Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(5), 1713-1720**
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.105182

求解Rosenau-RLW方程的一个线性化差分算法

张芝源，胡劲松*

西华大学理学院，四川 成都
Email: 1285185087@qq.com, *hujs@mail.xhu.edu.cn

收稿日期：2021年4月25日；录用日期：2021年5月8日；发布日期：2021年5月28日

摘　要

本文对一类带有齐次边界条件的Rosenau-RLW方程的初边值问题进行了数值研究，在保证二阶理论精度的前提下，对非线性项在时间层进行外推线性化处理，提出一个新的三层线性化差分格式，证明了差分解的存在唯一性，在不能得到差分解最大模先验估计的情况下，综合运用数学归纳法和离散泛函分析方法，证明了该差分格式的收敛性和稳定性。数值实验验证了该方法是可靠的。

关键词

Rosenau-RLW方程，线性化差分格式，收敛性，稳定性

A Linearized Difference Algorithm for Solving Rosenau-RLW Equation

Zhiyuan Zhang, Jinsong Hu*

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan
Email: 1285185087@qq.com, *hujs@mail.xhu.edu.cn

Received: Apr. 25th, 2021; accepted: May 8th, 2021; published: May 28th, 2021

Abstract

In this paper, the initial boundary value problem of a class of Rosenau-RLW equations with homogeneous boundary conditions is studied numerically. On the premise of ensuring the accuracy of the second order theory, the nonlinear terms are extrapolated into the time layer, and a new three-level linearized difference scheme is proposed, which proves the existence and uniqueness of the difference decomposition. In the absence of a priori estimate of the maximum modulus of

*通讯作者。

文章引用: 张芝源, 胡劲松. 求解 Rosenau-RLW 方程的一个线性化差分算法[J]. 应用数学进展, 2021, 10(5): 1713-1720. DOI: 10.12677/aam.2021.105182

difference decomposition, the convergence and stability of the difference scheme are proved by means of mathematical induction and discrete functional analysis. Numerical experiments show that the method is reliable.

Keywords

Rosenau-RLW Equation, The Linearized Difference Scheme, Convergence, Stability

1. 引言

为了克服的 KdV 方程的某些不足，文献[1] [2]提出了 Rosenau 方程：

$$u_t + u_{xxxxt} + u_x + uu_x = 0\,, \tag{1}$$

而方程(1)通常也被看作是正则长波(RLW)方程[3] [4]

$$u_t - u_{xxt} + u_x + uu_x = 0 \tag{2}$$

的另一种表述形式，对 Rosenau 方程(1)和 RLW 方程(2)的研究引起了众多学者的关注。

而 Rosenau-RLW 方程[5]-[14]

$$u_t - u_{xxt} + u_{xxxxt} + u_x + uu_x = 0,\ x \in (x_L, x_R),\ t \in (0, T] \tag{3}$$

是 Rosenau 方程(1)和 RLW 方程(2)的推广形式，也是一个重要的物理模型[5]-[14]，文献[5]对其进行了有限元方法研究，文献[6]-[14]对方程 Rosenau-RLW(3)及其广义形式进行了有限差分方法研究，其中非线性差分格式[10] [11] [12] [13] [14]在数值求解时都需要非线性迭代，计算耗时较多。本文对非线性项 uu_x 进行外推线性化离散处理，从而对 Rosenau-RLW 方程(3)进行线性化有限差分方法数值求解研究，考虑其如下的初值条件和边界条件：

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in (x_L, x_R) \tag{4}$$

$$u(x_L,t) = u(x_R,t) = 0,\ u_{xx}(x_L,t) = u_{xx}(x_R,t) = 0,\ t \in (0,T] \tag{5}$$

其中 $u_0(x)$ 是一个已知的光滑函数。

2. 线性差分格式及可解性

剖分有界闭区域 $[x_L, x_R] \times [0,T]$，令 τ 为时间步长，$t_n = n\tau$，$0 \le n \le N$，$N = \left[\dfrac{T}{\tau}\right]$；空间步长取为 $h = \dfrac{x_R - x_L}{J}$，$x_j = x_L + jh$，$0 \le j \le J$；用 u_j^n 和 U_j^n 分别表示函数 $u(x,t)$ 在点 (x_j, t_n) 处的精确值和近似值，即 $u_j^n = u(x_j, t_n)$，$U_j^n \approx u(x_j, t_n)$。规定 C 为与时间步长和空间步长均无关的常数，且 $C > 0$。并定义以下符号：

$$(U_j^n)_x = \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h},\quad (U_j^n)_{\bar{x}} = \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h},\quad (U_j^n)_{\hat{x}} = \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h},\quad (U_j^n)_t = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau},\quad U_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{U_j^{n+1} + U_j^n}{2},$$

$$\left\langle U^n,V^n\right\rangle = h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^nV_j^n\text{ ，}\left\|U^n\right\|^2 = \left\langle U^n,U^n\right\rangle\text{ ，}\left\|U^n\right\|_\infty = \max_{1\le j\le J-1}\left|U_j^n\right|\text{，}$$

$$Z_h^0 = \left\{U = \left(U_j\right)\middle| U_{-1} = U_0 = U_J = U_{J+1} = 0, j = -1,0,\cdots J,J+1\right\}.$$

在数值离散时，将方程(3)中的非线性项 uu_x 部分外推到 $n-1$ 层，从而对问题(3)~(5)提出如下三层线性化有限差分数值格式：

$$\left(U_j^n\right)_{\hat{t}} - \left(U_j^n\right)_{x\bar{x}\hat{t}} + \left(U_j^n\right)_{xx\bar{x}\bar{x}\hat{t}} + \left(U_j^{n+\frac{1}{2}}\right)_{\hat{x}} + \left(\frac{3}{2}U_j^n - \frac{1}{2}U_j^{n-1}\right)\left(U_j^{n+\frac{1}{2}}\right)_{\hat{x}} = 0 \tag{6}$$

$$U_j^0 = u_0\left(x_j\right),\ \left(j = 1,2,\cdots,J-1\right) \tag{7}$$

$$U^n \in Z_h^0,\ \left(U_n^0\right)_{x\bar{x}} = \left(U_J^n\right)_{x\bar{x}} = 0,\ n = 1,2,\cdots,N \tag{8}$$

引理 1 [15] 对 $\forall U \in Z_h^0$，恒有：

$$\left\|U_{\hat{x}}\right\|^2 \le \left\|U_x\right\|^2.$$

以下用数学归纳法来分析有限差分数值格式(6)~(8)其解的存在唯一性：

定理 1 当时间步长 τ 足够小时，线性有限差分格式(6)~(8)的数值解存在且唯一。

证明 由(7)式知，显然 U^0 是线性化有限差分格式(6)~(8)的数值解，再用其它方法(如两层差分格式[10])先计算出 U^1 (即 U^0 和 U^1 是唯一被确定的)，现假设 U^{n-1}，$U^n\left(n \le N-1\right)$ 是唯一可解的，于是有

$$\left\|U^{n-1}\right\|_\infty \le C,\ \left\|U^n\right\|_\infty \le C \tag{9}$$

考虑(6)式中的未知层 U^{n+1} 对应的齐次线性方程组，有

$$\frac{1}{\tau}U_j^{n+1} - \frac{1}{\tau}\left(U_j^{n+1}\right)_{x\bar{x}} + \frac{1}{\tau}\left(U_j^{n+1}\right)_{xx\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{2}\left(U_j^{n+1}\right)_{\hat{x}} + \left(\frac{3}{4}U_j^n - \frac{1}{4}U_j^{n-1}\right)\left(U_j^{n+1}\right)_{\hat{x}} = 0 \tag{10}$$

以向量 U^{n+1} 对(10)式取内积，由(8)式、(9)式和引理 1，并利用分部求和公式[15]，有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\left\|U^{n+1}\right\|^2 + \frac{1}{\tau}\left\|U_x^{n+1}\right\|^2 + \frac{1}{\tau}\left\|U_{xx}^{n+1}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\langle U_{\hat{x}}^{n+1},U^{n+1}\right\rangle \\
&= -h\sum_{j=1}^{J-1}\left(\frac{3}{4}U_j^n - \frac{1}{4}U_j^{n-1}\right)\left(U_j^{n+1}\right)_{\hat{x}}U_j^{n+1} \\
&\le Ch\sum_{j=1}^{J-1}\left|\left(U_j^{n+1}\right)_{\hat{x}}\right|\cdot\left|U_j^{n+1}\right| \\
&\le C\left(\left\|U_x^{n+1}\right\|^2 + \left\|U^{n+1}\right\|^2\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

又

$$\left\langle U_{\hat{x}}^{n+1},U^{n+1}\right\rangle = 0\text{，} \tag{12}$$

合并(11)式和(12)式，化简整理有

$$\left(1-C\tau\right)\left\|U^{n+1}\right\|^2 + \left(1-C\tau\right)\left\|U_x^{n+1}\right\|^2 + \left\|U_{xx}^{n+1}\right\|^2 \le 0\text{，}$$

取时间步长 τ 足够小，使得当 $\left(1-C\tau\right) > 0$ 时，关于 U^{n+1} 的齐次线性方程组(10)有且仅有唯一零解，于是关于 U^{n+1} 的非齐次线性方程组(6)的解是唯一存在的。从而由归纳假设知，线性有限差分格式(6)~(8)的数值解是存在且唯一的。

3. 收敛性和稳定性

由于不能得到线性化有限差分格式(6)~(8)数值解的无穷范数先验估计，以下综合运用离散能量分析方法和数学归纳法来证明其收敛性和稳定性。

我们将线性有限差分数值格式(6)~(8)的截断误差定义为：

$$r_j^n=\left(u_j^n\right)_t-\left(u_j^n\right)_{x\bar{x}t}+\left(u_j^n\right)_{xx\bar{x}\bar{x}t}+\left(u_j^{n+\frac{1}{2}}\right)_{\hat{x}}+\left(\frac{3}{2}u_j^n-\frac{1}{2}u_j^{n-1}\right)\left(u_j^{n+\frac{1}{2}}\right)_{\hat{x}}=0 \tag{13}$$

且由 Taylor 展开公式可知，

$$\left|r_j^n\right|=O\left(\tau^2+h^2\right). \tag{14}$$

引理 2 [9] 假设 $u_0\in H^2$，初边值问题(3)~(5)的连续解满足如下估计式：

$$\|u\|_{L_2}\le C,\ \|u_{xx}\|_{L_2}\le C,\ \|u\|_{L_\infty}\le C,\ \|u_x\|_{L_\infty}\le C$$

定理 2 假设 $u_0\in H^2$，若时间步长 τ 和空间步长 h 足够小，则线性有限差分格式(6)~(8)的数值解解 U^n 以范数 $\|\cdot\|_\infty$ 收敛到初边值问题(3)~(5)的连续解，且收敛阶为 $O\left(\tau^2+h^2\right)$。

证明 记 $e_j^n=u_j^n-U_j^n$，用(13)式减去(6)式，可得

$$\begin{aligned}r_j^n=&\left(e_j^n\right)_t-\left(e_j^n\right)_{x\bar{x}t}+\left(e_j^n\right)_{xx\bar{x}\bar{x}t}+\left(e_j^{n+\frac{1}{2}}\right)_{\hat{x}}\\&+\left(\frac{3}{2}u_j^n-\frac{1}{2}u_j^{n-1}\right)\left(u_j^{n+\frac{1}{2}}\right)_{\hat{x}}-\left(\frac{3}{2}U_j^n-\frac{1}{2}U_j^{n-1}\right)\left(U_j^{n+\frac{1}{2}}\right)_{\hat{x}}\end{aligned} \tag{15}$$

由引理 2 以及截断误差(14)式可知，存在与空间步长 h 和时间步长 τ 都无关的常数 C_u 和 C_r，满足

$$\left\|u^n\right\|_\infty\le C_u,\ \left\|r^n\right\|_\infty\le C_r\left(\tau^2+h^2\right),\ n=1,2,\cdots,N \tag{16}$$

由初始值条件(7)式，可得

$$\left\|e^0\right\|=0,\ \left\|U^0\right\|_\infty\le C_u \tag{17}$$

利用其他二阶方法(如两层有限差分格式[10])计算出具有二阶精度的 U^1，即有

$$\left\|e^1\right\|+\left\|e_x^1\right\|+\left\|e_{xx}^1\right\|\le C_1\left(\tau^2+h^2\right), \tag{18}$$

C_1 为与空间步长 h 和时间步长 τ 都无关的常数。

现在假设

$$\left\|e^l\right\|+\left\|e_x^l\right\|+\left\|e_{xx}^l\right\|\le C_l\left(\tau^2+h^2\right),\ l=2,3,\cdots,n\ \ (n\le N-1) \tag{19}$$

其中 C_l 为与空间步长 h 和时间步长 τ 都无关的常数。利用 Cauchy-Schwarz 不等式，于是由离散 Sobolev 嵌入不等式[15]有

$$\begin{aligned}\left\|e^l\right\|_\infty&\le C_0\sqrt{\left\|e^l\right\|}\sqrt{\left\|e_x^l\right\|+\left\|e^l\right\|}\\&\le\frac{1}{2}C_0\left(2\left\|e^l\right\|+\left\|e_x^l\right\|\right)\\&\le\frac{3}{2}C_0C_l\left(\tau^2+h^2\right),\ l=1,2,\cdots,n\end{aligned} \tag{20}$$

$$\left\|U^l\right\|_\infty \le \left\|u^l\right\|_\infty + \left\|e^l\right\|_\infty \le C_u + \frac{3}{2}C_0C_l\left(\tau^2+h^2\right),\ l=1,2,\cdots,n \tag{21}$$

以向量 $e^{n+\frac{1}{2}}$ 对(15)式两端取内积，注意到

$$\left\langle e_{\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}} \right\rangle = 0\,,$$

并由离散分部和公式[15]，整理得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\|e^n\right\|_t^2 + \frac{1}{2}\left\|e_x^n\right\|_t^2 + \frac{1}{2}\left\|e_{xx}^n\right\|_t^2 \\ &= \left\langle r^n, e^{n+\frac{1}{2}} \right\rangle - h\sum_{j=1}^{J-1}\left(\frac{3}{2}e_j^n - \frac{1}{2}e_j^{n-1}\right)\left(u_j^{n+\frac{1}{2}}\right)_{\hat{x}} e_j^{n+\frac{1}{2}} - h\sum_{j=1}^{J-1}\left(\frac{3}{2}U_j^n - \frac{1}{2}U_j^{n-1}\right)\left(e_j^{n+\frac{1}{2}}\right)_{\hat{x}} e_j^{n+\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{22}$$

利用微分中值定理，由引理 2 有

$$\left(u_j^{n+\frac{1}{2}}\right)_{\hat{x}} = \frac{u\left(x_{j+1}, \frac{t_n+t_{n+1}}{2}\right) - u\left(x_{j-1}, \frac{t_n+t_{n+1}}{2}\right)}{2h} = \frac{\partial}{\partial x}u\left(x_{\xi_j}, \frac{t_n+t_{n+1}}{2}\right),\ \left(x_{j-1} \le \xi_j \le x_{j+1}\right)$$

即

$$\left\|u_{\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}}\right\|_\infty \le C_u\,, \tag{23}$$

再取空间步长 τ 和时间步长 h 足够小，以满足

$$\tau < \frac{1}{18\left(1+C_u\right)}\,, \tag{24}$$

且

$$\frac{3}{2}C_0\left(\max_{0\le l\le n} C_l\right)\left(\tau^2+h^2\right) \le 1\,, \tag{25}$$

于是，由引理 1 和(21)式、(23)式、(25)式，利用 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned}&-h\sum_{j=1}^{J-1}\left(\frac{3}{2}e_j^n - \frac{1}{2}e_j^{n-1}\right)\left(u_j^{n+\frac{1}{2}}\right)_{\hat{x}} e_j^{n+\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2}C_u h\sum_{j=1}^{J-1}\left(3\left|e_j^n\right| + \left|e_j^{n-1}\right|\right)\cdot\left|e_j^{n+\frac{1}{2}}\right| \\ &\le \frac{1}{4}C_u\left(\left\|e^n\right\|^2 + 4\left\|e^{n+\frac{1}{2}}\right\|^2 + \left\|e^{n-1}\right\|^2\right) \\ &\le \frac{1}{4}C_u\left(2\left\|e^{n+1}\right\|^2 + 3\left\|e^n\right\|^2 + \left\|e^{n-1}\right\|^2\right)\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&-h\sum_{j=1}^{J-1}\left(\frac{3}{2}U_j^n - U_j^{n-1}\right)\left(e_j^{n+\frac{1}{2}}\right)_{\hat{x}} e_j^{n+\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}\left(3\left|U_j^n\right| + \left|U_j^{n-1}\right|\right)\cdot\left|\left(e_j^{n+\frac{1}{2}}\right)_{\hat{x}}\right|\cdot\left|e_j^{n+\frac{1}{2}}\right| \\ &\le 2h\left[C_u + \frac{3}{2}C_0\cdot\max\left(C_{n-1},C_n\right)\left(\tau^2+h^2\right)\right]\sum_{j=1}^{J-1}\left|\left(e_j^{n+\frac{1}{2}}\right)_{\hat{x}}\right|\cdot\left|e_j^{n+\frac{1}{2}}\right| \\ &\le \left(1+C_u\right)\left(\left\|e_x^{n+\frac{1}{2}}\right\|^2 + \left\|e^{n+\frac{1}{2}}\right\|^2\right) \\ &\le \frac{1}{2}\left(1+C_u\right)\left(\left\|e_x^{n+1}\right\|^2 + \left\|e_x^n\right\|^2 + \left\|e^{n+1}\right\|^2 + \left\|e^n\right\|^2\right)\end{aligned} \tag{27}$$

$$\left\langle r^n, e^{n+\frac{1}{2}} \right\rangle \le \frac{1}{2}\left\|r^n\right\|^2 + \frac{1}{4}\left(\left\|e^{n+1}\right\|^2 + \left\|e^n\right\|^2\right) \tag{28}$$

将(26)~(28)式一起代入(22)式，然后化简整理可得

$$\begin{aligned}&\left(\left\|e^{n+1}\right\|^2 - \left\|e^n\right\|^2\right) + \left(\left\|e_x^{n+1}\right\|^2 - \left\|e_x^n\right\|^2\right) + \left(\left\|e_{xx}^{n+1}\right\|^2 - \left\|e_{xx}^n\right\|^2\right)\\ &\le \tau\left\|r^n\right\|^2 + 3\tau\left(1 + C_u\right)\left(\left\|e^{n+1}\right\|^2 + \left\|e^n\right\|^2 + \left\|e^{n-1}\right\|^2 + \left\|e_x^{n+1}\right\|^2 + \left\|e_x^n\right\|^2\right)\end{aligned} \tag{29}$$

将式(29)从 1 到 n 进行递推并求和，化简整理有

$$\begin{aligned}&\left\|e^{n+1}\right\|^2 + \left\|e_x^{n+1}\right\|^2 + \left\|e_{xx}^{n+1}\right\|^2\\ &\le \left\|e^1\right\|^2 + \left\|e_x^1\right\|^2 + \left\|e_{xx}^1\right\|^2 + \tau\sum_{k=1}^{n}\left\|r^k\right\|^2 + \tau\sum_{k=0}^{n+1}9\left(1 + C_u\right)\left(\left\|e^k\right\|^2 + \left\|e_x^k\right\|^2 + \left\|e_{xx}^k\right\|^2\right)\end{aligned} \tag{30}$$

又

$$\tau\sum_{k=1}^{n}\left\|r^k\right\|^2 \le n\tau\max_{1\le k\le n}\left\|r^k\right\|^2 \le T\left(C_r\right)^2\left(\tau^2 + h^2\right)^2 \tag{31}$$

再取时间步长 τ 充分小，使之满足：

$$\tau < \frac{1}{18\left(1 + C_u\right)},$$

将(18)式和(31)式一起代入(30)式，整理后利用(24)式和离散 Gronwall 不等式[15]，于是有

$$\begin{aligned}\left\|e^{n+1}\right\|^2 + \left\|e_x^{n+1}\right\|^2 + \left\|e_{xx}^{n+1}\right\|^2 &\le \left(T\left(C_r\right)^2 + C_1^2\right)\left(\tau^2 + h^2\right)^2 e^{2T\left[9\left(1+C_u\right)\right]}\\ &\le \left(C_{n+1}\right)^2\left(\tau^2 + h^2\right)^2 \quad \left(n = 1, 2, \cdots, N - 1\right)\end{aligned}$$

其中 $C_{n+1} = \left(\sqrt{T}C_r + C_1\right)e^{9T\left(1+C_u\right)}$ 为与时间层 n 无关的常数。从而由归纳假设可以得到

$$\left\|e^n\right\| \le O\left(\tau^2 + h^2\right),\ \left\|e_x^n\right\| \le O\left(\tau^2 + h^2\right),\ \left\|e_{xx}^n\right\| \le O\left(\tau^2 + h^2\right),\ \left(n = 1, 2, \cdots, N\right)$$

最后在根据离散 Sobolev 不等式[15]，即得

$$\left\|e^n\right\|_\infty \le O\left(\tau^2 + h^2\right),\ \left(n = 1, 2, \cdots, N\right)$$

定理 3 假设 $u_0 \in H^2$，如果时间步长 τ 和空间步长 h 充分小，那么线性有限差分格式(6)~(8)的数值解满足如下估计式：

$$\left\|U^n\right\|_\infty \le \tilde{C}_0,\ n = 1, 2, \cdots, N$$

这里 $\tilde{C}_0$ 是与时间步长 τ 和空间步长 h 都无关的常数。

证明 由定理 2 的结论，当时间步长 τ 和空间步长 h 足够小时，有

$$\left\|U^n\right\|_\infty \le \left\|u^n\right\|_\infty + \left\|e^n\right\|_\infty \le \tilde{C}_0.$$

由定理 3 可知，如果时间步长 τ 和空间步长 h 充分小，线性有限差分格式(6)~(8)的数值解 U^n 以范数 $\|\cdot\|_\infty$ 关于初始值绝对稳定。

4. 数值实验

Rosenau-RLW 方程(3)的孤立行波解[13]为：

$$u(x,t)=\frac{15}{19}\operatorname{sec}h^4\left[\frac{\sqrt{13}}{26}\left(x-\frac{169}{133}t\right)\right].$$

为了验证本文线性化有限差分算法的可靠性，取初值函数 $u_0(x)=u(x,0)$ 进行数值求解计算，固定 $x_L=-50$，$x_R=50$，$T=20$。就 τ 和 h 的不同取值线性有限差分数值格式(6)~(8)的数值解在不同时刻的误差见表 1，同时在表 2 中对理论精度 $O(\tau^2+h^2)$ 也进行了数值验证。

Table 1. The error of the scheme at several different times
表 1. 格式在几个不同时刻的误差

	$\tau=0.1$，$h=0.1$		$\tau=0.05$，$h=0.05$		$\tau=0.025$，$h=0.025$	
	$\Vert e^n\Vert$	$\Vert e^n\Vert_\infty$	$\Vert e^n\Vert$	$\Vert e^n\Vert_\infty$	$\Vert e^n\Vert$	$\Vert e^n\Vert_\infty$
$t=5$	1.65956e−3	6.30406e−4	4.16159e−4	1.58763e−4	1.03978e−4	3.98898e−5
$t=10$	3.16856e−3	1.17107e−3	7.90691e−4	2.93462e−4	1.96653e−4	7.33886e−5
$t=15$	4.52032e−3	1.62506e−3	1.12429e−3	4.05990e−4	2.78519e−4	1.01163e−4
$t=20$	5.78398e−3	2.04292e−3	1.43419e−3	5.78398e−4	3.53889e−4	1.26318e−4

Table 2. Numerical simulation of the theoretical accuracy $O(\tau^2+h^2)$ of the scheme
表 2. 对格式的理论精度 $O(\tau^2+h^2)$ 的数值模拟

	$\Vert e^n(h,\tau)\Vert\Big/\left\Vert e^{2n}\left(\frac{h}{2},\frac{\tau}{2}\right)\right\Vert$			$\Vert e^n(h,\tau)\Vert_\infty\Big/\left\Vert e^{2n}\left(\frac{h}{2},\frac{\tau}{2}\right)\right\Vert_\infty$		
	$\tau=h=0.1$	$\tau=h=0.05$	$\tau=h=0.025$	$\tau=h=0.1$	$\tau=h=0.05$	$\tau=h=0.025$
$t=5$	—	3.98780	4.00238	—	3.97074	3.98004
$t=10$	—	4.00729	4.02075	—	3.99053	3.99874
$t=15$	—	4.02057	4.03670	—	4.00271	4.01321
$t=20$	—	4.03291	4.05267	—	4.01381	4.02767

从数值算例结果可以看出，本文对初边值问题(3)~(5)所提出的线性化有限差分数值格式(6)~(8)是可行的。格式(6)~(8)明显具有二阶理论精度，更为重要的是，数值求解时不需要非线性迭代，所以计算时间比较节约，数值求解效率也较高。

基金项目

国家自然科学基金青年基金(11701481)；四川应用基础研究项目(2019JY0387)。

参考文献

[1] Rosenau, P. (1986) A Quasi-Continuous Description of a Nonlinear Transmission Line. *Physica Scripta*, **34**, 827-829. https://doi.org/10.1088/0031-8949/34/6B/020

[2] Rosenau, P. (1988) Dynamics of Dense Discrete Systems. *Progress of Theoretical Physics*, **79**, 1028-1042. https://doi.org/10.1143/PTP.79.1028

[3] Peregrine, D.H. (1966) Calculations of the Development of an Unduiar Bore. *Journal of Fluid Mechanics*, **25**, 321-330. https://doi.org/10.1017/S0022112066001678

[4] Peregrine, D.H. (1967) Long Waves on a Beach. *Journal of Fluid Mechanics*, **27**, 815-827.

https://doi.org/10.1017/S0022112067002605

[5] Atouani, N. and Omrani, K. (2013) Galerkin Finite Element Method for the Rosenau-RLW Equation. *Computers & Mathematics with Applications*, **66**, 289-303. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2013.04.029

[6] Zuo, J.M., Zhang, Y.M., Zhang, T.D. and Chang, F. (2010) A New Conservative Difference Scheme for the General Rosenau-RLW Equation. *Boundary Value Problems*, **2010**, Article No. 516260. https://doi.org/10.1155/2010/516260

[7] Pan, X.T. and Zhang, L.M. (2012) Numerical Simulation for General Rosenau-RLW Equation: An Average Linearized Conservative Scheme. *Mathematical Problems in Engineering*, **2012**, Article ID: 517818. https://doi.org/10.1155/2012/517818

[8] Pan, X.T. and Zhang, L.M. (2012) On the Convergence of a Conservative Numerical Scheme for the Usual Rosenau-RLW Equation. *Applied Mathematical Modelling*, **36**, 3371-3378. https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.08.022

[9] Hu, J.S. and Wang, Y.L. (2013) A High-Accuracy Linear Conservative Difference Scheme for Rosenau-RLW Equation. *Mathematical Problems in Engineering*, **2013**, Article ID: 870291. https://doi.org/10.1155/2013/870291

[10] 傅雨泽, 胡兵, 郑茂波. Rosenau-RLW 方程的拟紧致 C-N 守恒差分格式[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2014, 51(6): 1143-1148.

[11] 郑克龙, 周光亚. Rosenau-RLW 方程的非线性守恒差分格式[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2014, 31(4): 87-91.

[12] Wang, H., Wang, J. and Li, S.G. (2015) A New Conservative Nonlinear High-Order Compact Finite Difference Scheme for the General Rosenau-RLW Equation. *Boundary Value Problems*, **2015**, Article No. 77. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0336-2

[13] 张曦, 胡兵, 胡劲松. Rosenau-RLW 方程的加权守恒差分格式[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2017, 54(2): 1-6.

[14] 王婷婷, 卓茹, 黄妗彤, 胡劲松. 广义 Rosenau-RLW 方程的一个守恒差分逼近[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2017, 54(2): 268-272.

[15] Zhou, Y.L. (1990) Application of Discrete Functional Analysis to the Finite Difference Methods. Pergamon Press, 260.