

泊松代数模的无穷小形变

赵 宁

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

Email: 1246363600@qq.com

收稿日期: 2021年4月11日; 录用日期: 2021年4月25日; 发布日期: 2021年5月14日

摘 要

本文主要研究泊松代数模的无穷小形变。构造了泊松代数的形变, 以及泊松代数模的无穷小形变, 讨论两个无穷小形变的等价条件和模的无穷小形变是平凡的条件。文章的最后给出了泊松代数上Nijenhuis算子的定义, 并且找到泊松代数模的平凡形变与Nijenhuis算子结构的关系。

关键词

泊松代数, Nijenhuis算子, 无穷小形变

Infinitesimal Deformation of the Module of Poisson Algebras

Ning Zhao

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Email: 1246363600@qq.com

Received: Apr. 11th, 2021; accepted: Apr. 25th, 2021; published: May 14th, 2021

Abstract

In this paper, we study the infinitesimal deformation of the module of Poisson algebra. The deformation of Poisson algebra is constructed, the infinitesimal deformation of the module of Poisson algebra and the equivalent condition of two infinitesimal deformations are discussed. At the end of the paper, the Nijenhuis operators of Poisson algebras are given, and the relationship between trivial deformation and Nijenhuis operator structure is also found.

Keywords

Poisson Algebra, Nijenhuis Operator, Infinitesimal Deformation

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 前言

泊松代数是李代数与交换结合代数的复合结构。泊松代数在数学和物理的许多领域中起着重要的作用，如泊松几何、可积系统、非交换(代数或微分)几何等[1]。由 Drinfeld 引入的李代数现在被公认为量子群的无穷小化[2]。Joni 和 Rota 引入无穷小代数的概念解释了微积分在代数学中的差异性[3]。泊松代数的 ON-结构和 O-算子值得进一步研究。

2. 一类特殊泊松代数的构造

定义 2.1 [4] 设 P 是域 F 上的线性空间, P 中有双线性代数运算 $[\cdot, \cdot], \circ: P \otimes P \rightarrow P$, 如果 $(P, [\cdot, \cdot])$ 为李代数, (P, \circ) 为交换结合代数, 并且

$$[x, y \circ z] = [x, y] \circ z + y \circ [x, z], \forall x, y, z \in P, \quad (2.1)$$

则称 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 为泊松代数。

定理 2.1 设 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 是泊松代数, $\omega_1, \omega_2: P \otimes P \rightarrow P$ 为双线性映射, 定义

$$[x, y]_t = [x, y] + t\omega_1(x, y),$$

$$x \circ_t y = x \circ y + t\omega_2(x, y),$$

$\forall x, y \in P$, t 为参数, 则 $(P, [\cdot, \cdot]_t, \circ_t)$ 是泊松代数当且仅当对 $\forall x, y, z \in P$, $k_1, k_2 \in F$ 满足下列方程

$$\omega_1(x, y) + \omega_1(y, x) = 0, \quad (2.2)$$

$$[x, \omega_1(y, z)] + \omega_1(x, [y, z]) + [y, \omega_1(z, x)] + \omega_1(y, [z, x]) + [z, \omega_1(x, y)] + \omega_1(z, [x, y]) = 0, \quad (2.3)$$

$$\omega_1(x, \omega_1(y, z)) + \omega_1(y, \omega_1(z, x)) + \omega_1(z, \omega_1(x, y)) = 0, \quad (2.4)$$

$$x \circ \omega_2(y, z) + \omega_2(x, y \circ z) - \omega_2(x, y) \circ z - \omega_2(x \circ y, z) = 0, \quad (2.5)$$

$$\omega_2(\omega_2(x, y), z) - \omega_2(x, \omega_2(y, z)) = 0, \quad (2.6)$$

$$\omega_2(x, y) - \omega_2(y, x) = 0, \quad (2.7)$$

$$[x, \omega_2(y, z)] + \omega_1(x, y \circ z) - \omega_1(x, y) \circ z - \omega_2([x, y], z) - y \circ \omega_1(x, z) - \omega_2(y, [x, z]) = 0, \quad (2.8)$$

$$\omega_1(x, \omega_2(y, z)) - \omega_2(\omega_1(x, y), z) - \omega_2(y, \omega_1(x, z)) = 0. \quad (2.9)$$

此时称 $(P, [\cdot, \cdot]_t, \circ_t)$ 为泊松代数 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 的形变。

证明: 由于 $[\cdot, \cdot]$ 双线性且 ω_1 双线性, 显然 $[\cdot, \cdot]_t$ 双线性。同理可知, P 上的代数运算 \circ_t 也是双线性的。对 $\forall x, y, z \in P$, $k_1, k_2 \in F$, 由于

$$[x, y]_t + [y, x]_t = t(\omega_1(x, y) + \omega_1(y, x)),$$

因此 $[\cdot, \cdot]_t$ 反对称当且仅当 ω_1 反对称, 即 ω_1 满足(2.2)。由于

$$\begin{aligned} & [x, [y, z]_t]_t + [y, [z, x]_t]_t + [z, [x, y]_t]_t \\ &= t([x, \omega_1(y, z)] + \omega_1(x, [y, z]) + [y, \omega_1(z, x)] + \omega_1(y, [z, x]) + [z, \omega_1(x, y)] + \omega_1(z, [x, y])) \\ & \quad + t^2(\omega_1(x, \omega_1(y, z)) + \omega_1(y, \omega_1(z, x)) + \omega_1(z, \omega_1(x, y))), \end{aligned}$$

因此 $[\cdot, \cdot]_t$ 满足 Jacobi 恒等式当且仅当 ω_1 满足(2.3)、(2.4)。由于

$$\begin{aligned} & (x \circ_t y) \circ_t z - x \circ_t (y \circ_t z) \\ &= t(\omega_2(x, y) \circ z + \omega_2(x \circ_t y, z) - x \circ_t \omega_2(y, z) - \omega_2(x, y \circ_t z)) \\ & \quad + t^2(\omega_2(\omega_2(x, y), z) - \omega_2(x, \omega_2(y, z))), \end{aligned}$$

因此 \circ_t 满足结合律当且仅当 ω_2 满足(2.5)、(2.6)。由于

$$x \circ_t y - y \circ_t x = t(\omega_2(x, y) - \omega_2(y, x)),$$

因此 \circ_t 满足交换律当且仅当 ω_2 满足(2.7)。由于

$$\begin{aligned} & [x, y \circ_t z]_t - [x, y]_t \circ_t z - y \circ_t [x, z]_t \\ &= t([x, \omega_2(y, z)] + \omega_1(x, y \circ_t z) - \omega_1(x, y) \circ_t z - \omega_2([x, y], z) - y \circ_t \omega_1(x, z) - \omega_2(y, [x, z])) \\ & \quad + t^2(\omega_1(x, \omega_2(y, z)) - \omega_2(\omega_1(x, y), z) - \omega_2(y, \omega_1(x, z))), \end{aligned}$$

因此 $[\cdot, \cdot]_t, \circ_t$ 满足等式(2.1)当且仅当 ω_1, ω_2 满足(2.8)、(2.9)。综上所述, 结论成立。

3. 泊松代数模及形变

定义 3.1 [4] 设 (P, \circ) 是交换结合代数, V 是域 F 上的线性空间, $S: P \rightarrow \text{End}(V)$ 为线性映射, 如果满足

$$S(x \circ y) = S(x)S(y), \forall x, y \in P, \quad (3.1)$$

则称 (V, S) 是交换结合代数 (P, \circ) 的模。

定义 3.2 [4] 设 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 是泊松代数, V 是域 F 上的线性空间, $S_{[\cdot, \cdot]}, S_\circ: P \rightarrow \text{End}(V)$ 为线性映射, 如果 $(V, S_{[\cdot, \cdot]})$ 是李代数 $(P, [\cdot, \cdot])$ 的表示, (V, S_\circ) 是交换结合代数 (P, \circ) 的模, 并且满足

$$S_{[\cdot, \cdot]}(x \circ y) = S_\circ(y)S_{[\cdot, \cdot]}(x) + S_\circ(x)S_{[\cdot, \cdot]}(y), \quad (3.2)$$

$$S_\circ([x, y]) = S_{[\cdot, \cdot]}(x)S_\circ(y) - S_\circ(y)S_{[\cdot, \cdot]}(x), \quad (3.3)$$

$\forall x, y \in P$, 则称 $(V, S_{[\cdot, \cdot]}, S_\circ)$ 是泊松代数 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 的模, V 简称 P -模 V 。

定理 3.1 设 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 为泊松代数, $(V, S_{[\cdot, \cdot]}, S_\circ)$ 是泊松代数 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 的模, $\sigma, \tau: P \rightarrow \text{End}(V)$ 为线性映射, 定义 $S_{[\cdot, \cdot]}, S_\circ: P \rightarrow \text{End}(V)$, 其中

$$S_{[\cdot, \cdot]}(x) = S_{[\cdot, \cdot]}(x) + t\sigma(x), \quad (3.4)$$

$$S_\circ(x) = S_\circ(x) + t\tau(x), \quad (3.5)$$

$\forall x \in P, t$ 为参数, 则 $(V, S_{[\cdot, \cdot]}, S_\circ)$ 是泊松代数 $(P, [\cdot, \cdot], \circ_t)$ 的模当且仅当满足下列方程

$$S_{[l]}(\omega_1(x, y)) + \sigma([x, y]) - S_{[l]}(x)\sigma(y) - \sigma(x)S_{[l]}(y) + S_{[l]}(y)\sigma(x) + \sigma(y)S_{[l]}(x) = 0, \quad (3.6)$$

$$\sigma(\omega_1(x, y)) - \sigma(x)\sigma(y) + \sigma(y)\sigma(x) = 0, \quad (3.7)$$

$$S_{\circ}(\omega_2(x, y)) + \tau(x \circ y) - S_{\circ}(x)\tau(y) - \tau(x)S_{\circ}(y) = 0, \quad (3.8)$$

$$\tau(\omega_2(x, y)) - \tau(x)\tau(y) = 0, \quad (3.9)$$

$$S_{[l]}(\omega_2(x, y)) + \sigma(x \circ y) - S_{\circ}(y)\sigma(x) - \tau(y)S_{[l]}(x) - S_{\circ}(x)\sigma(y) - \tau(x)S_{[l]}(y) = 0, \quad (3.10)$$

$$\sigma(\omega_2(x, y)) - \tau(y)\sigma(x) - \tau(x)\sigma(y) = 0, \quad (3.11)$$

$$S_{\circ}(\omega_1(x, y)) + \tau([x, y]) - S_{[l]}(x)\tau(y) - \sigma(x)S_{\circ}(y) + S_{\circ}(y)\sigma(x) + \tau(y)S_{[l]}(x) = 0, \quad (3.12)$$

$$\tau(\omega_1(x, y)) - \sigma(x)\tau(y) + \tau(y)\sigma(x) = 0, \quad (3.13)$$

$$\forall x, y \in P.$$

证明: 显然由 $S_{[l]}, S_{\circ}$ 的定义知 $S_{[l]}, S_{\circ}$ 是线性的。 $\forall x, y \in P$, 由于

$$\begin{aligned} & S_{[l]}([x, y]) - [S_{[l]}(x), S_{[l]}(y)] \\ &= t(S_{[l]}(\omega_1(x, y)) + \sigma([x, y]) - S_{[l]}(x)\sigma(y) - \sigma(x)S_{[l]}(y) + S_{[l]}(y)\sigma(x) + \sigma(y)S_{[l]}(x)) \\ & \quad + t^2(\sigma(\omega_1(x, y)) - \sigma(x)\sigma(y) + \sigma(y)\sigma(x)), \end{aligned}$$

因此 $(V, S_{[l]})$ 是 $(P, [l])$ 的表示当且仅当(3.6)、(3.7)成立。由于

$$\begin{aligned} & S_{\circ}(x \circ y) - S_{\circ}(x)S_{\circ}(y) \\ &= t(S_{\circ}(\omega_2(x, y)) + \tau(x \circ y) - S_{\circ}(x)\tau(y) - \tau(x)S_{\circ}(y)) \\ & \quad + t^2(\tau(\omega_2(x, y)) - \tau(x)\tau(y)), \end{aligned}$$

因此 (V, S_{\circ}) 是 (P, \circ) 的模当且仅当(3.8)、(3.9)成立。由于

$$\begin{aligned} & S_{[l]}(x \circ y) - S_{\circ}(y)S_{[l]}(x) - S_{\circ}(x)S_{[l]}(y) \\ &= S_{[l]}(x \circ y) - S_{\circ}(y)S_{[l]}(x) + t^2(\sigma(\omega_2(x, y)) - \tau(y)\sigma(y) - \tau(x)\sigma(y)) \\ & \quad + t(S_{[l]}(\omega_2(x, y)) + \sigma(x \circ y) - S_{\circ}(y)\sigma(x) - \tau(y)S_{[l]}(x) - S_{\circ}(x)\sigma(y) - \tau(x)S_{[l]}(y)), \end{aligned}$$

因此对于 $S_{[l]}, S_{\circ}$ (3.2)成立当且仅当(3.10)、(3.11)成立。同理对于 $S_{[l]}, S_{\circ}$ (3.3)成立当且仅当(3.12)、(3.13)成立。综上所述, 结论成立。

定义 3.3 设 $(P, [l], \circ)$ 为泊松代数 $(P, [l], \circ)$ 的形变, $(V, S_{[l]}, S_{\circ})$ 为 $(P, [l], \circ)$ 的模, 若 $(V, S_{[l]}, S_{\circ})$ 是泊松代数 $(P, [l], \circ)$ 的模, 则称 $(\omega_1, \omega_2, \sigma, \tau)$ 是模 $(V, S_{[l]}, S_{\circ})$ 的无穷小形变。

由定理 3.1 可知泊松代数 $(P, [l], \circ)$ 的模 $(V, S_{[l]}, S_{\circ})$ 是 P -模 V 的无穷小形变当且仅当 ω_1, ω_2 满足等式(2.2)~(2.9)且 σ, τ 满足等式(3.6)~(3.13)。

定义 3.4 设 $(V, S_{[l]}, S_{\circ})$ 和 $(V', S_{[l]}, S_{\circ})$ 分别是泊松代数 $(P, [l], \circ)$ 和 $(P, [l]', \circ')$ 的模, 如果存在泊松代数的同态映射 $\varphi_{P'}: P' \rightarrow P$ 和线性映射 $\varphi_{V'}: V' \rightarrow V$ 且满足下列条件

$$\varphi_{V'}(S_{\circ'}(x)) = S_{\circ}(\varphi_{P'}(x))\varphi_{V'}, \varphi_{V'}(S_{[l]'}(x)) = S_{[l]}(\varphi_{P'}(x))\varphi_{V'}, \quad (3.14)$$

$\forall x \in P'$, 则称 $\varphi_{P'}, \varphi_{V'}$ 为模 $(V', S_{[l]}, S_{\circ'})$ 到 $(V, S_{[l]}, S_{\circ})$ 的同态。

定义 3.5 设 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 为泊松代数, $(P, [\cdot, \cdot]_t, \circ_t)$ 与 $(P, [\cdot, \cdot]_{t'}, \circ_{t'})$ 分别为 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 的形变, $(V, S_{[\cdot, \cdot]}, S_\circ)$ 为 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 的模, 模 $(V, S_{[\cdot, \cdot]_t}, S_{\circ_t})$ 和模 $(V, S_{[\cdot, \cdot]_{t'}}, S_{\circ_{t'}})$ 分别是 P -模 V 的两个无穷小形变, 如果存在 $N \in \text{End}(P)$ 和 $M \in \text{End}(V)$, 使得 $(Id_P + tN, Id_V + tM)$ 是模 $(V, S_{[\cdot, \cdot]_t}, S_{\circ_t})$ 到模 $(V, S_{[\cdot, \cdot]_{t'}}, S_{\circ_{t'}})$ 的同态, 即满足下列方程

$$(Id_P + tN)([x, y]_t) = [(Id_P + tN)(x), (Id_P + tN)(y)]_{t'}, \quad (3.15)$$

$$(Id_P + tN)(x \circ_t y) = (Id_P + tN)(x) \circ_{t'} (Id_P + tN)(y), \quad (3.16)$$

$$(Id_V + tM)S_{[\cdot, \cdot]_t}(x) = S_{[\cdot, \cdot]_{t'}}((Id_V + tM)(x))(Id_V + tM), \quad (3.17)$$

$$(Id_V + tM)S_{\circ_t}(x) = S_{\circ_{t'}}((Id_V + tM)(x))(Id_V + tM), \quad (3.18)$$

$\forall x, y \in P$, 则称两个无穷小形变是等价的. 如果 P -模 V 的一个无穷小形变和 P -模 V 是等价的, 则称该形变为平凡形变.

定理 3.2 设 $(P, [\cdot, \cdot]_t, \circ_t)$ 为 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 的形变, $(V, S_{[\cdot, \cdot]}, S_\circ)$ 为 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 的模, 则泊松代数 $(P, [\cdot, \cdot]_t, \circ_t)$ 的模 $(V, S_{[\cdot, \cdot]_t}, S_{\circ_t})$ 是 P -模 V 的平凡形变当且仅当存在 $N \in \text{End}(P), M \in \text{End}(V)$ 使得

$$\omega_1(x, y) = [x, N(y)] + [N(x), y] - N([x, y]), \quad (3.19)$$

$$N(\omega_1(x, y)) = [N(x), N(y)], \quad (3.20)$$

$$\omega_2(x, y) = x \circ N(y) + N(x) \circ y - N(x \circ y), \quad (3.21)$$

$$N(\omega_2(x, y)) = N(x) \circ N(y), \quad (3.22)$$

$$\sigma(x) = S_{[\cdot, \cdot]}(N(x)) + S_{[\cdot, \cdot]}(x)M - MS_{[\cdot, \cdot]}(x), \quad (3.23)$$

$$S_{[\cdot, \cdot]}(N(x))M = M\sigma(x), \quad (3.24)$$

$$\tau(x) = S_\circ(N(x)) + S_\circ(x)M - MS_\circ(x), \quad (3.25)$$

$$S_\circ(N(x))M = M\tau(x), \quad (3.26)$$

$$\forall x, y \in P.$$

证明: $\forall x, y \in P$, 由定义 3.5 知, 泊松代数 $(P, [\cdot, \cdot]_t, \circ_t)$ 的模 $(V, S_{[\cdot, \cdot]_t}, S_{\circ_t})$ 是 P -模 V 的平凡形变当且仅当存在 $N \in \text{End}(P), M \in \text{End}(V)$ 使得

$$(Id_P + tN)([x, y]_t) = [(Id_P + tN)(x), (Id_P + tN)(y)]_{t'}, \quad (3.27)$$

$$(Id_P + tN)(x \circ_t y) = (Id_P + tN)(x) \circ_{t'} (Id_P + tN)(y), \quad (3.28)$$

$$(Id_V + tM)S_{[\cdot, \cdot]_t}(x) = S_{[\cdot, \cdot]_{t'}}((Id_V + tM)(x))(Id_V + tM), \quad (3.29)$$

$$(Id_V + tM)S_{\circ_t}(x) = S_{\circ_{t'}}((Id_V + tM)(x))(Id_V + tM), \quad (3.30)$$

由于

$$\begin{aligned} & (Id_P + tN)([x, y]_t) - [(Id_P + tN)(x), (Id_P + tN)(y)]_{t'} \\ &= ([x, y] + t\omega_1(x, y)) + tN([x, y] + t\omega_1(x, y)) - ([x + tN(x), y + tN(y)]_{t'}) \\ &= t(\omega_1(x, y) - [x, N(y)] - [N(x), y] + N([x, y])) + t^2(N(\omega_1(x, y)) - [N(x), N(y)]), \end{aligned}$$

因此(3.27)式成立当且仅当(3.19)、(3.20)成立. 由于

$$\begin{aligned}
& (Id_P + tN)(x \circ_t y) - ((Id_P + tN)(x) \circ (Id_P + tN)(y)) \\
&= (x \circ y + t\omega_2(x, y)) + tN((x \circ y) + t\omega_2(x, y)) - ((x + tN(x)) \circ (y + tN(y))) \\
&= t(\omega_2(x, y) - x \circ N(y) - N(x) \circ y + N(x \circ y)) + t^2(N(\omega_2(x, y)) - N(x) \circ N(y)),
\end{aligned}$$

因此(3.28)式成立当且仅当(3.21)、(3.22)成立。由于

$$\begin{aligned}
& (Id_V + tM)S_{[l]}(x) - (S_{[l]}((Id_V + tM)(x))(Id_V + tM)) \\
&= (S_{[l]}(x) + t\sigma(x)) + tM(S_{[l]}(x) + t\sigma(x)) - S_{[l]}(x + tN(x)) - tS_{[l]}(x + tN(x))M \\
&= t(\sigma(x) - S_{[l]}(N(x)) - S_{[l]}(x)M + MS_{[l]}(x)) + t^2(S_{[l]}(N(x))M - M\sigma(x)),
\end{aligned}$$

因此(3.29)成立当且仅当(3.23)、(3.24)成立。由于

$$\begin{aligned}
& (Id_V + tM)S_{\circ}(x) - (S_{\circ}((Id_V + tM)(x))(Id_V + tM)) \\
&= (S_{\circ}(x) + t\tau(x)) + tM(S_{\circ}(x) + t\tau(x)) - S_{\circ}(x + tN(x)) - tS_{\circ}(x + tN(x))M \\
&= t(\tau(x) - S_{\circ}(N(x)) - S_{\circ}(x)M + MS_{\circ}(x)) + t^2(S_{\circ}(N(x))M - M\tau(x)),
\end{aligned}$$

因此(3.30)成立当且仅当(3.25)、(3.26)成立。综上，结论成立。

定义 3.6 如果泊松代数 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 上线性变换 N 满足

$$[N(x), N(y)] = N([N(x), y] + [x, N(y)] - N([x, y])), \quad (3.31)$$

$$N(x) \circ N(y) = N(N(x) \circ y + x \circ N(y) - N(x \circ y)), \quad (3.32)$$

$\forall x, y \in P$ ，则称 N 是泊松代数 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 的 Nijenhuis 算子。

定理 3.3 设 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 为泊松代数， $(V, S_{[l]}, S_{\circ})$ 为 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 的模， $N \in \text{End}(P)$ ， $M \in \text{End}(V)$ ， $\sigma, \tau: P \rightarrow \text{End}(V)$ 为线性映射，如果 N, M, σ, τ 满足等式(3.19)~(3.26)，则 N 是泊松代数 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 的 Nijenhuis 算子且下面两个等式成立：

$$S_{[l]}(N(x))M(v) = M(S_{[l]}(N(x))v + S_{[l]}(x)M(v) - M(S_{[l]}(x)v)), \forall x \in P, v \in V. \quad (3.33)$$

$$S_{\circ}(N(x))M(v) = M(S_{\circ}(N(x))v + S_{\circ}(x)M(v) - M(S_{\circ}(x)v)), \forall x \in P, v \in V. \quad (3.34)$$

证明：将(3.19)代入(3.20)中，有

$$[N(x), N(y)] = N([N(x), y] + [x, N(y)] - N([x, y])),$$

同理将(3.21)代入(3.22)中，有

$$N(x) \circ N(y) = N(N(x) \circ y + x \circ N(y) - N(x \circ y)),$$

即 N 是泊松代数 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 的 Nijenhuis 算子。将(3.23)代入(3.24)中有(3.33)成立。将(3.25)代入(3.26)中有(3.34)成立。综上可知，结论成立。

定理 3.4 设 $(V, S_{[l]}, S_{\circ})$ 是泊松代数 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 的模， $M \in \text{End}(V)$ ， N 是泊松代数 $(P, [\cdot, \cdot], \circ)$ 的 Nijenhuis 算子，并且 M 满足等式(3.33)、(3.34)，设 $\omega_1, \omega_2: P \otimes P \rightarrow P$ ， $\sigma, \tau \in \text{End}(V)$ 使得

$$\omega_1(x, y) = [N(x), y] + [x, N(y)] - N([x, y]), \quad (3.35)$$

$$\omega_2(x, y) = N(x) \circ y + x \circ N(y) - N(x \circ y), \quad (3.36)$$

$$\sigma(x) = S_{[\cdot]}(N(x)) + S_{[\cdot]}(x)M - MS_{[\cdot]}(x), \quad (3.37)$$

$$\tau(x) = S_{\circ}(N(x)) + S_{\circ}(x)M - MS_{\circ}(x), \quad (3.38)$$

$\forall x, y \in P$, 则 $(\omega_1, \omega_2, \sigma, \tau)$ 生成 P -模 V 的平凡无穷小形变。

证明: 要证 $(\omega_1, \omega_2, \sigma, \tau)$ 生成 P -模 V 的无穷小形变, 须证 $(P, [\cdot], \circ)$ 是泊松代数, 且 $(V, S_{[\cdot]}, S_{\circ})$ 是 $(P, [\cdot], \circ)$ 的模, 即证所设 $(\omega_1, \omega_2, \sigma, \tau)$ 满足等式(2.2)~(2.9)和(3.6)~(3.13)。

$\forall x_1, x_2, y \in P, k_1, k_2 \in F$, 由 ω_1 满足等式(3.35)及 $[\cdot]$ 双线性可知,

$$\begin{aligned} & \omega_1(k_1x_1 + k_2x_2, y) - k_1\omega_1(x_1, y) - k_2\omega_1(x_2, y) \\ &= k_1([\![N(x_1), y]\!] - [N(x_1), y] + [x_1, N(y)] - [x_1, N(y)] + N([x_1, y]) - N([x_1, y])) \\ & \quad + k_2([\![N(x_2), y]\!] - [N(x_2), y] + [x_2, N(y)] - [x_2, N(y)] + N([x_2, y]) - N([x_2, y])) \\ &= 0, \end{aligned}$$

因此 ω_1 双线性。同理可知 ω_2 双线性。由 ω_1 满足等式(3.35)及 $[\cdot]$ 反对称性知

$$\omega_1(x, y) + \omega_1(y, x) = [N(x), y] + [y, N(x)] + [x, N(y)] + [N(y), x] - N([x, y]) - N([y, x]) = 0,$$

因此(2.2)式成立。由 ω_1 满足等式(3.35)、 $[\cdot]$ Jacobi 恒等式及 N 是 $(P, [\cdot], \circ)$ 上的 Nijenhuis 算子知

$$\begin{aligned} & [x, \omega_1(y, z)] + \omega_1(x, [y, z]) + [y, \omega_1(z, x)] + \omega_1(y, [z, x]) + [z, \omega_1(y, x)] + \omega_1(z, [y, x]) \\ &= [x, [N(y), z]] - [x, [N(y), z]] + [x, [y, N(z)]] - [x, [y, N(z)]] \\ & \quad + [N(x), [y, z]] + [x, N([y, z])] - N([x, [y, z]]) \\ & \quad + [y, [N(z), x]] - [y, [N(z), x]] + [y, [z, N(x)]] - [y, [z, N(x)]] \\ & \quad + [N(y), [z, x]] + [y, N([z, x])] - N([y, [z, x]]) \\ & \quad + [z, [N(x), y]] - [z, [N(x), y]] + [z, [x, N(y)]] - [z, [x, N(y)]] \\ & \quad + [N(z), [x, y]] + [z, N([x, y])] - N([z, [x, y]]) \\ & \quad + 2([x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]]) \\ &= 0, \end{aligned}$$

因此(2.3)式成立。同理将 $\omega_1, \omega_2, \sigma, \tau$ 代入等式(2.4)~(2.9)和(3.6)~(3.13), 利用已知条件, 得以上等式均成立。故 $(\omega_1, \omega_2, \sigma, \tau)$ 生成 P -模 V 的无穷小形变。由 N 是泊松代数 $(P, [\cdot], \circ)$ 的 Nijenhuis 算子和等式(3.35)、(3.36)知(3.19)~(3.22)成立, 由等式(3.33)、(3.37)知(3.23)、(3.24)成立, 同理由等式(3.34)、(3.38)知(3.25)、(3.26)成立, 所以此无穷小形变也满足条件(3.19)~(3.26), 故该形变是平凡形变。

4. 泊松代数半直积的 Nijenhuis 算子

命题 4.1 [5] 设 $(P, [\cdot], \circ)$ 是泊松代数, V 是域 F 上的线性空间, $S_{[\cdot]}, S_{\circ}: P \rightarrow \text{End}(V)$ 为线性映射, 在 $P \oplus V$ 上定义

$$[x_1 + v_1, x_2 + v_2] = [x_1, x_2] + S_{[\cdot]}(x_1)v_2 - S_{[\cdot]}(x_2)v_1, \quad (4.1)$$

$$(x_1 + v_1) \circ (x_2 + v_2) = x_1 \circ x_2 + S_{\circ}(x_1)v_2 + S_{\circ}(x_2)v_1, \quad (4.2)$$

$\forall x_1, x_2 \in P, v_1, v_2 \in V$, 则 $(V, S_{[\cdot]}, S_{\circ})$ 是泊松代数 $(P, [\cdot], \circ)$ 的模当且仅当 $(P \oplus V, [\cdot], \circ)$ 是泊松代数, 简记为 $P \ltimes_{S_{[\cdot]}, S_{\circ}} V$ 。

定理 4.2 设 $(V, S_{[\cdot]}, S_{\circ})$ 是泊松代数 $(P, [\cdot], \circ)$ 的模, $N \in \text{End}(P)$, $M \in \text{End}(V)$, 则 N 是泊松代数 $(P, [\cdot], \circ)$ 上的 Nijenhuis 算子且 M 满足等式(3.33)、(3.34)当且仅当线性变换 $N+M$ 是 $P \times_{S_{[\cdot]}, S_{\circ}} V$ 上的 Nijenhuis 算子。

证明: 必要性。 $\forall x_1, x_2, P, v_1, v_2 \in V$, 由等式(3.33)及 N 是 $(P, [\cdot], \circ)$ 上的 Nijenhuis 算子知,

$$\begin{aligned} & [(N+M)(x_1+v_1), (N+M)(x_2+v_2)] \\ &= [N(x_1)+M(v_1), N(x_2)+M(v_2)] \\ &= [N(x_1), N(x_2)] + S_{[\cdot]}(N(x_1))M(v_2) - S_{[\cdot]}(N(x_2))M(v_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (N+M)[(N+M)(x_1+v_1), x_2+v_2] + [x_1+v_1, (N+M)(x_2+v_2)] - (N+M)([x_1+v_1, x_2+v_2]) \\ &= (N+M)([N(x_1)+M(v_1), x_2+v_2] + [x_1+v_1, N(x_2)+M(v_2)] \\ &\quad - (N+M)([x_1, x_2] + S_{[\cdot]}(x_1)v_2 - S_{[\cdot]}(x_2)v_1)) \\ &= N([N(x_1), x_2] + [x_1, N(x_2)] - N([x_1, x_2])) + M(S_{[\cdot]}(N(x_1))v_2 + S_{[\cdot]}(x_1)M(v_2) - M(S_{[\cdot]}(x_1)v_2)) \\ &\quad - M(S_{[\cdot]}(N(x_2))v_1 + S_{[\cdot]}(x_2)M(v_1) - M(S_{[\cdot]}(x_2)v_1)) \\ &= [N(x_1), N(x_2)] + S_{[\cdot]}(N(x_1))M(v_2) - S_{[\cdot]}(N(x_2))M(v_1), \end{aligned}$$

比较上述两式知线性变换 $N+M$ 满足等式(3.31)。由等式(3.34)及 N 是 $(P, [\cdot], \circ)$ 上的 Nijenhuis 算子知,

$$\begin{aligned} & (N+M)(x_1+v_1) \circ (N+M)(x_2+v_2) \\ &= (N(x_1)+M(v_1)) \circ (N(x_2)+M(v_2)) \\ &= N(x_1) \circ N(x_2) + S_{\circ}(N(x_1))M(v_2) + S_{\circ}(N(x_2))M(v_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (N+M)((N+M)(x_1+v_1) \circ (x_2+v_2) + (x_1+v_1) \circ (N+M)(x_2+v_2) - (N+M)((x_1+v_1) \circ (x_2+v_2))) \\ &= (N+M)((N(x_1)+M(v_1)) \circ (x_2+v_2) + (x_1+v_1) \circ (N(x_2)+M(v_2)) \\ &\quad - (N+M)((x_1 \circ x_2) + S_{\circ}(x_1)v_2 - S_{\circ}(x_2)v_1)) \\ &= N(N(x_1) \circ x_2 + x_1 \circ N(x_2) - N(x_1 \circ x_2)) + M(S_{\circ}(N(x_1))v_2 + S_{\circ}(x_1)M(v_2) - M(S_{\circ}(x_1)v_2)) \\ &\quad + M(S_{\circ}(N(x_2))v_1 + S_{\circ}(x_2)M(v_1) - M(S_{\circ}(x_2)v_1)) \\ &= N(x_1) \circ N(x_2) + S_{\circ}(N(x_1))M(v_2) - S_{\circ}(N(x_2))M(v_1), \end{aligned}$$

比较上述两式知线性变换 $N+M$ 满足等式(3.32)。所以 $N+M$ 是泊松代数半直积 $P \times_{S_{[\cdot]}, S_{\circ}} V$ 上的 Nijenhuis 算子。

充分性。设 $N+M$ 是半直积泊松代数 $P \times_{S_{[\cdot]}, S_{\circ}} V$ 上的 Nijenhuis 算子, 则

$$\begin{aligned} & (N+M)([(N+M)(x_1+v_1), x_2+v_2] + [x_1+v_1, (N+M)(x_2+v_2)] \\ &\quad - (N+M)([x_1+v_1, x_2+v_2])) - ([N(x_1)+M(v_1), (N+M)(x_2+v_2)]) \\ &= (N([N(x_1), x_2] + [x_1, N(x_2)] - N([x_1, x_2])) - ([N(x_1), N(x_2)])) \\ &\quad + (-S_{[\cdot]}(N(x_1))M(v_2) + M(S_{[\cdot]}(N(x_1))v_2 + S_{[\cdot]}(x_1)M(v_2) - M(S_{[\cdot]}(x_1)v_2))) \\ &\quad + (S_{[\cdot]}(N(x_2))M(v_1) - M(S_{[\cdot]}(N(x_2))v_1 + S_{[\cdot]}(x_2)M(v_1) - M(S_{[\cdot]}(x_2)v_1))) \\ &= 0, \end{aligned}$$

故线性变换 N 满足等式(3.30)且 M 满足等式(3.33)。又

$$\begin{aligned} & (N+M)((N+M)(x_1+v_1)\circ(x_2+v_2)+(x_1+v_1)\circ(N+M)(x_2+v_2)) \\ & - (N+M)((x_1+v_1)\circ(x_2+v_2)) - ((N+M)(x_1+v_1)\circ(N+M)(x_2+v_2)) \\ & = (N(N(x_1)\circ x_2 + x_1\circ N(x_2) - N(x_1\circ x_2)) - (N(x_1)\circ N(x_2))) \\ & + (-S_{[\cdot]}(N(x_1))M(v_2) + M(S_{\circ}(N(x_1))v_2 + S_{\circ}(x_1)M(v_2) - M(S_{\circ}(x_1)v_2))) \\ & + (S_{[\cdot]}(N(x_2))M(v_1) - M(S_{\circ}(N(x_2))v_1 + S_{\circ}(x_2)M(v_1) - M(S_{\circ}(x_2)v_1))) \\ & = 0, \end{aligned}$$

故线性变换 N 满足等式(3.31)且 M 满足等式(3.34)。所以 N 是泊松代数 $(P, [\cdot], \circ)$ 上的 Nijenhuis 算子且 M 满足等式(3.33)、(3.34)。综上, 结论成立。

定理 4.3 [4] 设 $(V, S_{[\cdot]}, S_{\circ})$ 是泊松代数 $(P, [\cdot], \circ)$ 的模, 则 $(V^*, S_{[\cdot]}^*, S_{\circ}^*)$ 是 $(P, [\cdot], \circ)$ 的模。

定义 4.1 设 $(V, S_{[\cdot]}, S_{\circ})$ 是泊松代数 $(P, [\cdot], \circ)$ 的模, $N \in \text{End}(P), M \in \text{End}(V)$ 。如果 N, M^* 生成 $(V^*, S_{[\cdot]}^*, S_{\circ}^*)$ 的平凡形变, 则称 (N, M) 是 P -模 V 的 Nijenhuis 结构。

定理 4.4 设 $(V, S_{[\cdot]}, S_{\circ})$ 是 $(P, [\cdot], \circ)$ 的模, 则 (N, M) 是 P -模 V 的 Nijenhuis 结构等价于 N 是 $(P, [\cdot], \circ)$ 的 Nijenhuis 算子且满足

$$S_{[\cdot]}(N(x))M(v) = M(S_{[\cdot]}(N(x))v) + S_{[\cdot]}(x)M^2(v) - M(S_{[\cdot]}(x)M(v)), \quad (4.3)$$

$$S_{\circ}(N(x))M(v) = M(S_{\circ}(N(x))v) + S_{\circ}(x)M^2(v) - M(S_{\circ}(x)M(v)). \quad (4.4)$$

$$\forall x \in P, v \in V.$$

证明: 由定理 4.2 知, N 和 M^* 生成泊松代数 $(P, [\cdot], \circ)$ 的模 $(V^*, S_{[\cdot]}^*, S_{\circ}^*)$ 的无穷小形变当且仅当 N 是泊松代数 $(P, [\cdot], \circ)$ 的 Nijenhuis 算子, 且满足下列方程

$$S_{[\cdot]}^*(N(x))M^*(v^*) = M^*(S_{[\cdot]}^*(N(x))v^* + S_{[\cdot]}^*(x)M^*(v) - M^*(S_{[\cdot]}^*(x)v^*)), \quad (4.5)$$

$$S_{\circ}^*(N(x))M^*(v^*) = M^*(S_{\circ}^*(N(x))v^* + S_{\circ}^*(x)M^*(v) - M^*(S_{\circ}^*(x)v^*)). \quad (4.6)$$

$\forall x \in P, v \in V, v^* \in V$ 。由于

$$\begin{aligned} & \langle S_{[\cdot]}^*(N(x))M^*(v^*) - M^*(S_{[\cdot]}^*(N(x))v^*) - M^*(S_{[\cdot]}^*(x)M^*(v)) + M^*(M^*(S_{[\cdot]}^*(x)v^*)), v \rangle \\ & = \langle v^*, S_{[\cdot]}(N(x))M(v) - M(S_{[\cdot]}(N(x))v) - S_{[\cdot]}(x)M^2(v) + M(S_{[\cdot]}(x)M(v)) \rangle, \end{aligned}$$

所以等式(4.5)成立当且仅当等式(4.3)成立。由于

$$\begin{aligned} & \langle S_{\circ}^*(N(x))M^*(v^*) - M^*(S_{\circ}^*(N(x))v^*) - M^*(S_{\circ}^*(x)M^*(v)) + M^*(M^*(S_{\circ}^*(x)v^*)), v \rangle \\ & = \langle v^*, S_{\circ}(N(x))M(v) - M(S_{\circ}(N(x))v) - S_{\circ}(x)M^2(v) + M(S_{\circ}(x)M(v)) \rangle, \end{aligned}$$

所以等式(4.6)成立当且仅当等式(4.4)成立。综上可知, 结论成立。

5. 结束语

本文给出了一类特殊泊松代数的构造方法, 并且由此为基础进一步研究泊松代数的模、无穷小形变以及泊松代数半直积的 Nijenhuis 算子。对于这类特殊的泊松代数的研究具有一定的意义。

参考文献

- [1] Vaisman, I. (1994) Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds. In: Progress in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8495-2>
- [2] Drinfeld, V.G. (1983) Hamiltonian Structures on Lie Groups, Lie Bialgebras and the Geometric Meaning of the Classical Yang Baxter Equations. *Soviet Math. Dokl.*, **27**, 68-71.
- [3] Joni, S.A. and Rota, G.C. (1979) Coalgebras and Bialgebras in Combinatorics. *Studies in Applied Mathematics*, **61**, 93-139. <https://doi.org/10.1002/sapm197961293>
- [4] Ni, X. and Bai, C. (2013) Poisson Algebra. *Journal of Mathematical Physics*, **54**, Article ID: 023515. <https://doi.org/10.1063/1.4792668>
- [5] Schafer, R. (1995) An Introduction to Nonassociative Algebras. Dover, New York.