_2=\frac{2s}{x^*},\quad b_3=\frac{-s}{x^*},\ b_4=\frac{s}{(x^*)^2},\ b_5=\frac{-2s}{(x^*)^2},\quad b_6=\frac{s}{(x^*)^2}.$$

设矩阵

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} N & 1 \\ M & 0 \end{pmatrix}.$$

其中, $M=\frac{-s}{\omega(\alpha)}$, $N=-\frac{s_0+s}{2\omega(\alpha)}$. 则有

$$\mathbf{P^{-1}\,J\,P}=\mathbf{\Lambda}(\alpha):=\begin{pmatrix} \beta(\alpha) & -\omega(\alpha) \\ \omega(\alpha) & \beta(\alpha) \end{pmatrix}.$$

当 $\alpha=\alpha^*$, 我们有

$$M^*:=M|_{\alpha=\alpha(*)},\quad N^*:=N|_{\alpha=\alpha(*)}.$$

DOI: 10.12677/aam.2021.105165

通过变换 $(x,y)^\top = P(\mu,\nu)^\top$, 系统 (4.2) 变为

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \Lambda(\overline{E}) \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} fP(\mu,\nu,\alpha) \\ gP(\mu,\nu,\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta(\alpha) & -\omega(\alpha) \\ \omega(\alpha) & \beta(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f'(\mu,\nu,\alpha) \\ g'(\mu,\nu,\alpha) \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

其中

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} f(N\mu+\nu, M\mu, \alpha) \\ g(N\mu+\nu, M\mu, \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{M} g(N\mu+\nu, M\mu, \alpha) \\ f - \frac{N}{M} g(\mu,\nu,\alpha) \end{pmatrix}$$

将 (4.3) 转化成极坐标的形式如下:

$$\dot{r} = \beta(\alpha)\, r + a(\alpha)\, r^3 + \cdots,$$

$$\dot{\theta} = \omega(\alpha) + c(\alpha)\, r^2 + \cdots,$$

对 (3.3)在 $\alpha = \alpha^*$处进行 Taylor 展开得

$$\dot{r} = \beta(\alpha(*))'(\alpha - \alpha(*))r + a(\alpha(*))r^3 + o((\alpha-\alpha^*)^2 r, (\alpha-\alpha^*)r^3, r^5),$$

$$\dot{\theta} = \omega(\alpha^*) + \omega(\alpha^*)'(\alpha-\alpha^*) + c(\alpha^*)r^2 + o((\alpha-\alpha^*)^2, (\alpha-\alpha^*)r^2, r^4).$$

为了确定 Hopf 分支周期解的稳定性，我们需要计算系数 $a(\alpha^*)$ 的符号, 则

$$a(\alpha^*) := \frac{1}{16}[f^1_{\mu\mu\mu} + f^1_{\mu\nu\nu} + g^1_{\mu\mu\nu} + g^1_{\nu\nu\nu}] + \frac{1}{16\omega(\alpha(*))}[f^1_{\mu\nu}(f^1_{\mu\mu} + f^1_{\nu\nu}) - g^1_{\mu\nu}(g^1_{\mu\mu} + g^1_{\nu\nu}) - f^1_{\mu\mu} g^1_{\mu\mu} + f^1_{\nu\nu} g^1_{\nu\nu}].$$

其中所有偏导数在分支点 $(x,y,\alpha) = (0,0,\alpha(*))$ 处计算且

$$f^1_{\mu\mu\mu}(0,0,\alpha(*)) = 6(a_4 + a_5 M^* + a_6 M_2^* + a_7 M_3^*),\quad f^1_{\mu\nu\nu}(0,0,\alpha(*)) = 2(a_6 + 3a_7 M^*)N_2^*,$$

$$g^1_{\mu\mu\nu}(0,0,\alpha(*)) = -2(a_5 + 2a_6 M^* + 3a_7 M_2^*)(1+M^*),\quad g^1_{\nu\nu\nu}(0,0,\alpha(*)) = -6a_7(1+M^*)N_2^*,$$

$$f^1_{\mu\mu}(0,0,\alpha(*)) = 2(a_1 + a_2M^* + a_3M_2^*),\ \ f^1_{\mu\nu}(0,0,\alpha(*)) = (a_2 + 2a_3M^*)N^*,$$

$$f^1_{\nu\nu}(0,0,\alpha(*)) = 2a_3N_2^*,\ \ g^1_{\mu\mu}(0,0,\alpha(*)) = -2(-b_1 + (a_1+a_2)M^* + (a_2+a_3)M_2^* + a_3M_3^*)\frac{1}{N^*},$$

$$g^1_{\mu\nu}(0,0,\alpha(*)) = -(a_2 + 2a_3M^*)(1+M^*),\ \ g^1_{\nu\nu}(0,0,\alpha(*)) = -2a_3(1+M^*)N^*.$$

因此, 我们直接计算 $a(\alpha(*)) = \frac{1}{8}[3a_4 - a_5 + 2(a_5 - a_6)M^* + (a_6 - 3a_7)(M_2^* + N_2^*)]$
$+ \frac{1}{8\omega_0}[(2a_1 + a_2)(a_1 + a_2)N_2^* + (2a_1 + a_2)(a_1 - b_1)N^* + 2b_1(a_1 - b_1)\frac{1}{N}^*]$.
表示一阶 Liapunov 系数

$$\mu_2 = -\frac{a(\alpha^*)}{\beta'(\alpha(*))}.$$

回想一下, $\beta'(\alpha(*)) < 0$, 所以我们有以下定理.

定理 4 假设条件 $h < 1$ 成立, 则存在 $\alpha^* > 0$, 当 $\alpha = \alpha^*$ 时, 系统 (4) 在共存平衡点 E^* 处产生 Hopf 分支.

(i) 如果 $a(\alpha^*) < 0$, 那么 Hopf 分支的分支周期解是轨道渐近稳定的且分支方向是亚临界的.

(ii) 如果 $a(\alpha^*) > 0$, 那么 Hopf 分支的分支周期解是不稳定的且分支方向是超临界的.

5. 结论

本文研究了一类带有 Holling-III 型功能反应的合作捕食者-食饵模型. 系统 (4) 总有半平凡平衡点 E_0 $(1,0)$, 但不稳定的. 当 $h < 1$ 且 $s > s_0$ 时, 在 Ω_1 区域中有唯一的正平衡点 E^* 且局部稳定. 在Ω_2, Ω_3 区域中, 正平衡解总会存在, 但稳定性的判断比较复杂, 其忽略. 可以发现, 捕猎合作有利于捕食者和被捕食者共存, 但强大的狩猎合作可能会产生不稳定的影响.

参考文献

[1] Murray, J.D. (2002) An Introduction. 3rd Edition, Springer, New York.

[2] Volterra, V. (1920) Fluctuation in the Abundance of a Species Considered Mathematically. *Nature*, **118**, 557-561.

[3] Scheel, D. and Packer, C. (1991) Group Hunting Behaviour of Lions: A Search for Cooperation. *Animal Behaviour*, **41**, 697-709. https://doi.org/10.1016/S0003-3472(05)80907-8

[4] Rosenzweig, M.L. and MacArthur, R.H. (1963) Graphical Representation and Stability Conditions of Predator-Prey Interactions. *The American Naturalist*, **97**, 209-223. https://doi.org/10.1086/282272

[5] Hector, D.P. (2010) Cooperative Hunting and Its Relationship to Foraging Success and Prey Size in an Avian Predator. *Ethology*, **73**, 247-257. https://doi.org/10.1111/j.1439-0310.1986.tb00915.x

[6] Boesch, C. (1994) Cooperative Hunting in Wild Chimpanzees. *International Journal of Primatology*, **48**, 653-667. https://doi.org/10.1006/anbe.1994.1285

[7] Gause, G.F. (1934) Experimental Analysis of Vito Volterra's Mathematical Theory of the Struggle for Existence. *Science*, **79**, 16-17. https://doi.org/10.1126/science.79.2036.16-a

[8] Wu, W.J., Liang, G.W. (1989) Review of Methods Fitting Holling Disk Equation. *Natural Enemies of Insects*, **11**, 96-100.

[9] Jang, S. R.-J., Zhang, W. and Larriva, V. (2018) Cooperative Hunting in a Predator-Prey System with Allee Effects in the Prey. *Natural Resource Modelling*, **31**, e12194.

[10] Jeschke, J.M., Kopp, M. and Tollrian, R. (2002) Predator Functional Responses: Discriminating between Handling and Digesting Prey. *Ecological Monographs*, **72**, 95-112. https://doi.org/10.1890/0012-9615(2002)072[0095:PFRDBH]2.0.CO;2

[11] Alves, M.T. and Hilker, F.M. (2017) Hunting Cooperation and Allee Effects in Predators. *Journal of Theoretical Biology*, **419**, 13-22. https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2017.02.002

[12] Almanza-Vasquez, E., Ortiz-Ortiz, R.D. and Marin-Ramirez, A.M. (2015) Bifurcations in the Dynamics of Rosenzweig-MacArthur Predator-Prey Model Considering Saturated Refuge for the Preys. *Applied Mathematical Sciences*, **9**, 7475-7482. https://doi.org/10.12988/ams.2015.510640

[13] Li, X., Jiang, W.H. and Shi, J.P. (2011) Hopf Bifurcation and Turing Instability in Reaction-Diffusion Holling-Tanner Predator-Prey Model. *IMA Journal of Applied Mathematics*, **78**, 287-306. https://doi.org/10.1093/imamat/hxr050

[14] Peng, R. and Wang, M.X. (2007) Global Stability of the Equilibrium of a Diffusive Holling-Tanner Prey-Predator Model. *Applied Mathematics Letters*, **20**, 664-670. https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.08.020

[15] Hassard, B.D., Kazarinoff, N.D. and Wan, Y.H. (1981) Theory and Applications of Hopf Bifurcation. Cambridge University Press, Cambridge.

[16] Zhang, H. and Fu, S. (2021) Effect of Hunting Cooperation on the Dynamic Behavior for a Diffusive Holling Type II Predator-Prey Model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **99**, Article ID: 105807. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.105807

[17] Beay, L.K., Suryanto, A., Darti, I., *et al.* (2019) Stability of a Stage-Structure Rosenzweig-MacArthur Model Incorporating Holling Type-II Functional Response. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, **546**, Article ID: 052017. https://doi.org/10.1088/1757-899X/546/5/052017

[18] Dawes, J.H.P. and Souza, M.O. (2013) A Derivation of Holling's Type I, II and III Functional Responses in Predator-Prey Systems. *Journal of Theoretical Biology*, **327**, 11-22. https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2013.02.017

[19] Kuznetsov, Y.A. (2013) Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer Science Business Media, Berlin.