Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(5), 1735-1747
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.105185

形式幂级数在复解析族形变中的应用

杨秋花，甘丽宁，卢卫君*

广西民族大学数学与物理学院，广西 南宁
Email: 1023984216@com, *2362045009@qq.com

收稿日期：2021年4月25日；录用日期：2021年5月8日；发布日期：2021年5月28日

摘 要

本文主要研究紧复流形上的复解析族纤维的无穷小形变，讨论了当 $H^2(M,\Theta)=0$ 时复解析族的无穷小形变存在性定理。首先构造一个形式幂级数，然后应用Hölder范数与借鉴Liu-Rao-Yang关于整体典则族收敛的证明技巧证明泰勒展开式中系数的收敛性，克服了初等方法无法证明收敛性的障碍，最后给出了形变存在性定理的证明。

关键词

复流形，复解析族，无穷小形变，形式幂级数，Hölder范数，形式幂级数，存在性定理

Formal Power Series Applied to Deformation of Complex Analytic Family

Qiuhua Yang, Lining Gan, Weijun Lu*

College of Mathematics and Physics, Guangxi University for Nationalities, Nanning Guangxi
Email: 1023984216@com, *2362045009@qq.com

Received: Apr. 25th, 2021; accepted: May 8th, 2021; published: May 28th, 2021

Abstract

In this paper, we study the infinitesimal deformations of complex analytic families of fibers on compact complex manifolds, and discuss the existence theorem of infinitesimal deformations of

*通讯作者。

文章引用: 杨秋花, 甘丽宁, 卢卫君. 形式幂级数在复解析族形变中的应用[J]. 应用数学进展, 2021, 10(5): 1735-1747.
DOI: 10.12677/aam.2021.105185

complex analytic families when $H^2(M,\Theta)=0$. Firstly, a formal power series is constructed. Then, the convergence of the coefficients in Taylor's expansion is proved by Hölder norm and Liu-Rao-Yang's proof technique of global canonical family convergence, which overcomes the difficulty of proving the convergence by elementary methods. Finally, the deformation existence theorem is proved.

Keywords

Complex Manifold, Complex Analytic Family, Infinitesimal Deformation, Hölder Norm, Formal Power Series, Existence Theorem

1. 引言

1888 年，Max Noether [1]首次提出代数曲面形变的概念。但奇怪的是，这之后接近 100 年的时间里，人们并不高度关注高维复流形的形变。直到在 1957 年，也就是黎曼回忆录出版的 100 年后，Frolicher 与 Nijenhuis [2]用微分几何的方法研究了高维复流形的形变，并得到了一个重要的结果。受到此结果的鼓励与影响，Kodaira 和 Spencer [3]基于最原始的想法考虑了紧复流形的形变理论。Kodaira 在研究紧复流形 M 的一些例子中发现了一种神秘的现象，即 $H^1(M,\Theta)$ 的维数与 M 的定义中涉及到的有效参数的个数是一致的。为了解释这一有趣的现象，Kodaira 和 Spencer 给出并证明了的紧复流形上的复解析族的存在性定理，该定理以椭圆偏微分算子为基础，形成了一个系统的理论。此后，Kuranishi [4]将形变理论进一步推广得到 Kuranishi 映射，Deligne [5]利用 Kuranishi 映射与数论的关系证明了 Weil 猜想。

为了证明形变存在性定理，如果采用基本的初等方法，则需要取一个半径为 $r>0$ 的多圆盘 $\Delta=\{t\in\mathbb{C}\,\|t|<r\}\subset B$，再构造一个复解析族 $\mathcal{M}_\Delta=\bigcup_{j=1}^{l}U_j\times\Delta$ 满足 $\varpi^{-1}(0)=M=\bigcup_j U_j\times 0$，只要找到 $\mathcal{M}$ 的定义函数 $f_{jk}^{\alpha}(z_k,t)$ 即可。但由于无法证明 $f_{jk}^{\alpha}(z_k,t)$ 满足收敛性，故无法完成证明。因此，本文首先构造一个满足可积条件与初始条件的形式幂级数，然后应用 Hölder 范数与借鉴 Liu-Rao-Yang [6]关于整体典则族收敛的证明技巧证明泰勒展开式中系数的收敛性，最后再证明形变存在性定理。

2. 相关知识

2.1. 复流形

定义 2.1.1 [7]设 M 是一个 Hausdorff 拓扑空间。如果存在 M 的一个开覆盖 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 且 $\bigcup_\alpha U_\alpha=M$ 以及相应的连续映射族 $\varphi_\alpha:U_\alpha\to\mathbb{C}^n$，使得

(i) $\varphi_\alpha:U_\alpha\to\varphi_\alpha(U_\alpha)\subset\mathbb{C}^n$ 为从 U_α 到 $\mathbb{C}^n$ 的开集 $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 上的同胚；

(ii) 当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ 时，转移映射

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

在 $\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ 上满足全纯，则称 M 是一个复 n 维复流形。

复流形的例子很多，下面给出两个特别的例子，以阐明坐标转移映射的全纯性条件。

例 2.1.2 (复射影空间) 设 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中过原点的复直线的集合，因为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中过原点的直线 l 由 l 上任一点 $z=(z_0,\cdots,z_n)$ 所决定，因此有

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n=\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}/\sim=\left\{[z]\in\mathbb{C}^{n+1}/z\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}\right\},\ \ [z]=\left\{w\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}\middle|\exists\lambda\in\mathbb{C},s.t.\ w=\lambda z\right\}.$$

对于不在超平面 $z_i=0$ 上的直线集合 $U_i=\left\{[z_i]\in\mathbb{C}\mathrm{P}^n\middle|z_i\neq 0\right\}$，存在 U_i 到 $\mathbb{C}^n$ 的同胚 φ_i，它由下式给定：

$$\varphi_i([z_0,\cdots,z_n])=(z_0/z_i,\cdots,z_{i-1}/z_i,z_{i+1}/z_i,\cdots,z_n/z_i)=(\xi_i^0,\cdots,\xi_i^{i-1},\xi_i^{i+1},\cdots,\xi_i^n),$$

其中 $\forall i=0,\cdots,n$， $\xi_i^k=z_k/z_i\ \ (1\le k\le i),\ \xi_i^k=z_{k+1}/z_i\ \ (i+1\le k\le n-1)$。对于任意的 $i\neq j$，若 $U_i\bigcup U_j\neq\phi$，转移映射为

$$\varphi_{ji}(\xi_i)=\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}(\xi_i^0,\cdots,\xi_i^{i-1},\xi_i^{i+1},\cdots,\xi_i^n)=(\xi_j^0,\cdots,\xi_j^{j-1},\xi_j^{j+1},\cdots,\xi_j^n)=\xi_j.$$

由于 $\partial\varphi_{ji}(\xi_i)/\partial\overline{\xi_i^k}=0$，这说明 $\varphi_{ji}(\xi_i)$ 是全纯映射。因此，$\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个 n 维复流形，且称它为 n 维复射影空间。

例 2.1.3 设 M 是一个代数曲面，

$$M=\left\{(\zeta_0:\zeta_1:\zeta_2:\zeta_3)\in\mathbb{C}\mathrm{P}^3\middle|\zeta_0^5+\zeta_1^5+\zeta_2^5+\zeta_3^5=0\right\}.$$

记

$$G=\left\{g^m\middle|m=1,2,3,4,\ \ g(\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)=(\rho\zeta_0,\rho^2\zeta_1,\rho^3\zeta_2,\rho^4\zeta_3)\right\},$$

这里 g 是一个 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3\to\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 的双全纯映射，$\rho=e^{2\pi i/5}$ 从而 $g^5=1$。现在考虑每个 g^m 在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 上的不动点。由 $m=1,2,3,4$，

$$g^m(\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)=(\zeta_0\rho^{m+1},\zeta_1\rho^{m+2},\zeta_2\rho^{m+3},\zeta_3\rho^{m+4})=(\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3),$$

即 $(\rho^{m(i+1)}-1)\zeta_i=0,\ i=0,1,2,3$。注意 $g^5=1$，便得到这些不动点为(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)，且由 $\zeta_0^5+\zeta_1^5+\zeta_2^5+\zeta_3^5=1\neq 0$ 知，它们都不在 M 上，所以 M 上没有不动点，从而 M/G 是一个复流形。

2.2. 形变与无穷小形变

定义 2.2.1 [7] (复解析族) 假设给定 $\mathbb{C}^m$ 上的一个邻域 B，M_t 是一个依赖于 $t\in B$ 的紧复流形，如果存在一个复流形 $\mathcal{M}$ 与一个全纯映射 $\varpi:\mathcal{M}\xrightarrow{onto}B$ 满足以下条件：

(1) $\varpi^{-1}(t)$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个紧复子流形；

(2) $\varpi^{-1}(t)=M_t$；

(3) ϖ 的 Jacobi 矩阵的秩在 $\mathcal{M}$ 上的每一点都等于 m。

则把 $\{M_t|t\in B\}$ 称紧复流形的一个复解析族，$t\in B$ 称为复解析族的参数，B 为参数空间，并且 B 还可以自然的推广到任意复流形上。

定义 2.2.2 [8] (形变) 设 M 与 N 是紧复流形。若 M 与 N 的复解析族相同，即存在同一个以 B 为底流形的复解析族 $(\mathcal{M},B,\varpi)$ 使得对部分 $t_0,t_1\in B$ 满足 $M=\varpi^{-1}(t_0)$，$N=\varpi^{-1}(t_1)$，则称 N 是 M 的一个形变。

为了进一步了解抽象的复解析族背后的本质，下面给出一些具体的例子。

例 2.2.3 考虑椭圆曲线的一族环面 $\left\{T_\omega\middle|\omega\in\mathrm{H}^+\right\}$，其中上半复平面 $\mathrm{H}^+=\left\{\omega\in\mathbb{C}\middle|\mathrm{Im}\,\omega>0\right\}$。设 $G_\omega=\left\{m\omega_1+n\omega_2\middle|m,n\in\mathbb{Z}\right\}$，其中 $\omega_1=a\omega+b$，$\omega_2=c\omega+d$，$a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ 满足 $ad-bc=1$ (若 $ad-bc=1$，可以交换 ω_1 和 ω_2)。取 $\omega'=(\omega_1/\omega_2)$，则 $\mathrm{Im}\,\omega'>0$。令 $\mathcal{G}$ 是作用于 H^+ 的变换群，其变换形如

$$\omega\to\omega'=\frac{a\omega+b}{c\omega+d},\ a,b,c,d\in\mathbb{Z}\ ad-bc=1.$$

则 $\mathcal{G}$ 在 H^+ 上满足纯不连续，$T_\omega = \mathbb{C}/G_\omega$ 双全纯等价于 $T_{\omega'} = \mathbb{C}/G_{\omega'}$，$\mathrm{H}^+/\mathcal{G}$ 双全纯于 $\mathbb{C}$，如下图 1，阴影部分表示的是 $\mathcal{G}$ 的基本区域 $\mathcal{F} = \left\{\omega \in \mathbb{C} \middle| |\omega| \ge 1,\ -0.5 \le \operatorname{Im}\omega \le 0.5\right\}$。对于 $\forall \omega, \omega' \in \mathcal{F}$，$\omega \ne \omega'$，则有 $T_\omega \ne T_{\omega'}$。因此，存在 H^+ 上的 $\mathcal{G}$ 不变全纯函数 $J(\omega)$，称为椭圆模函数 $J : \mathrm{H}^+/\mathcal{G} \to \mathbb{C},\ \omega \mapsto J(\omega)$，使得 T_ω 双全纯于 $T_{\omega'}$ 当且仅当 $J(\omega) = J(\omega')$。于是复解析 $T_\omega = \mathbb{C}/G_\omega$ 随着 $\omega \in \mathrm{H}^+$ 而连续变化，从而得到一个复解析族 $\left\{T_\omega \middle| \omega \in \mathrm{H}^+\right\}$。

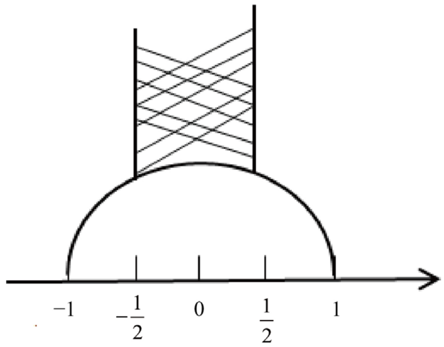

Figure 1. Fundamental region
图 1. 基本区域

例 2.2.4 (Hopf 曲面) Hopf 曲面是一个以 $W = \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ 作为万有覆盖曲面的复二维紧致复流形，即 Hopf 曲面 M_t 定义为 $M_t = W/G_t$，$t \in \mathbb{C}$，其中无限循环群 $G_t = \left\{g^m \middle| m \in \mathbb{Z}\right\}$ 由 W 的自同构 $g_t : (z_1, z_2) \mapsto (\alpha z_1 + t z_2, \alpha z_2)$，$t \in \mathbb{C}$，$\alpha \in (-1,0) \cup (0,1)$ 生成，G_t 纯不连续作用在 W 上且没有不动点。这时每个 M_t 是紧致复流形，可证明 $\left\{M_t \middle| t \in \mathbb{C}\right\}$ 是一个复解析族(参阅[7]，pp. 23-25 的例 3，或[8]，pp. 69-71 的例 2.15)。

定义 2.2.5 [8] (参数空间为一维的无穷小形变)设 $B = \left\{t \middle| |t| < r\right\} \subseteq \mathbb{C}$，$\mathcal{M}$ 是一个复流形，$\varpi : \mathcal{M} \xrightarrow{onto} B$ 是一个全纯映射且满足以下条件：

(1) $\varpi^{-1}(t) = M_t$；

(2) ϖ 的秩等于 $\dim B$。

如果选择一个充分小的 $\varepsilon > 0$，在 $\Delta = \left\{t \middle| |t| < \varepsilon\right\}$ 中使得

$$\varpi^{-1}(\Delta) = \bigcup_{j=1}^{l} \mathcal{U}_j \ (\text{有限个开覆盖的并})。$$

在每个 $\mathcal{U}_j$ 中有一个坐标系

$$p \to \left\{z_j^1(p), \cdots, z_j^n(p), t(p)\right\},$$

其中 $t(p) = \varpi(p)$，$\mathcal{U}_j = \left\{p \middle| z_j^\alpha(p) < \varepsilon_j, |t(p)| < \varepsilon\right\}$。设 $p = (z_j, t) = \left(z_j^1(p), \cdots, z_j^n(p), t(p)\right)$，则在 $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k$ 上有

$$z_j^\alpha(p) = f_{jk}^\alpha\left\{z_j^1(p), \cdots, z_j^n(p), t(p)\right\} = f_{jk}^\alpha(z_k, t)。$$

若令 $U_{tj} = M_t \cap \mathcal{U}_j$，因此

$$U_{tj} = \left\{\left(z_j^1, \cdots z_j^n, t\right) \middle| \left|z_j^\alpha\right| < \varepsilon_j\right\},$$

故可用 $\left\{\left(z_j^1, \cdots z_j^n, t\right) \middle| \left|z_j^\alpha\right| < \varepsilon_j\right\}$ 作为 U_{tj} 的坐标，且变换 $z_j^\alpha = f_{jk}^\alpha(z_k, t)$ 与 t 的值有关。

如果考虑 $p\in\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_k$，则有 $p=(z_i,t)=(z_j,t)=(z_k,t)$，因此

$$z_i^\alpha=f_{ik}^\alpha(z_k,t)=f_{ij}^\alpha(z_j,t)=f_{ij}^\alpha(f_{jk}(z),t)，其中 f_{jk}=(f_{jk}^1,\cdots,f_{jk}^n)。$$

引入向量场

$$\theta_{jk}(p,t)=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial f_{jk}^\alpha(z_k,t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha},\ z_k=f_{kj}(z_j,t),$$

显然，$\theta_{jk}(t)\in\Gamma(U_{tj}\cap U_{tk},\Theta_t)$，其中 Θ_t 是 M_t 上的全纯向量场的芽层。

引理 2.2.6 [7]在 $U_{tj}\cap U_{tk}\cap U_{ti}$ 上，$\theta_{ik}(t)=\theta_{ij}(t)+\theta_{jk}(t)$。

命题 2.2.7 [8] $(\mathrm{d}M_t/\mathrm{d}t)=\{\theta_{ik}(p,t)\}$ 不依赖于局部坐标 $\{z_j^\alpha\}$ 的选择。

定义 2.2.8 [8] 对可微族 $(\mathcal{M},B,\varpi)$ 的转移函数 $f_{jk}:(z_k^1(p),\cdots,z_k^n(p),t(p))\to(z_j^1(p),\cdots,z_j^n(p),t(p))$ $=(f_{jk}^1(z_k(p,t),t),\cdots,f_{jk}^n(z_k(p,t),t))$，由 $\{\theta_{jk}(p,t)\}$ 所确定的上同调类称为 M_t 的无穷小形变。

可将无穷小形变视为 M_t 的复结构相对 t 的导数，且记为

$$(\mathrm{d}M_t/\mathrm{d}t)=\theta(t)。$$

3. 形变存在性定理

假定 $(\mathcal{M},B,\varpi)$ 是一个紧复流形 M 的复解析族，其中 $B\subset\mathbb{C}$，则 $\varpi^{-1}(t)=M_t$ 的无穷小形变 $\mathrm{d}M_t/\mathrm{d}t$ 可用 $H^1(M_t,\Theta_t)$ 的一个元素来表示。因此，给定一个紧复流形 M，若 $(\mathcal{M},B,\varpi)$ 满足 $0\in B\subset\mathbb{C}$，使得 $\varpi^{-1}(0)=M$，$(\mathrm{d}M_t/\mathrm{d}t)_{t=0}\in H^1(M,\Theta)$，其中 Θ 是 M 上的全纯层。所以，如果存在复解析族 $(\mathcal{M},B,\varpi)$ 满足 $\varpi^{-1}(0)=M$，那么 $H^1(M,\Theta)$ 对应的元素 $\theta=(\mathrm{d}M_t/\mathrm{d}t)_{t=0}$ 是有定义的。

反之，若给定一个 $\theta\in H^1(M,\Theta)$，是否存在一个复解析族 $(\mathcal{M},B,\varpi)$ 满足 $0\in B\subset\mathbb{C}$ 使得 $\varpi^{-1}(0)=M$，$\theta=(\mathrm{d}M_t/\mathrm{d}t)_{t=0}$？这是 Kodaira 和 Spencer [3]给出并证明的紧复流形上复解析族的存在性定理，下面简称为存在性定理。

定理 3.1 (存在性定理[8]) 设 M 是一个紧复流形，Θ 是 M 上的全纯向量场的芽层，假设 $H^2(M,\Theta)=0$，则存在一个复解析族 $(\mathcal{M},B,\varpi)$，$0\in B\subset\mathbb{C}^m$，且满足以下条件：

(i) $\varpi^{-1}(0)=M$；

(ii) $\rho_0:T_0B\to H^1(M,\Theta)$ 是一个同构，即 $\rho_0:\partial/\partial t\mapsto(\partial M_t/\partial t)_{t=0}$，其中 $\varpi^{-1}(t)=M_t$。

为了证明形变的存在性定理，只需取一个 $r>0$ 的多圆盘 $\Delta=\{t\in\mathbb{C}\|t|<r\}\subset B$，构造一个复解析族 $\mathcal{M}_\Delta=\bigcup_{j=1}^{l}U_j\times\Delta$ 满足条件 $\varpi^{-1}(0)=M=\bigcup_jU_j\times 0$，只要找到 $\mathcal{M}$ 的定义函数 $f_{jk}^\alpha(z_k,t)$ 便可。而又因为 $f_{jk|_0}^\alpha(z_k)=f_{jk}^\alpha(z_k,t)$，因此只需确定系数 $f_{jk|_v}^\alpha(z_k)$，$v=1,2\cdots$ 即可。由 M 的定义函数满足以下条件

$$f_{ik}^\alpha(z_k,t)=f_{ij}^\alpha(f_{jk}^\alpha(z_k,t),t),\ \alpha=1,2\cdots,n.。$$

因此系数满足以下等式

$$f_{jk}^\alpha(z_k,t)=f_{jk|_0}^\alpha(z_k)+\sum_{v=1}^{\infty}f_{jk|_v}^\alpha(z_k)t^v。$$

如果上式中所有 $f_{jk}^\alpha(z_k,t)$ 满足收敛，则在一个多圆盘 $\Delta=\{t\in\mathbb{C}||t|<r\}$ 上，$f_{jk}^\alpha(z_k,t)$ 是 $(U_j\cap U_k)\times\Delta$ 上的全纯函数。因此存在一个复解析族 $(\mathcal{M},B,\varpi)$ 满足

$$\varpi^{-1}(0)=M，\ (\mathrm{d}M_t/\mathrm{d}t)_{t=0}=\theta，其中 \varpi^{-1}(t)=M_t。$$

这就完成了存在定理的证明。但由于 $v=2,3,\cdots$ 时的一维上链 $\{f_{jk|_v}\}$，$\{\Gamma_{ijk|_v}\}=\delta\{f_{jk|_v}\}$ 就会有无穷多个选择，所以 $f_{jk}^\alpha(z_k,t)$ 一般不收敛。如果选取合适的 $\{f_{jk|_v}\}$，则需要证明

$$f_{jk}^{\alpha}(z_k,t)=\sum_{v=0}^{\infty}f_{jk|_v}^{\alpha}(z_k)t^v$$

是收敛的幂级数。

由于无法证明 $f_{jk}^{\alpha}(z_k,t)$ 它收敛，因此这种初等方法不能证明存在性定理，但在此过程中得到了一个重要结论：在 $\hat{H}^2(\mathcal{U},\Theta)=0$ 的情况下，存在 t 的幂级数

$$f_{jk}(z_k,t)=\sum_{v=0}^{\infty}f_{jk|_v}(z_k)t^v$$

满足基本方程 $f_{ik}(z_k,t)=f_{ij}(f_{jk}(z_k,t),t)$，且由 $H^2(M,\Theta)=0$ 得到 $\hat{H}^2(\mathcal{U},\Theta)=0$ 。其中 $\hat{H}^2(\mathcal{U},\Theta)=\hat{Z}^2(\mathcal{U},\Theta)/\delta\hat{C}^1(\mathcal{U},\Theta)$， $\hat{C}^1(\mathcal{U},\Theta)$ 是所有一维上链 $\hat{c}^1=\{\sigma_{jk}\}$ 构成的交换群， $\hat{Z}^2(\mathcal{U},\Theta)$ 是所有二维闭上链 $\hat{c}^2=\{\sigma_{ijk}\}$ 构成的群。

因此，如果 $H^2(M,\Theta)=0$ ，则方程 $f_{ik}(z_k,t)=f_{ij}(f_{jk}(z_k,t),t)$ 有形式幂级数的解。于是可以猜想，如果当 $H^2(M,\Theta)=0$ 时，则存在一个复解析族 $(\mathcal{M},\Delta,\varpi)$ 满足下面条件：对于 $\theta\in H^1(M,\Theta)$，有

$$\varpi^{-1}(0)=M\text{，}\ (\mathrm{d}M_t/\mathrm{d}t)_{t=0}=\theta\text{，其中 }\varpi^{-1}(t)=M_t\text{。}$$

4. 形变存在性的证明

为了便于理解，下面基于文献[6] [7]的原有证明思路，并且借鉴 Liu-Rao-Yang [6]关于 Calabi-Yau 流形上构造了一个 L_2- 范数的 Beltrami 微分形式幂级数 $\Phi(t)$，且利用 Kodaira-Spencer-Kuranishi 理论给出了只含有一个参数时的 $\Phi(t)$ 的全局收敛性，而在分布的意义下给出了 $\Phi(t)$ 的正则性，最后再通过归纳法得到了多参数情况的 Beltrami 微分幂级数的全局收敛性与正则性的想法与思路，综合给出存在性定理的证明。

4.1. 形变存在性的一些预备知识

在证明存在性定理之前，先补充一些定义与相关知识。

4.1.1. 复结构全纯

假设 $(\mathcal{M},B,\varpi)$ 是一个复解析族，且有 $0\in B\subset\mathbb{C}^m$， $\varpi^{-1}(t)=M_t$ 。可定义 $|t|=\max_\lambda|t_\lambda|$ ，设 $\Delta=\Delta_r=\{t\in\mathbb{C}^m\,\|t|<r\}$ 是一个半径 $r>0$ 的多圆盘。如果选择一个足够小的多圆盘 $\Delta\subset B$，$\mathcal{M}_\Delta=\varpi^{-1}(\Delta)$ 表示为以下形式

$$\mathcal{M}_\Delta=\bigcup_j U_j\times\Delta\text{。}$$

$\mathcal{M}_\Delta$ 可看作一个复流形，且光滑的局部复坐标系

$$\{(\xi_j,t)\,|\,j=1,\cdots,n\},\ (\xi_j,t)=(\xi_j^1(z,t),\cdots,\xi_j^n(z,t),t_1,\cdots,t_m),$$

是 $\mathcal{M}_\Delta$ 的复结构。设 $(z^1,\cdots,z^n)$ 是 M 的任一局部复坐标，可知

$$\xi_j^{\alpha}(z,t)=\xi_j^{\alpha}(z^1,\cdots,z^n,t_1,\cdots,t_m),\ \alpha=1,\cdots,n,$$

是复变量 $z^1,\cdots,z^n,t_1\cdots t_m$ 的光滑函数。于是，当 Δ 足够小时，对于 $t\in\Delta$，则有

$$\det\left(\partial\xi_j^{\alpha}(z,t)/\partial z^{\lambda}\right)_{\alpha,\lambda=1,\cdots,n}\neq0\,. \tag{4.1}$$

将复流形 M 的切丛记为 $T:T=T(M)$， $\mathcal{Q}^{0,q}(T)$ 是所有 $(0,q)$- 型的光滑向量构成的线性空间，即 M 上 $T\otimes\Lambda^q\bar{T}^*$ 的光滑截面： $\mathcal{Q}^{0,q}(T)=\Gamma(M,\mathcal{A}^{0,q}(T))$ 。$\varphi\in\mathcal{Q}^{0,q}(T)$ 可以表示为如下形式

$$\varphi=\sum_{\lambda=1}^{n}\varphi^{\lambda}(\partial/\partial z^{\lambda}),\ \varphi^{\lambda}=(1/q!)\sum_{v=1}^{n}\varphi_{\bar{v}_1\cdots\bar{v}_q}^{\lambda}(z)d\bar{z}^{v_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{v_q}\,.$$

其中，系数 $\varphi^{\lambda}_{\bar{v}_1\cdots\bar{v}_q}(z)$ 是 M 上的一个局部光滑函数。为了简单起见，将 $\partial/\partial z^{\lambda}$ 记为 ∂_{λ}，$\left(\partial/\partial \bar{z}^{\lambda}\right)=\bar{\partial}_{\lambda}$。由(4.1)可知 $\det\left(\partial_{\lambda}\xi^{\alpha}_{j}(z,t)\right)\neq 0$，则存在唯一的(0, 1)-形式

$$\varphi^{\lambda}_{j}(z,t)=\sum_{v=1}^{n}\varphi^{\lambda}_{j\bar{v}}(z,t)d\bar{z}^{v}.$$

对于 $\lambda=1,\cdots,n$，使它满足以下

$$\bar{\partial}\xi^{\alpha}_{j}(z,t)=\sum_{\lambda=1}^{n}\varphi^{\lambda}_{j}(z,t)\partial_{\lambda}\xi^{\alpha}_{j}(z,t),\ \alpha=1,\cdots,n. \tag{4.2}$$

若称 $\varphi(t)=\varphi(z,t)$ 是关于 t 的光滑向量，由(4.2)可得

$$\bar{\partial}\xi^{\alpha}_{j}(z,t)=\sum_{\lambda=1}^{n}\varphi^{\lambda}(z,t)\partial_{\lambda}\xi_{\xi}(z,t),\ \alpha=1,\cdots,n. \tag{4.3}$$

如果将 $\varphi(t)=\varphi(z,t)$ 作为一个微分算子，则它与一个(0,1)-型向量 $\sum_{\lambda=1}^{n}\varphi^{\lambda}(z,t)\,\partial_{\lambda}f(z)$ 的每个局部光滑函数 $f(z)$ 有关，(4.3)可变成以下形式

$$\left(\bar{\partial}-\varphi(t)\right)\xi^{\alpha}_{j}(z,t)=0,\ \alpha=1,\cdots,n. \tag{4.4}$$

而 $\xi^{\alpha}_{j}(z,0)$ 是 $z^{1},\cdots,z^{n}$ 的全纯函数，即 $\bar{\partial}\xi^{\alpha}_{j}(z,0)=0$。因此由(4.3)，得到

$$\varphi(0)=0. \tag{4.5}$$

命题 4.1 [7]若取足够小的 Δ，对于 $t\in\Delta$，在 M 上的一个局部光滑函数 f 对复结构 M_t 是全纯的当且仅当 f 满足以下等式

$$\left(\bar{\partial}-\varphi(t)\right)f=0. \tag{4.6}$$

这个命题表明 M 上的复结构的形变 M_t 可由 M 上的(0,1)-型向量

$$\varphi(t)=\sum_{\lambda=1}^{n}\varphi^{\lambda}(z,t)\,\partial_{\lambda}=\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{v=1}^{n}\varphi^{\lambda}_{\bar{v}}(z,t)\,d\bar{z}^{v}\,\partial_{\lambda}$$

来表示。对于 $\varphi=\sum_{\lambda=1}^{n}\varphi^{\lambda}\partial_{\lambda}\in\mathcal{Q}^{0,p}(T)$，$\psi=\sum_{\lambda=1}^{n}\psi^{\lambda}\partial_{\lambda}\in\mathcal{Q}^{0,q}(T)$，如果定义它们的 Lie 括号为

$$[\varphi,\psi]=\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\left(\varphi^{\mu}\wedge\partial_{\mu}\psi^{\lambda}-(-1)^{pq}\psi^{\mu}\wedge\partial_{\mu}\varphi^{\lambda}\right)\partial_{\lambda}. \tag{4.7}$$

由 $[\varphi,\psi]$ 的定义可知它并不依赖于复坐标 $\left(z^{1},\cdots,z^{n}\right)$ 的选择，并且 $[\varphi,\psi]\in\mathcal{Q}^{0,p+q}(T)$。如果 $\varphi=\sum_{\lambda=1}^{n}\varphi^{\lambda}\partial_{\lambda}\in\mathcal{Q}^{0,p}(T)$，则有 $\bar{\partial}\varphi=\sum_{\lambda=1}^{n}\bar{\partial}\varphi^{\lambda}\partial_{\lambda}$。可以利用 Lie 括号表示可积条件

$$\bar{\partial}\varphi(t)=(1/2)\left[\varphi(t),\varphi(t)\right]. \tag{4.8}$$

如果 $\bar{\partial}\varphi=0$，则称 $\varphi\in\mathcal{Q}^{0,p}(T)$ 是一个 $\bar{\partial}$- 闭的(0, 1)-型向量，若将所有的 $\bar{\partial}$- 闭的(0,1)-型向量的全体集合记为 $\mathcal{Q}^{0,p}_{\bar{\partial}}(T)$，则有 $\mathcal{Q}^{0,p}_{\bar{\partial}}(T)\subset\mathcal{Q}^{0,p}(T)$。

设 $\varphi=\sum_{\lambda=1}^{n}\varphi^{\lambda}\partial_{\lambda}$ 是 M 的一个(0,1)-型光滑向量，其中 $\varphi^{\lambda}=\sum_{v=1}^{n}\varphi^{\lambda}_{\bar{v}}d\bar{z}^{v}$。假设

$$\det\left(\delta^{\lambda}_{v}-\sum_{\mu=1}^{n}\varphi^{\mu}_{\bar{v}}(z,t)\overline{\varphi^{\lambda}_{\bar{\mu}}(z,t)}\right)_{\lambda,v=1,\cdots,n}\neq 0,$$

并且 φ 满足可积条件 $\bar{\partial}\varphi=(1/2)[\varphi,\varphi]$。如果选定 M 的一个有限开覆盖 $\{U_j\}$，再由 Newlander-Nirenberg [9]定理，则在 U_j 上存在 n 个线性光滑函数 $\xi^{\alpha}_{j}=\xi^{\alpha}_{j}(z)$，$\alpha=1,\cdots,n$ 使得

$$\left(\bar{\partial}-\sum_{\lambda=1}^{n}\varphi^{\lambda}\partial_{\lambda}\right)\xi^{\alpha}_{j}=0.$$

由于

$$\det\frac{\partial\left(\xi_j^1,\cdots,\xi_j^n,\overline{\xi}_j^1,\cdots,\overline{\xi}_j^n\right)}{\partial\left(z^1,\cdots,z^n,\overline{z}^1,\cdots,\overline{z}^n\right)}\neq 0,$$

如果 M 被视为一个微分流形，则 $\xi_j : z\to\xi_j(z)=\left(\xi_j^1(z),\cdots,\xi_j^n(z)\right)$ 为 $U_j\subset M$ 上的局部复坐标系。若 $\left(\overline{\partial}-\varphi(t)\right)f=0$，则 U 上的一个局部光滑函数 f 是 $\left(\xi_j^1(z),\cdots,\xi_j^n(z)\right)$ 的一个全纯函数。因此在 $U_j\cap U_k\neq\phi$ 上，$\xi_j^\alpha(z)$ 是 $\left(\xi_k^1(z),\cdots,\xi_k^n(z)\right)$ 的全纯函数，即

$$\xi_j^\alpha(z)=f_{jk}^\alpha\left(\xi_k(z)\right).$$

综上可述，$\left\{\xi_1,\cdots,\xi_j,\cdots\right\}$ 是微分流形 M 的一个局部复坐标系，则在 M 上定义了一个复结构，将其记为 M_t。若 φ 满足(4.3)中定义的 $\varphi(t)$，则有 $M_{\varphi(t)}=M_t=\varpi^{-1}(t)$。

4.2.2. Hölder 范数和控制函数

定义 4.2 [8]对于 M 上的一个(0, q)-型光滑向量 $\varphi\in\mathcal{Q}^{0,q}(T)$，将它的 Hölder 范数 $|\varphi|_{k+\alpha}$ 定义如下：设 $\left\{U_j\right\}$ 是 M 上的一个有限开覆盖，U_j 为一个局部坐标圆盘，则存在一个复坐标 $\left\{z_j\right\}$，$z_j=\left(z_j^1,\cdots z_j^n\right)$ 满足以下条件：

(a) $\left[U_j\right]$ 包含于 z_j 的邻域；

(b) $U_j=\left\{\left|z_j^1\right|<1,\cdots,\left|z_j^n\right|<1\right\}$。

若设 $z_j^v=x_j^{2v-1}+i\,x_j^{2v}$，引入实坐标 $x=\left(x_j^1,\cdots,x_j^{2n}\right)$，且将 U 上的 $\varphi\in\mathcal{Q}^{0,q}(T)$ 表示为

$$\varphi=\sum\nolimits_\lambda(1/q!)\sum\varphi_{j\,\overline{v}_1\cdots\overline{v}_q}^\lambda d z_j^{\overline{v}_1}\wedge\cdots\wedge d z_j^{\overline{v}_q}\left(\partial/\partial z_j^\lambda\right),$$

其中 $\varphi_{j\,\overline{v}_1\cdots\overline{v}_q}^\lambda=\varphi_{j\,\overline{v}_1\cdots\overline{v}_q}^\lambda\left(x_j\right)$ 为 $U_j\in\mathbb{R}^{2n}$ 上的光滑函数。定义

$$|\varphi|_{k+\alpha}=\max_j\max_{\lambda,v_1\cdots v_q}\left|\varphi_{j\,\overline{v}_1\cdots\overline{v}_q}^\lambda\right|_{k+\alpha}^{U_\alpha}.$$

由 Hölder 范数不依赖于 $\left\{U_j\right\}$ 与 $\left\{z_j\right\}$ 的选择，因此选定 $\left\{U_j\right\}$ 与 $\left\{z_j\right\}$，则有

$$|\varphi|_0=\max_j\max_{\lambda,v_1\cdots v_q}\sup_{x\in U_j}\left|\varphi_{j\,\overline{v}_1\cdots\overline{v}_q}^\lambda\left(x_j\right)\right|.$$

命题 4.3 [8]对于 $k\geq 2$，$\varphi\in\mathcal{Q}^{0,q}(T)$，有以下不等式

$$|\varphi|_{k+\alpha}=c\left(\left|\Delta_{\overline{\partial}}\,\varphi\right|_{k-2\oplus\alpha}+|\varphi|_0\right). \tag{4.9}$$

其中，c 是不依赖于 k 与 α 的常数，并称(4.9)式称为一个先验估计。

在 $\mathcal{Q}^{0,2}(T)$ 上考虑 $H^2(M,\Theta)=0$ 且 $\varpi^{-1}(0)=M$，则由命题 4.3 有以下引理：

引理 4.4 [8]对于 $k\geq 2$，$\psi\in\mathcal{Q}^{0,2}(T)$，存在以下不等式

$$|G\psi|_{k+\alpha}\leq c_1|\psi|_{k-2+\alpha}. \tag{4.10}$$

其中，c_1 是一个不依赖于 ψ 的常数，G 是一个 Green 算子。

下面给出控制函数的概念。

定义 4.5 [8]假设有一个 $t_1,\cdots,t_m$ 的幂级数

$$P(t)=\sum\nolimits_{v_1,\cdots,v_m=0}^\infty P_{v_1\cdots v_m}t_1^{v_1}\cdots t_m^{v_m},\ P_{v_1\cdots v_m}\in\mathbb{C}.$$

如果 $\left|P_{v_1\cdots v_m}\right|\leq a_{v_1\cdots v_m}$，$v_1,\cdots,v_m=0,1,\cdots$，则存在幂级数

$$a(t)=\sum\nolimits_{v_1,\cdots,v_m=0}^\infty a_{v_1\cdots v_m}t_m^{v_m},\ a_{v_1\cdots v_m}\geq 0.$$

将上式中的 $a(t)$ 称为 $P(t)$ 的控制函数，简记为 $P(t) \ll a(t)$。

对于一个幂级数

$$\psi(t)=\sum_{v_1,\cdots,v_m=0}^{\infty}\psi_{v_1\cdots v_m}t_1^{v_1}\cdots t_m^{v_m},\ \psi_{v_1\cdots v_m}\in\mathcal{Q}^{0,q}(T),$$

定义 $|\psi|_{k+\alpha}(t)$ 如下：

$$|\psi|_{k+\alpha}(t)=\sum_{v_1,\cdots,v_m=0}^{\infty}\left|\psi_{v_1\cdots v_m}\right|_{k+\alpha}t_1^{v_1}\cdots t_m^{v_m}.$$

如果 $\left|\psi_{v_1\cdots v_m}\right|_{k+\alpha}\le a_{v_1\cdots v_m}$， $v_1,\cdots,v_m=0,1,\cdots$， 则有 $|\psi|_{k+\alpha}(t)\ll a(t)$。

4.2. 形变存在性的证明

关于存在性定理 3.1 的证明，考虑分成三步：首先构造一个满足可积条件与初始条件的形式幂级 $\varphi(t)$ 数；然后应用 Hölder 范数与借鉴 Liu-Rao-Yang 的方法证明这个形式幂级数 $\varphi(t)$ 展开式中系数的收敛性；最后再证明由 $\varphi(t)$ 确定的复结构 $M_{\varphi(t)}$ 构成的一个族 $\{M_{\varphi(t)}\}$ 是一个满足条件(i)与(ii)的复解析族。

定理 3.1 的证明：分成三步论证。

(1) 构造满足可积条件与初始条件的形式幂级数 $\varphi(t)$。

对于 $\lambda=1,\cdots,m$， 若存在 $\beta_\lambda\in\mathcal{Q}_{\bar\partial}^{0,1}(T)$ 使得 $\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$ 为 $H^1(M,\Theta)$ 的一组基，假设 M 上存在(0,1)-形式光滑向量 $\varphi(t)$ 的一集族 $\{\varphi(t)|t\in\Delta\}$ 满足可积条件

$$\bar\partial\varphi(t)=(1/2)\left[\varphi(t),\varphi(t)\right]$$

与初始条件

$$\varphi(0)=0,\ \left(\bar\partial\ \varphi(t)/\partial\ t_\lambda\right)_{t=0}=\beta_\lambda,\ \lambda=1,\cdots,m. \tag{4.11}$$

由于假设 Δ 足够小，可设 $\varphi(t)=\sum_\lambda\sum_v\varphi_v^\lambda(t)\,d\,\bar z^v\,\partial_v$ 满足条件：

$$\det\left(\delta_v^\lambda-\sum_\mu\varphi_v^\mu(t)\,\overline{\varphi_v^\lambda(t)}\right)\neq 0.$$

因此，由 Newlander-Nirenberg 定理可知每个 $\varphi(t)$ 决定了 M 上的一个复结构 $M_{\varphi(t)}$。而这样得到的一个族 $\{M_{\varphi(t)}\}$ 是满足条件(i)与(ii)的复解析族。首先要构造这样一个族 $\{\varphi(t)|t\in\Delta\}$。

将 $\varphi(t)$ 表示为 $t_1,\cdots,t_m$ 的幂级数形式：

$$\varphi(t)=\sum\varphi_{v_1\cdots v_m}t_1^{v_1}\cdots t_m^{v_m},\ \varphi_{v_1\cdots v_m}\in\mathcal{Q}^{0,1}(T).$$

下面规定一些符号。对于 $t_1,\cdots,t_m$ 的一个幂级数 $P(t)$， 设

$$P_v(t)=\sum_{v_1+\cdots v_m=v}P_{v_1\cdots v_m}t_1^{v_1}\cdots t_m^{v_m}$$

为它的第 v 齐次部分。因此得到

$$P(t)=\sum_{v=0}^{\infty}P_v(t)=P_0(t)+\cdots+P_v(t)+\cdots.$$

这里约定 $P^v(t)=P_0(t)+\cdots+P_v(t)$。给定两个幂级数 $P(t)$ 与 $Q(t)$， 如果 $P^v(t)=Q^v(t)$， 则可表示为 $P(t)\equiv_v Q(t)$。我们需要找到一个幂级数 $\varphi(t)$ 满足可积条件与初始条件。不妨设

$$\varphi_0=0,\ \varphi_1(t)=\sum_{\lambda=1}^{m}\beta_\lambda t_\lambda \tag{4.12}$$

$$\varphi(t)=\sum_{v=1}^{\infty}\varphi_v(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\cdots$$

满足初始条件(4.11)，所以还需要确定 $\varphi_2(t),\cdots,\varphi_v(t),\cdots$ 使它满足

$$\bar{\partial}\varphi(t)=(1/2)\left[\varphi(t),\varphi(t)\right]. \tag{4.13}$$

由于 $\beta_\lambda\in\mathcal{Q}_{\bar{\partial}}^{0,1}(T)$，则可得到 $\bar{\partial}\varphi_1(t)=0$，且 $\left[\varphi_\mu(t),\varphi_v(t)\right]$ 是 $t_1,\cdots,t_m$ 的 $\mu+v$ 次齐次多项式。因此(4.13)式可简化为无穷多个同余方程组

$$\bar{\partial}\varphi^v(t)\equiv(1/2)\left[\varphi^{v-1}(t),\ \varphi^{v-1}(t)\right],\ v=2,3\cdots \tag*{(4.14)$_v$}$$

因此通过对 v 进行归纳，只要确定 $\varphi_v(t)$ 满足(4.14)$_v$ 即可得到 $\varphi(t)$。

假设已经确定了 $\varphi^v(t)=\varphi_1(t)+\cdots+\varphi_n(t)$ 使得式(4.14)$_v$ 成立，则我们接下来考虑(4.14)$_{v+1}$。由 $\varphi^{v+1}(t)=\varphi^v(t)+\varphi_{v+1}(t)$，(4.14)$_{v+1}$ 可以写为以下形式

$$\bar{\partial}\varphi_{v+1}(t)\equiv_v(1/2)\left[\varphi^v(t),\varphi^v(t)\right]-\bar{\partial}\varphi^v(t). \tag{4.15}$$

由 $\left[\varphi^v(t),\varphi^v(t)\right]\equiv_v\left[\varphi^{v-1}(t),\varphi^{v-1}(t)\right]$，且假设(4.14)$_v$ 成立，则 $(4.15)\equiv_v 0$ 的右边恒为 0。若设 $\psi_{v+1}(t)$ 为(4.15)右边的第 $(v+1)$ 次齐次部分，则有

$$(1/2)\left[\varphi^v(t),\varphi^v(t)\right]-\bar{\partial}\varphi^v(t)\equiv_{v+1}\psi_{v+1}(t) \tag{4.16}$$

从而使同余(4.15)简化为

$$\bar{\partial}\varphi_{v+1}(t)=\psi_{v+1}(t). \tag{4.17}$$

而由(4.16)与 $[\psi,\varphi]=(-1)^{pq}[\varphi,\psi]$ 以及 $\bar{\partial}[\varphi,\psi]=\left[\bar{\partial}\varphi,\psi\right]+(-1)^p\left[\varphi,\bar{\partial}\psi\right]$，得

$$\bar{\partial}\psi_{v+1}(t)\equiv_{v+1}(1/2)\bar{\partial}\left[\varphi^v(t),\varphi^v(t)\right]=\left[\bar{\partial}\varphi^v(t),\varphi^v(t)\right].$$

如上所述，则有 $\bar{\partial}\varphi^v(t)\equiv_v(1/2)\left[\varphi^v(t),\varphi^v(t)\right]$。因为 $\varphi^v(t)\equiv_0 0$，于是有

$$\left[\bar{\partial}\varphi^v(t),\varphi^v(t)\right]\equiv_{v+1}(1/2)\left[\left[\varphi^v(t),\varphi^v(t)\right],\varphi^v(t)\right].$$

又因为 $\left[\left[\varphi^v(t),\varphi^v(t)\right],\varphi^v(t)\right]=0$，所以 $\bar{\partial}\psi_{v+1}(t)=0$。也就是说，

$$\psi_{v+1}(t)=\sum\nolimits_{v_1+\cdots v_m=v+1}\psi_{v_1\cdots v_m}t_1^{v_1}\cdots t_m^{v_m},\ \psi_{v_1\cdots v_m}\in\mathcal{Q}_{\bar{\partial}}^{0,2}(T).$$

因此，由 Dolbeault 定理[7]可知，如果令 $\mathcal{Q}_{\bar{\partial}}^{0,p}(T)=\Gamma\left(M,\bar{\partial}\mathcal{A}^{0,p-1}(T)\right)$，则当 $p\geq1$ 时有 $H^p(M,\Theta)\cong\mathcal{Q}_{\bar{\partial}}^{0,p}(T)/\bar{\partial}\mathcal{Q}_{\bar{\partial}}^{0,p-1}(T)$。由于 $H^2(M,\Theta)=0$，故可以找到 $\varphi_{v_1\cdots v_m}\in\mathcal{Q}^{0,1}(T)$ 使得 $\psi_{v_1\cdots v_m}\in\mathcal{Q}_{\bar{\partial}}^{0,2}(T)$，因此(4.17)存在一个解

$$\varphi_{v+1}(t)=\sum\nolimits_{v_1+\cdots v_m=v+1}\varphi_{v_1\cdots v_m}t_1^{v_1}\cdots t_m^{v_m}.$$

再令 $\varphi^{v+1}(t)=\varphi^v(t)+\varphi_{v+1}(t)$，这样(4.14)$_v$ 式成立。

那么，这样就构造了一个满足可积条件(4.8)与初始条件(4.11)的形式幂级数 $\varphi(t)=\sum_{v=1}^{\infty}\varphi_v(t)$。

(2) 证明幂级数 $\varphi(t)$ 对于足够小的 $t_1,\cdots,t_m$ 满足收敛性。

在 M 上引入一个 Hermite 度量 $g=\sum_{v,\lambda=1}^{n}g_{\lambda\bar{v}}dz^\lambda\otimes dz^{-v}$，将切丛表示为 T，并且有 $\sum_{\lambda=1}^{n}\xi^\lambda\partial_\xi\in T$。如果由 $\sum_{v,\lambda=1}^{n}g_{\lambda\bar{v}}\xi^\lambda\bar{\xi}^v$ 定义纤维上的 Hermite 度量，则 $\varphi,\ \psi\in\mathcal{Q}^{0,q}(T)$ 的内积定义为

$$(\varphi,\psi)=\int_M\sum\nolimits_{v,\lambda=1}^{n}g_{\lambda\bar{v}}\varphi^\lambda\wedge*\bar{\psi}^v.$$

若将 $\bar{\partial}$ 的伴随算子记为 $\bar{\partial}^*$，则它们满足

$$\left(\bar{\partial}\varphi,\psi\right)=\left(\varphi,\bar{\partial}^*\psi\right),\ \varphi\in\mathcal{Q}^{0,q}(T),\ \psi\in\mathcal{Q}^{0,q+1}(T).$$

为了证明多圆盘 $\Delta_\varepsilon=\left\{t\in\mathbb{C}^m\,\middle|\,|t_1|<\varepsilon,\cdots|t_m|<\varepsilon\right\}$，$\forall\varepsilon>0$ 上的 $\varphi(t)=\sum_{v=1}^{\infty}\varphi_v(t)$ 是收敛幂级数，利用

Hölder 范数的定义 4.2 及先验估计命题 4.3，只需在 Δ_ε 上找到一个绝对收敛的幂级数 $a(t)$ 使其满足

$$|\varphi|_{k+\alpha}(t) \ll a(t).$$

如前所述，构造一个 $\varphi(t)=\sum_{v=1}^{\infty}\varphi_v(t)$，(4.16)中的 $\bar\partial\varphi_v(t)$ 是 $t_1,\cdots,t_m$ 的 v 次多项式，右边的 $\psi_{v+1}(t)$ 是 $(1/2)\left[\varphi^v(t),\varphi^v(t)\right]$ 的 $v+1$ 次其次部分，则

$$\psi_{v+1}(t)=(1/2)\left[\varphi^v(t),\varphi^v(t)\right]_{v+1}.$$

由于 $\bar\partial\psi_{v+1}(t)=0$，$\varphi_{v+1}(t)=\bar\partial^* G\psi_{v+1}(t)$。所以 $\varphi_{v+1}(t)$ 是方程 $\bar\partial\varphi_{v+1}(t)=\psi_{v+1}(t)$ 的一个解. 因此记

$$\varphi_1(t)=\sum_{\lambda=1}^{m}\beta_\lambda t_\lambda .$$

首先，对于 $v=1,2,3,\cdots$，定义 φ_{v+1} 如下：

$$\varphi_{v+1}\underset{v}{\equiv}(1/2)\bar\partial^* G\left[\varphi^v(t),\varphi^v(t)\right]_{v+1}. \tag{4.18}$$

则得到幂级数 $\varphi(t)=\sum_{v=1}^{\infty}\varphi_v(t)$。若给定 $a(t)$ 的一个幂级数

$$A(t)=(b/c)\sum_{v=1}^{\infty}\left(\psi^v(t_1+\cdots+t_m)^v/v^2\right),$$

则对于 $A(t)$，有以下不等式

$$A(t)^2 \ll (b/c)A(t). \tag{4.19}$$

固定一个自然数 $k\ge 2$，若选择足够大的 b 与 c，则需对 v 用归纳法证明

$$\left|\varphi^v\right|_{k+\alpha} \ll A(t). \tag*{(4.20)$_v$}$$

成立。即假设(4.20)$_v$ 成立，来推导证明(4.20)$_{v+1}$ 成立，证明过程见([8], pp. 279-280)。由此证明了

$$|\varphi|_{k+\alpha} \ll A(t). \tag{4.21}$$

由于幂级数 $\sum_{v=1}^{\infty}s^v/v^2$ 的收敛半径是 1，如果 $0<\varepsilon\le(1/mc)$，对于 $\forall t\in\Delta_\varepsilon$，当 $A(t)$ 满足绝对收敛条件，所以 $\varphi(t)=\sum_{v=1}^{\infty}\varphi_v(t)$ 相对于 Hölder 范数 $|\ |_{k+\alpha}$ 是收敛的。因此，$\varphi(t)$ 是 $M\times\Delta_\varepsilon$ 上的一个(0,1)-型 C^k 向量，即 $U_j\times\Delta_\varepsilon$ 上 $\varphi(t)$ 可表达为以下形式

$$\varphi(t)=(1/2)\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\beta,\gamma}\varphi_{j\beta\gamma}^{\lambda}(z_j,t)\,d\bar z_j^\beta\wedge d\bar z_j^\gamma\left(\partial/\partial z_j^\gamma\right).$$

虽然 $k\ge 2$，但并不能直接得出 $\varphi(t)$ 是光滑的，下面证明它是光滑可微的。

由于 $\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$ 作为 $\mathbb{H}^{0,1}(T)$ 的一组基，则对于 $\varphi_1(t)=\beta_1 t_1+\cdots+\beta_m t_m$，有 $\bar\partial^*\varphi_1(t)=0$。又因为 $\varphi_v(t)=\bar\partial^* G\psi_v(t)$，$v=2,3,\cdots$，$\bar\partial^*\varphi_v(t)=0$，则

$$\bar\partial^*\varphi(t)=0,\ \Delta_{\bar\partial}\varphi(t)=\bar\partial^*\bar\partial\varphi(t),$$

故 $\varphi(t)$ 满足可积条件 $\bar\partial\varphi(t)=(1/2)\left[\varphi(t),\varphi(t)\right]$，$\Delta_{\bar\partial}\varphi(t)=(1/2)\,\bar\partial^*\left[\varphi(t),\varphi(t)\right]$。另一方面，由于 $\varphi(t)$ 是 $t_1,\cdots,t_m$ 的全纯函数，$\bar\partial\varphi(t)/\partial\bar t_\lambda=0$。因此 $\varphi(t)$ 是 2 阶偏微分方程

$$\left(-\sum_{\lambda=1}^{m}\partial^2/\partial t_\lambda\partial\bar t_\lambda+\Delta_{\bar\partial}\right)\varphi(t)-(1/2)\bar\partial^*\left[\varphi(t),\varphi(t)\right]=0. \tag{4.22}$$

的一个解。

因为 $|t|\to 0$，则 $\varphi(t)\to 0$。如果取一个 Δ_ε，若假设(4.22)是 $M\times\Delta_\varepsilon$ 上的一个拟线性椭圆偏微分方程，则可以得到它的光滑解 $\varphi(t)$ [10]。这样就构造了一个(0,1)-型的光滑向量 $\varphi(t)=\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{v=1}^{n}\varphi_v^\lambda(z,t)\,d\bar z^v\partial_\lambda$，

它满足可积条件(4.8)与初始条件(4.11)；接着构造一个 $\varphi(t)$ 的族 $\{\varphi(t)|t\in\Delta_\varepsilon\}$，如前所述，每个 $\varphi(t)$ 决定一个 M 上的复结构 $M_{\varphi(t)}$。

(3) 证明 $M_{\varphi(t)}$ 构成的族 $\{M_{\varphi(t)}|t\in\Delta_\varepsilon\}$ 是一个复解析族。

考虑将 $\varphi=\varphi(t)$ 作为复流形 $M\times\Delta_\varepsilon$ 上的一个(0, 1)-型向量，即

$$\varphi=\varphi(t)=\sum_{\lambda=1}^{n}\left(\sum_{v=1}^{n}\varphi_{\bar v}^{\lambda}\,d\bar z^{v}+\sum_{\mu=1}^{v}\varphi_{n+\mu}^{\lambda}\,d\bar t_{\mu}\right)\left(\partial/\partial z^{\lambda}\right)+\sum_{\mu=1}^{m}\varphi^{n+\mu}\left(\partial/\partial t_{\mu}\right),$$

对于 $\mu=1,\cdots,m$，有 $\varphi^{n+\mu}=\varphi^{(\lambda/n+\mu)}=0$，$\varphi_{\bar v}^{\lambda}=\varphi_{\bar v}^{\lambda}(z,t)$ 为 $t_1,\cdots,t_m$ 的全纯函数，故 $\bar\partial\varphi_{\bar v}^{\lambda}/\bar\partial t_{\mu}=0$，且

$$\bar\partial\varphi=\sum_{\lambda,v=1}^{n}\left(\sum_{\beta=1}^{n}\left(\partial\varphi_{\bar v}^{\lambda}/\partial\bar z^{\beta}\right)d\bar z^{\beta}+\sum_{\mu=1}^{m}\left(\partial\varphi_{\bar v}^{\lambda}/\partial\bar z^{\mu}\right)d\bar t_{\mu}\right)\wedge d\bar z^{v}\left(\partial/\partial z^{\lambda}\right).$$

可以将 $\varphi(t)$ 的外微分 $\bar\partial\varphi(t)$ 视为一个(0,1)-型的向量形式，可表示为 $\bar\partial\varphi=\bar\partial\varphi(t)$。因此得到 $[\varphi,\varphi]=[\varphi(t),\varphi(t)]$。所以作为 $M\times\Delta_\varepsilon$ 上的一个(0,1)型光滑向量，φ 满足可积条件

$$\bar\partial\varphi=(1/2)[\varphi,\varphi].$$

如果记 $L_v=(\partial/\partial\bar z_v)-\sum_{\lambda=1}^{n}\varphi_{\bar v}^{\lambda}(z,t)\left(\partial/\partial z^{\lambda}\right)$，则偏微分方程 $(\bar\partial-\varphi)f=0$ 可以简化为以下方程组

$$\begin{cases}L_1 f=0\\ \vdots\\ L_n f=0\end{cases}\Rightarrow L_v f=0,\ v=1,\cdots,n,$$

$$\partial f/\partial\bar t_{\mu}=0,\ \mu=1,\cdots,m. \tag{4.23}$$

这里 $L_1,\cdots L_n,\bar L_1,\cdots\bar L_n,\partial/\partial\bar t_1,\cdots,\partial/\partial\bar t_m,\partial/\partial t_1,\cdots,\partial/\partial t_m$ 是线性无关的，因此由 $\varpi^{-1}(0)=M$，φ 定义了 $M\times\Delta_\varepsilon$ 上的一个复结构 $\mathcal{M}$。如果取一个足够小的 Δ_ε，则方程(4.23)在 $U_j\times\Delta_\varepsilon$ 上有 $(n+m)$ 个线性无关的解 $f=\xi_j^{\beta}(z,t)$，$\beta=1,\cdots,m+n$。

映射

$$\zeta_j:(z,t)\to\zeta_j(z,t)=\left(\xi_j^{1}(z,t),\cdots,\xi_j^{n+m}(z,t)\right)$$

给出了复结构 $\mathcal{M}$ 的一个复坐标，由 $f=t_\mu$ 是(4.23)的一个解可知，倘若假设 $\xi_j^{n+\mu}(z,t)=t^{\mu}$，$\mu=1,\cdots,m$，则有

$$\zeta_j:(z,t)\to\left(\xi_j^{1}(z,t),\cdots,\xi_j^{n}(z,t),t_1,\cdots,t_m\right).$$

故 $\varpi:\left(\xi_j^{1}(z,t),\cdots,\xi_j^{n}(z,t),t_1,\cdots,t_m\right)\to(t_1,\cdots,t_m)$ 是一个从 $\mathcal{M}$ 到 Δ_ε 的全纯映射，且对于 $t\in\Delta_\varepsilon$，$\varpi^{-1}(t)$ 是一个局部复坐标为 $\{\xi_j^{1}(z,t),\cdots,\xi_j^{n}(z,t)\}$ 的复流形。由 $f=\xi_j^{\beta}(z,t)$，$\beta=1,\cdots,n$ 是 U_j 上一个的方程 $(\bar\partial-\varphi(t))f=0$ 的线性无关解，且 $\varpi^{-1}(t)=M_{\varphi(t)}$，因此 $\{M_{\varphi(t)}|t\in\Delta_\varepsilon\}$ 构成了一个复解析族 $(\mathcal{M},\Delta_\varepsilon,\varpi)$。

综上，形变存在性定理即定理 3.1 完成了证明。□

基金项目

课题部分受到国家自然科研基金项目(批准号：12061014)和广西自然科学基金项目(批准号: 2019GXNSFAA245043)的资助。

参考文献

[1] Noether, M. (1800) Anzahl der ModuleneinerClassealgebraischerFlächen. Gedruckt in der reichsdruckerei.

[2] Frolicher, A. and Nijenhuis, A. (1957) A Theorem on Stability of Complex Structures. *National Academy of Sciences of the United State of America*, **43**, 220-248. https://doi.org/10.1073/pnas.43.2.239

[3] Kodaira, K. and Spencer, D.C. (1958) On Deformations of Complex Analytic Structures, I, II. *Annals of Mathematics*, **67**, 328-466. https://doi.org/10.2307/1970009

[4] Kuranishi, M. (1963) On Deformations of Compact Complex Structures. *Proc. Intern. Congr. Math.*, Stockholm, 1962, 357-359.

[5] Deligne, P. (1974) La conjecture de Weil. I. *Publicationa Mathématiques de l'Institut des Hautes etudes Scientifiques*, **43**, 273-307. https://doi.org/10.1007/BF02684373

[6] Liu, K.F., Rao, S. and Yang, X.K. (2015) Quasi-Isometry and Deformations of Calabi-Yau Manifolds. *Inventiones Mathematicae*, **199**, 423-453. https://doi.org/10.1007/s00222-014-0516-1

[7] Morrow, J. and Kodaira, K. (1971) Complex Manifolds. Holt, Rinehart and Winston, New York.

[8] Kodaira, K. (2004) Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures. Springer-Verlag, New York, Berlin. https://doi.org/10.1007/b138372

[9] Newlander, A. and Nirenberg, L. (1957) Complex Analytic Coordinates in Almost Complex Manifolds. *Annals of Mathematics*, **65**, 391-404. https://doi.org/10.2307/1970051

[10] Douglis, A. and Nirenberg, L. (1955) Interior Estimates for Elliptic Systems of Partial Differential Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **8**, 503-538. https://doi.org/10.1002/cpa.3160080406