Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(5), 1661-1667**
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.105177

Hans汉斯

von Neumann代数上保持绝对连续和奇异的映射

车晶晶，刘爱芳

太原理工大学数学学院，山西 晋中
Email: 2862486680@qq.com, liuaifang0086@126.com

收稿日期：2021年4月25日；录用日期：2021年5月8日；发布日期：2021年5月27日

摘 要

设$\mathcal{A}$是无限维复Hilbert空间上的一个von Neumann代数。$\mathcal{A}^+$为所有正算子的锥。本文证明了一个双射$\varphi:\mathcal{A}^+\to\mathcal{A}^+$在两个方向上都保持绝对连续，则其在两个方向上也保持奇异。并证明了这个双射φ可以由有界、可逆、线性或共轭线性的算子来刻画。

关键词

von Neumann代数，线性保持，绝对连续，奇异

Maps Preserving Absolute Continuity and Singularity on a von Neumann Algebra

Jingjing Che, Aifang Liu

Department of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi
Email: 2862486680@qq.com, liuaifang0086@126.com

Received: Apr. 25th, 2021; accepted: May 8th, 2021; published: May 27th, 2021

Abstract

Let $\mathcal{A}$ be a von Neumann algebra on an infinite dimensional, complex Hilbert space. $\mathcal{A}^+$ stands for the cone of all positive operators. In this paper, we obtain that bijective maps $\varphi:\mathcal{A}^+\to\mathcal{A}^+$ that preserves absolute continuity in both directions are also preserve singularity in both directions. Moreover, we show that these maps φ can be characterized by invertible, linear or conju-

文章引用：车晶晶，刘爱芳．von Neumann 代数上保持绝对连续和奇异的映射[J]．应用数学进展，2021，10(5): 1661-1667. DOI: 10.12677/aam.2021.105177

gate linear operators.

Keywords

von Neumann Algebra, Linear Preserver, Absolute Continuity, Singular

1. 引言

从一个代数到另一个代数的线性映射，若其保持了代数里边某些元素特性不变，则称它是一个线性保持映射。关于线性保持问题最早的论文可以追溯到 1897 年，此后算子空间上的线性保持问题一直受到了众多学者的广泛关注[1] [2] [3] [4]。而其中一类算子代数 von Neumann 代数上的线性保持问题，国内外许多学者对其进行了研究与探索并已取得许多成果。例如：2013 年齐霄霏和侯晋川在文献[5]中刻画了 von Neumann 代数上的强斜交换线性保持映射；2013 年杜宁在文献[6]中刻画了 von Neumann 代数上保持自 Jordan 积和半*-Jordan 积的映射；2016 年费秀海和张建华在文献[7]中刻画了 von Neumann 代数上保持投影的映射；2018 年 C. Li，F. Zhao，Q. Chen 在文献[8]中刻画了在 von Neumann 代数上保乘积 $X*Y+Y*X$ 的映射。

受以上文献的启发，本文我们将主要研究 von Neumann 代数上保持绝对连续和奇异的映射。映射保持绝对连续和奇异性的相关内容在文献[9] [10] [11]中有学者进行过研究。我们将说明若 von Neumann 代数上的双射 φ 在两个方向上都保持绝对连续，则其在两个方向上也保持奇异。并且借助有界、可逆、线性或共轭线性的算子将这个双射 φ 完全刻画。下面先介绍一些概念并固定一些符号。

设 $\mathcal{H}$ 是一个无限维的复 Hilbert 空间，用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示它上面的内积，$B(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上所有有界线性算子的全体。令 $\mathcal{A}$ 是 $B(\mathcal{H})$ 上的一个 C^*-子代数，若 $\mathcal{A}$ 包含恒等算子且具有前对偶，即存在一个 Banach 空间 $\mathcal{Y}$ 使得 $\mathcal{Y}$ 的对偶空间为 $\mathcal{A}$，则称 $\mathcal{A}$ 为 von Neumann 代数。若 $A^*=A$，($A\in\mathcal{A}$)，则称 $\mathcal{A}$ 为自伴算子。若 A 是自伴的且对任意的 $x\in\mathcal{H}$ 有 $\langle Ax,x\rangle\geq 0$ 成立，则称 $\mathcal{A}$ 为正算子。并用 $\mathcal{A}^+$ 表示所有正算子的锥。设 $\mathcal{A}$ 是一个 von Neumann 代数，$a\in\mathcal{A}$ 称为 $\mathcal{A}$ 的一秩元，如果 a 的值域投影 R_a 是 $\mathcal{A}$ 中的一个极小投影[12]。

对任意 $A,B\in\mathcal{A}$ 若 $B-A\in\mathcal{A}^+$ 称为偏序，记作：$A\leq B$。

定义 1.1：(1) 任意 $A,B\in\mathcal{A}^+$，如果满足 $C\leq A$ 且 $C\leq B$ 的 $C\in\mathcal{A}^+$ 只能是零算子，则称 A 和 B 是奇异的，记作：$A\perp B$。

(2) 若存在一个正算子序列 $\{A_n\}$ 和一个非负实数序列 $\{\alpha_n\}$，满足 $A_n\uparrow A$ 且 $A_n\leq\alpha_n B$，这里 $A_n\uparrow A$ 是指 $\{A_n\}$ 单调递增且 $\{A_n\}$ 强收敛于 A，则称 A 是 B-绝对连续的，记作：$A\ll B$。

下面给出一个双射在两个方向上保持绝对连续性和奇异性的定义：

定义 1.2：(1) 称双射 $\varphi:\mathcal{A}^+\to\mathcal{A}^+$ 在两个方向上保持绝对连续，如果对于任意 $A,B\in\mathcal{A}^+$ 有，$A\ll B\Leftrightarrow\varphi(A)\ll\varphi(B)$。

(2) 称双射 $\varphi:\mathcal{A}^+\to\mathcal{A}^+$ 在两个方向上保持奇异，如果对于任意的 $A,B\in\mathcal{A}^+$ 有，$A\perp B\Leftrightarrow\varphi(A)\perp\varphi(B)$。

2. 主要定理及其证明

引理 2.1 ([13]，引理 4)对有界算子 S 和 T，下列条件等价：

(i) $ran(S) \subseteq ran(T)$；

(ii) 存在 $\alpha \geq 0$ 使得 $SS^* \leq \alpha TT^*$。

定理 2.1 令 $A, B \in \mathcal{A}^+$，则 $A \ll B$ 当且仅当 $ranA \subseteq ranB$。

证明 当 $A, B \in \mathcal{A}^+$，$ran(A) \subseteq ran(B)$ 时，有 $ranA^{1/2}$ 和 $ranB^{1/2}$ 均有意义，此时我们有 $ranA^{1/2} \subseteq ranB^{1/2}$。由引理 2.1 知，存在 $\alpha \geq 0$，使得 $A \leq \alpha B$ (这比 A 是 B-绝对连续条件更强)。因此我们有 A 是 B-绝对连续的。

反之，若 A 是 B-绝对连续的，则由绝对连续的定义我们有，存在一个正算子序列 $\{A_n\}$ 和一个非负实数序列 $\{\alpha_n\}$，满足 $A_n \uparrow A$ 且 $A_n \leq \alpha_n B$，即 $A \leq \alpha_n B$。由引理 2.1 可知 $ran(A) \subseteq ran(B)$。 □

定理 2.2 令 $A, B \in \mathcal{A}^+$，则 $A \perp B$ 当且仅当 $ranA^{1/2} \cap ranB^{1/2} = \{0\}$。

证明 对任意的 $A, B \in \mathcal{A}^+$，令 $ranA^{1/2} \cap ranB^{1/2} = \{0\}$，则显然有 $A \perp B$。

反之，若 $A \perp B$，定义

$$[A]B = \lim_{n\to\infty} (nA) : B$$

表示正算子 A 和 B 的平行和，正算子序列 $\{(nA) : B\}_n$ 是单调递增的，以 B 为上界，记作：$A : B$。

由文献([13]，引理 4)我们有

$$ranA^{1/2} \cap ranB^{1/2} = ran\left[(A:B)^{1/2}\right]$$

等价于 $0 \leq A : B \leq A, B$。因此 $A \perp B$ 可以推出 $ranA^{1/2} \cap ranB^{1/2} = \{0\}$。□

引理 2.2 ([13]，定理 5)若 $A, B \in \mathcal{A}^+$，则 $A \ll B$ 当且仅当 $\left\{x \in \mathcal{A} : A^{1/2}x \in ranB^{1/2}\right\}$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密。

定理 2.3 令 $A \in \mathcal{A}^+$，A 的值域 $ranA$ 是闭的当且仅当 $ranA^{1/2}$ 闭。

证明 对任意 $A \in \mathcal{A}^+$，则显然有

$$ranA \subset ranA^{1/2} \subset \overline{ranA^{1/2}} = \overline{ranA}$$

因此，若 $ranA$ 是闭的，则 $ranA^{1/2}$ 也是闭的。

反之，若 $ranA^{1/2}$ 是闭的，我们有

$$ranA = A(H) = A^{1/2}\left(A^{1/2}(H)\right) = A^{1/2}\left(\overline{ranA^{1/2}}\right) = A^{1/2}\left(\left(kerA^{1/2}\right)^{\perp}\right) = ranA^{1/2}$$

即 $ranA = ranA^{1/2}$。故 $ranA$ 是闭的。

由这个定理可知，对任意的 $A \in \mathcal{A}^+$，若 $ranA$ 和 $ranA^{1/2}$ 是闭的，则 $ranA = ranA^{1/2}$。 □

下面我们给出 von Neumann 代数上的一个双射 φ 在两个方向上保持绝对连续和奇异的等价刻画。

定理 2.4 设 $\mathcal{A}$ 是无限维复 Hilbert 空间上的一个 von Neumann 代数。$\mathcal{A}^+$ 为 von Neumann 代数上的一个正锥。若 $\varphi : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{A}^+$ 是一个双射，则下列四个叙述等价：

(i) φ 在两个方向上保持绝对连续；

(ii) φ 在两个方向是保持奇异；

(iii) 存在一个有界、可逆、线性或共轭线性算子 $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，使得对所有的 $A \in \mathcal{A}^+$ 有

$$ran\varphi(A)^{1/2} = ranTA^{1/2}$$

(iv) 存在一个有界、可逆、线性或共轭线性算子 $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 和一族可逆正算子 $\{Z_A : A \in \mathcal{A}^+\}$，使得

对所有的 $A\in\mathcal{A}^+$ 有

$$\varphi(A)=\left(TAT^*\right)^{1/2}Z_A\left(TAT^*\right)^{1/2}$$

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii)：因为对所有的正算子 B 来说，0 是 $\mathcal{A}^+$ 上唯一 B-绝对连续的元。所以由(i)可知 $\varphi(0)=0$。现假设 φ 满足(i)但不满足(ii)，则存在 $A,B\in\mathcal{A}^+$ 使得 $A\perp B$ 但 $\varphi(A)$ 与 $\varphi(B)$ 不垂直。特别地，在 von Neumann 代数中我们可以找到一个极小投影 R，满足 $R\le\varphi(A),R\le\varphi(B)$，因此

$$R\ll\varphi(A)\text{ 且 }R\ll\varphi(B)$$

又存在非零的秩一元 $a\in\mathcal{A}$，使得 $R=\varphi(a)$，从而 $a\ll A$ 且 $a\ll B$。但这表明 $a\in ranA^{1/2}\cap ranB^{1/2}$，因此 A 与 B 不垂直，这与假设相矛盾。

(ii) $\Rightarrow$ (iii)：对任意 $A,B,C\in\mathcal{A}^+$，假设 $A\perp C$ 且 $B\perp C$，则由定理 2.2 知，

$$ranA^{1/2}\cap ranC^{1/2}=\{0\}\Leftrightarrow ran\left(\varphi(A)\right)^{1/2}\cap ran\left(\varphi(C)\right)^{1/2}=\{0\}$$

$$ranB^{1/2}\cap ranC^{1/2}=\{0\}\Leftrightarrow ran\left(\varphi(B)\right)^{1/2}\cap ran\left(\varphi(C)\right)^{1/2}=\{0\}$$

对任意的 $A\in\mathcal{A}^+$，定义

$$A^{\perp}=\left\{C\in\mathcal{A}^+:C\perp A\right\}$$

我们有

$$A^{\perp}=B^{\perp}\Leftrightarrow ranA^{1/2}=ranB^{1/2}\Leftrightarrow ran\left(\varphi(A)\right)^{1/2}=ran\left(\varphi(B)\right)^{1/2}$$

其中 $A,B\in\mathcal{A}^+$。

我们定义一个新的映射：

$$\psi:Lat_{op}(\mathcal{H})\to Lat_{op}(\mathcal{H})$$

$$\psi\left(ranA^{1/2}\right)=ran\varphi(A)^{1/2}$$

其中，$Lat_{op}\mathcal{H}:=\{\mathcal{M}\subseteq\mathcal{H}:\exists S\in\mathcal{A},ranS=\mathcal{M}\}=\left\{ranA^{1/2}:A\in\mathcal{A}^+\right\}$。

显然 ψ 有定义且是一个双射，由

$$ranA^{1/2}\cap ranB^{1/2}=\{0\}\text{ 和 }ranA^{1/2}=ranB^{1/2}\Leftrightarrow ran\left(\varphi(A)\right)^{1/2}=ran\left(\varphi(B)\right)^{1/2}$$

我们可知 ψ 在这两个方向上保零交。即

$$\mathcal{M}\cap\mathcal{N}=\{0\}\Leftrightarrow\psi(\mathcal{M})\cap\psi(\mathcal{N})=\{0\}$$

其中 $\mathcal{M},\mathcal{N}\in Lat_{op}(\mathcal{H})$。

接下来我们进一步看映射 ψ，易知

$$\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}\Leftrightarrow\left\{\mathcal{K}\in Lat_{op}(\mathcal{H}):\mathcal{K}\cap\mathcal{N}=\{0\}\right\}\subseteq\left\{\mathcal{K}\in Lat_{op}(\mathcal{H}):\mathcal{K}\cap\mathcal{M}=\{0\}\right\}$$

因此 ψ 在两个方向上保包含关系：

$$\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}\Leftrightarrow\psi(\mathcal{M})\subseteq\psi(\mathcal{N})$$

其中 $\mathcal{M},\mathcal{N}\in Lat_{op}(\mathcal{H})$。

事实上，由以上两式我们有 $\psi\left(\{0\}\right)=\{0\}$ 且 $\psi\left(\{\mathcal{H}\}\right)=\{\mathcal{H}\}$。注意到

$$dim\mathcal{M}=1\Leftrightarrow\left\{\mathcal{N}\in Lat_{op}\left(\mathcal{H}\right):\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}\right\}=\left\{\{0\},\mathcal{M}\right\}$$

对任意正整数 n，令 $Lat_n\left(\mathcal{H}\right):=\left\{\mathcal{M}\in Lat_{op}\left(\mathcal{H}\right):dim\mathcal{M}=n\right\}$，则当 ψ 限制到 $\psi|_{Lat_1(\mathcal{H})}$ 时是 $Lat_1\left(\mathcal{H}\right)$ 到自身的一个双射。类似地，我们有：

$$dim\mathcal{M}=2\Leftrightarrow\left\{\mathcal{N}:\mathcal{N}\subsetneq\mathcal{M}\right\}\subseteq Lat_1\left(\mathcal{H}\right)\cup\left\{\{0\}\right\}$$

从而，$\psi|_{Lat2(\mathcal{H})}:Lat_2\left(\mathcal{H}\right)\to Lat_2\left(\mathcal{H}\right)$ 也是一个双射。由以上结论我们可得 $\psi|_{Lat_1(\mathcal{H})}$ 是一个射影，且 ψ 可以将任何三个共面元素映成共面元素。因此应用射影几何的基本定理可以得到：存在一个半线性映射 $T:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 使得

$$\psi\left(\mathcal{M}\right)=T\left(\mathcal{M}\right)$$

其中 $\mathcal{M}\in\psi|_{Lat_1(\mathcal{H})}$。

接下来我们考虑 ψ 作用到更一般的 $\mathcal{M}\in Lat_{op}\left(\mathcal{H}\right)\setminus\{0\}$。通过上边的性质，对任意的 $\mathcal{N}\in Lat_1\left(\mathcal{H}\right)$ 和 $\mathcal{N}\in Lat_{op}\left(\mathcal{H}\right)$，我们有

$$\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}\Leftrightarrow\psi\left(\mathcal{M}\right)\subseteq\psi\left(\mathcal{N}\right)$$

和

$$\mathcal{M}\cap\mathcal{N}=\{0\}\Leftrightarrow\psi\left(\mathcal{M}\right)\cap\psi\left(\mathcal{N}\right)=\{0\}$$

因此，对所有的 $\mathcal{M}\in Lat_{op}\left(\mathcal{H}\right)\setminus\{0\}$ 我们有

$$\begin{aligned}\psi\left(\mathcal{M}\right)&=\bigcup_{T(\mathcal{N})\subset\psi(\mathcal{M}),T(\mathcal{N})\in Lat_1(\mathcal{H})}T\left(\mathcal{M}\right)\\&=\bigcup_{\mathcal{M}\subset\mathcal{N},\mathcal{N}\in Lat_1(\mathcal{H})}T\left(\mathcal{N}\right)\\&=T\left(\bigcup_{\mathcal{M}\subset\mathcal{N},\mathcal{N}\in Lat_1(\mathcal{H})}\mathcal{N}\right)\\&=T\left(\mathcal{M}\right)\end{aligned}$$

进而，通过 ψ 和 T 的定义我们有对任意的 $\mathcal{M}\in Lat_{op}\left(\mathcal{H}\right)$，

$$\varphi\left[\mathcal{R}_{1/2}\left(\mathcal{M}\right)\right]=\mathcal{R}_{1/2}\left(T\left(\mathcal{M}\right)\right)$$

接下来我们的主要任务就是证明半线性映射 T 是有界的、线性或共轭线性的。由于 T 和 T^{-1} 将一余维线性流形映射为一余维线性流形。此外，$\mathcal{H}$ 的有限余维子空间是一个算子值域当且仅当它是闭的，因此我们推断定 T 将 $Lat_1\left(\mathcal{H}\right)$ 映射到 $Lat_1\left(\mathcal{H}\right)$ 上。由于 $\mathcal{H}$ 是无限维的，我们可以使用文献[14]的引理 2 及其推论，得出 T 是线性或共轭线性的。

最后，为了证明 T 是有界的，只需证明对于每一个有界线性泛函 y^* $\left(y^*\in\mathcal{A}^+\right)$ 使得 $Kerx^*=Ker\left(y^*\circ T\right)$，这意味着存在 λ 使得 $y^*\circ T=\lambda x^*$，因此 $y^*\circ T$ 是有界的。用类似的方法我们可以证明 T 是共轭线性的。

(iii) $\Rightarrow$ (iv)：首先，假设 T 是线性的。由于对任意的 $S\in\mathcal{A}$，$ranS=ran\left(SS^*\right)^{1/2}$，因此可得

$$ran\varphi\left(A\right)^{1/2}=ranTA^{1/2}=ran\left(TAT^*\right)^{1/2}$$

其中 $A\in\mathcal{A}^+$。

从而，由([15]，推论 1)知，存在一个可逆算子 $X_A\in\mathcal{A}$，使得 $\varphi\left(A\right)^{1/2}=\left(TAT^*\right)^{1/2}X_A$。进而，令 $Z_A=X_AX_A^*$，则(iv)成立。

假设现在 T 是共轭线性的，考虑任意一个反酉算子 $U:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$，则

$$ran\varphi(A)^{1/2}=ranTA^{1/2}=ranTA^{1/2}U=ran\left(TAT^*\right)^{1/2}$$

其中 $\forall A\in\mathcal{A}^+$。

(iv) $\Rightarrow$ (i)：由于对任意的 $S\in\mathcal{A}$，$ranS=ran\left(SS^*\right)^{1/2}$，故对任意的 $A\in\mathcal{A}^+$，我们有

$$ran\varphi(A)^{1/2}=ran\left(TAT^*\right)^{1/2}Z^{1/2}=ran\left(TAT^*\right)^{1/2}=ranTA^{1/2}=ranTA^{1/2}T^*$$

因此由文献([15]，推论 4)可知，存在一个可逆算子 $Y_A\in\mathcal{A}$ 使得

$$\varphi(A)^{1/2}=TA^{1/2}T^*Y_A$$

记

$$\mathcal{D}_{A,B}=\left\{x\in\mathcal{A}:A^{1/2}x\in ranB^{1/2}\right\}$$

其中 $A,B\in\mathcal{A}^+$。

通过计算我们有：

$$\mathcal{D}_{\varphi(A),\varphi(B)}=\left(T^*Y_A\right)^{-1}\left(\mathcal{D}_{A,B}\right)$$

由此可知 $\mathcal{D}_{A,B}$ 稠当且仅当 $\mathcal{D}_{\varphi(A),\varphi(B)}$ 是稠的。进而由引理 2.2 可知(i)成立。□

如果 $\mathcal{H}$ 是有限维的 Hilbert 空间，那么上面的定理 2.4 的证明将会更简单。然而，我们需要指出的是在有限维情形下，此时 T 没有必要是线性或者共轭线性的。下面我们给出具体的定理：

定理 2.5 设 $\mathcal{H}$ 是有限维复 Hilbert 空间且 $2<dim\mathcal{H}<\infty$，$\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的一个 von Neumann 代数。$\mathcal{A}^+$ 为 von Neumann 代数上的一个正锥。若 $\varphi:\mathcal{A}^+\to\mathcal{A}^+$ 是一个双射，则下列叙述等价：

(i) φ 在两个方向上保持绝对连续；

(ii) φ 在两个方向是保持奇异；

(iii) 存在一个半线性双射 $T:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 使得对任意的 $A\in\mathcal{A}^+$

$$ran\varphi(A)=ranTA。$$

最后需要注意的是定理 2.5 中不包含 $dim\mathcal{H}=2$ 的情形，因此此时我们不能再应用射影几何的基本定理。

致　谢

本文作者衷心感谢审稿人和读者的意见和建议。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11801397)；国家留学基金管理委员会资助项目(202006935001)。

参考文献

[1] Gehér, G.P., Tarcsay, Z. and Tamás, T. (2020) Maps Preserving Absolute Continuity and Singularity of Positive Operators. *New York Journal of Mathematics*, **26**, 129-137.

[2] Li, C.K. and Tsing, N.K. (1992) Linear Preserver Problems: A Brief Introduction and Some Special Techniques. *Linear Algebra and Its Applications*, **162**, 217-235. https://doi.org/10.1016/0024-3795(92)90377-M

[3] Li, C.K. and Pierce, S. (2001) Linear Preserver Problems. *The American Mathematical Monthly*, **108**, 591-605. https://doi.org/10.1080/00029890.2001.11919790

[4] Qi, X.F. and Hou, J.C. (2013) Strong Skew Commutativity Preserving Maps on von Neumann Algebras. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **397**, 362-370. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.07.036

[5] Molnár, L. (2009) Maps on Positive Operators Preserving Lebesgue Decompositions. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **18**, 222-232. https://doi.org/10.13001/1081-3810.1307

[6] 杜宁. von Neumann 代数上保持自 Jordan 积和半*-Jordan 积的映射[D]: [硕士学位论文]. 西安: 陕西师范大学, 2013.

[7] 费秀海, 张建华. von Neumann 代数上保持投影的映射[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2016, 39(4): 5-7.

[8] Li, C., Zhao, F. and Chen, Q. (2018) Nonlinear Maps Preserving Product $X^*Y + Y^*X$ on von Neumann Algebras. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **44**, 729-738. https://doi.org/10.1007/s41980-018-0048-3

[9] Gabriyelyan, S.S. (2011) Absolute Continuity and Singularity of Two Probability Measures on a Filtered Space. *Journal of Theoretical Probability*, **24**, Article No. 595. https://doi.org/10.1007/s10959-011-0359-2

[10] Osada, H. and Shirai, T. (2016) Absolute Continuity and Singularity of Palm Measures of the Ginibre Point Process. *Probability Theory and Related Fields*, **165**, 725-770. https://doi.org/10.1007/s00440-015-0644-6

[11] Cherny, A. and Urusov, M. (2006) On the Absolute Continuity and Singularity of Measures on Filtered Spaces: Separating Times. *From Stochastic Calculus to Mathematical Finance*, Springer, Berlin, Heidelberg, 125-168. https://doi.org/10.1007/978-3-540-30788-4_7

[12] 侯晋川, 高明杵. von Neumann 代数中的一秩元及乘子[J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 1994(5): 596-602.

[13] Ando, T. (1976) Lebesgue-Type Decomposition of Positive Operators. *Acta Scientiarum. Mathematicarum* (*Szeged*), **38**, 253-260.

[14] Kakutani, S. and Mackey, G.W. (1946) Ring and Lattice Characterizations of Complex Hilbert Space. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **52**, 727-733. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1946-08644-9

[15] Fillmore, P.A. and Williams, J.P. (1971) On Operator Ranges. *Advances in Mathematics*, **7**, 254-281. https://doi.org/10.1016/S0001-8708(71)80006-3