

ADMM算法在3D彩色图像恢复中的应用

许鸿蕾

内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特
Email: xuhonglei951011@163.com

收稿日期: 2021年4月27日; 录用日期: 2021年5月11日; 发布日期: 2021年5月31日

摘 要

本文讨论稀疏信号的恢复和分离问题。利用加权 l_1 范数进行稀疏诱导, 提出了加权 l_1 范数极小化约束模型, 利用ADMM算法进行求解。在适当地假设下证明了算法的收敛性。对带有盐噪声和椒盐噪声的3D彩色图像进行了数值实验, 并与JP算法及YALL1算法进行了数值比对。实验结果的峰值信噪比PSNR和相对误差RelErr表明, 我们的算法具有较好的恢复效果。

关键词

ADMM算法, 加权 l_1 范数, 图像恢复

Application of ADMM Algorithm in 3D Color Image Recovery

Honglei Xu

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia
Email: xuhonglei951011@163.com

Received: Apr. 27th, 2021; accepted: May 11th, 2021; published: May 31st, 2021

Abstract

This paper discusses the recovery and demixing problem of sparse signals. We propose a weighted l_1 norm minimization model. Then the ADMM algorithm is applied to this model. We also prove the convergence property of our algorithm under mild conditions. At last, we do two numerical experiments for 3D color image, in which salt noise and salt-and-pepper noise are chosen. In addition, we compare our algorithm with two other algorithms: the JP and the YALL1. Numerical results of PSNR and RelErr show that our algorithm gives relatively better behavior.

Keywords

ADMM Algorithm, Weighted l_1 Norm, Image Recovery

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文考虑如下两个稀疏信号的恢复问题

$$y = A_1 x_1 + A_2 x_2 \quad (1)$$

其中 $x_k \in R^{n_k}$, $k=1,2$ 为稀疏信号, $y \in R^m$ 为测量向量且 $m \ll n_1$, $m \ll n_2$, $A_k \in R^{m \times n_k}$, $k=1,2$ 为观测矩阵。该问题在信号处理、医学成像以及雷达系统等跨学科领域中都有着广泛的应用。近年来得到了高度的关注及深入的研究,其中文献[1][2]讨论了其在图像纹理分离方面的应用。文献[3][4]给出了其在图像,音频,视频的超分辨率和修复问题上的应用。本文对稀疏信号恢复问题的 ADMM 算法及其应用进行了研究。

文献[5]提出了 ADMM 算法及 BCD 算法对该问题进行对比研究并取得了较好的结果。受该文启发,本文提出该问题的加权 l_1 范数极小化约束模型,通过对模型的等价转化,ADMM 算法的推广进行求解。在适当的假设下证明了算法的全局收敛性。在数值实验中对两类 3D 彩色图像进行了重建测试,其中一类含有 30% 的盐噪声,另一类含有 30% 的椒盐噪声。实验过程中将 ADMM 算法与 JP 算法及 YALL1 算法的恢复效果进行了数值对比。实验结果表明无论从峰值信噪比 PSNR 还是从相对误差 RelErr 角度考察,我们方法的数值结果都明显得到了改善,因而该方法具有较好的图像恢复效果。

2. 模型的转化

本节给出求解问题(1)的如下加权 l_1 范数极小化模型:

$$\min_{x_1, x_2} \left\{ \mu \sum_{i=1}^{n_1} \omega_{1_i} |x_{1_i}| + \sum_{j=1}^{n_2} \omega_{2_j} |x_{2_j}| \right\}, \text{ s.t. } A_1 x_1 + A_2 x_2 = y \quad (2)$$

其中 $\omega_{1_i} = 0.3(x_{1_i}^2 + 0.01^2)^{-\frac{1}{4}}$, $\omega_{2_j} = 0.3(x_{2_j}^2 + 0.01^2)^{-\frac{1}{4}}$, $i=1, \dots, n_1; j=1, \dots, n_2$ 为加权因子。

显然,对充分小的 $\varepsilon > 0$, (2)可近似为

$$\min_{x_1, x_2} \left\{ \mu \sum_{i=1}^{n_1} \omega_{1_i} |x_{1_i}| + \sum_{j=1}^{n_2} \omega_{2_j} |x_{2_j}| \right\}, \text{ s.t. } \|A_1 x_1 + A_2 x_2 - y\|_2 \leq \varepsilon \quad (3)$$

因此, ε 充分小时, (3)的解趋于(2)的解。该约束优化问题可以转化为下述无约束形式

$$\min_{x_1, x_2} \left\{ \frac{1}{\beta} \|A_1 x_1 + A_2 x_2 - y\|_2^2 + \mu \sum_{i=1}^{n_1} \omega_{1_i} |x_{1_i}| + \sum_{j=1}^{n_2} \omega_{2_j} |x_{2_j}| \right\} \quad (4)$$

这里 $\beta > 0$ 是一个惩罚因子,问题(3)中的较小的 ε 相当于问题(4)中较小的 β 。随着 $\beta \rightarrow 0$, (4)的解满足 $\|A_1 x_1 + A_2 x_2 - y\|_2 \rightarrow 0$, 且问题(4)近似于问题(2)。因此,取一个充分小的 β 可使得

$$\|A_1x_1 + A_2x_2 - y\|_2 \approx 0$$

3. 算法及收敛性证明

3.1. ADMM 算法

ADMM 是一个非常适合解决高维优化问题的算法，可以较容易地处理全局问题。因此本文应用 ADMM 算法求解(4)。通过引入辅助变量 z_1, z_2 ，(4)等价于

$$\min_{x_1, x_2, z_1, z_2} \left\{ \|A_1x_1 + A_2x_2 - y\|_2^2 + \beta\mu \sum_{i=1}^{n_1} \omega_{1_i} |z_{1_i}| + \beta \sum_{j=1}^{n_2} \omega_{2_j} |z_{2_j}| \right\}, \text{ s.t. } Ax_1 = z_1, x_2 = z_2$$

其增广拉格朗日函数为

$$L(x_1, x_2, z_1, z_2, w_1, w_2) = \|A_1x_1 + A_2x_2 - y\|_2^2 + \beta\mu \sum_{i=1}^{n_1} \omega_{1_i} |z_{1_i}| + \beta \sum_{j=1}^{n_2} \omega_{2_j} |z_{2_j}| + \langle w_1, x_1 - z_1 \rangle + \langle w_2, x_2 - z_2 \rangle + \frac{\rho_1}{2} \|x_1 - z_1\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|x_2 - z_2\|_2^2,$$

这里的 w_1 和 w_2 是对偶变量， ρ_1 和 ρ_2 是正惩罚因子。ADMM 算法迭代格式如下：

$$z_1^{k+1} = \arg \min_{z_1} \left(\beta\mu \sum_{i=1}^{n_1} \omega_{1_i} |z_{1_i}| + \frac{\rho_1}{2} \left\| x_1^k - z_1 + \frac{w_1^k}{\rho_1} \right\|_2^2 \right) \tag{5}$$

$$z_2^{k+1} = \arg \min_{z_2} \left(\beta \sum_{j=1}^{n_2} \omega_{2_j} |z_{2_j}| + \frac{\rho_2}{2} \left\| x_2^k - z_2 + \frac{w_2^k}{\rho_2} \right\|_2^2 \right) \tag{6}$$

$$x_1^{k+1} = \arg \min_{x_1} \left(\|A_1x_1 + A_2x_2^k - y\|_2^2 + \frac{\rho_1}{2} \left\| x_1 - z_1^{k+1} + \frac{w_1^k}{\rho_1} \right\|_2^2 \right) \tag{7}$$

$$x_2^{k+1} = \arg \min_{x_2} \left(\|A_1x_1^{k+1} + A_2x_2 - y\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \left\| x_2 - z_2^{k+1} + \frac{w_2^k}{\rho_2} \right\|_2^2 \right) \tag{8}$$

$$w_1^{k+1} = w_1^k + \rho_1 (x_1^{k+1} - z_1^{k+1}) \tag{9}$$

$$w_2^{k+1} = w_2^k + \rho_2 (x_2^{k+1} - z_2^{k+1}) \tag{10}$$

3.2. 加权 l_1 范数的临近算子

为求解(5)和(6)，我们引入加权 l_1 范数的临近算子。

定义 1 [5] 对 $x \in R^m$ ，其 l_q 范数 ($0 \leq q \leq 1$) 函数的临近算子定义为

$$\text{prox}_{q,\eta}(t) = \arg \min_x \left\{ \|x\|_q^q + \frac{\eta}{2} \|x - t\|_2^2 \right\}$$

其中 $\eta > 0$ 为惩罚因子。当 $q=1$ 时，其解的表达形式为

$$\text{prox}_{1,\eta}(t)_i = \text{sign}(t_i) \max\{|t_i| - 1/\eta, 0\}, \quad i = 1, \dots, m$$

下面对 $x \in R^m$ 定义本文的加权 l_1 范数函数的临近算子

$$\text{prox}_{1,\eta}(t) = \arg \min_x \left\{ \sum_{i=1}^m h_i |x_i| + \frac{\eta}{2} \|x - t\|_2^2 \right\}$$

其中 $h_i = 0.3(x_i^2 + 0.01^2)^{\frac{1}{4}}, i = 1, \dots, m$ 。可将其简化为

$$\text{prox}_{1,\eta}(t) = \arg \min_x \left\{ \sum_{i=1}^m \left(h_i |x_i| + \frac{\eta}{2} (x_i - t_i)^2 \right) \right\} \quad (11)$$

当 $x_i \geq 0$ 时, (11)等价为

$$x_i = t_i - \frac{h_i}{\eta}, t_i = x_i + \frac{h_i}{\eta}, i = 1, \dots, m$$

因此 $t_i \geq 0$ 。当 $t_i - \frac{h_i}{\eta} \leq 0$ 时, 结合 $x_i \geq 0$ 可得 $x_i = 0$ 。综上可表述为

$$\text{prox}_{1,\eta}(t)_i = \max \left\{ t_i - \frac{h_i}{\eta}, 0 \right\}, t_i \geq 0, i = 1, \dots, m \quad (12)$$

同理当 $x_i \leq 0$ 时, (11)等价为

$$x_i = -\left(-t_i - \frac{h_i}{\eta} \right), t_i = x_i - \frac{h_i}{\eta}, i = 1, \dots, m$$

因此 $t_i \leq 0$ 。当 $-t_i - \frac{h_i}{\eta} \leq 0$ 时, 结合 $x_i \leq 0$ 可得 $x_i = 0$ 。综上可表述为

$$\text{prox}_{1,\eta}(t)_i = -\max \left\{ -t_i - \frac{h_i}{\eta}, 0 \right\}, t_i \leq 0, i = 1, \dots, m \quad (13)$$

结合(12)与(13)可得, 加权 l_1 范数函数的临近算子解的表达形式为

$$\text{prox}_{1,\eta}(t)_i = \text{sign}(t_i) \max \{ |t_i| - h_i/\eta, 0 \}, i = 1, \dots, m$$

3.3. 收敛性证明

此处我们讨论 ADMM 算法的收敛性。

为叙述方便, 定义如下符号: $\lambda_i = \lambda_{\max}(A_i^T A_i)$, $\varphi_i = \lambda_{\min}(A_i^T A_i)$, $i = 1, 2$ 。设 $\{v^k\}$ 是本文算法产生的序列, $v^k := (x_1^k, x_2^k, z_1^k, z_2^k, w_1^k, w_2^k)$ 。令 $\tilde{v}^k := (x_1^k, x_2^k, z_1^k, z_2^k, w_1^k, w_2^k, x_2^{k-1})$, $c_1 = 8\lambda_1\lambda_2/\rho_1$, $\tilde{L}(v^k, \tilde{x}) := L(v^k) + c_1 \|x_2^k - \tilde{x}\|_2^2$, 从而 $\tilde{L}(\tilde{v}^k) := L(v^k) + c_1 \|x_2^k - x_2^{k-1}\|_2^2$ 。

引理 1 设序列 $\{v^k\}$ 由(5)~(10)产生, 如果下式成立

$$\rho_1 > \frac{16\lambda_1^2}{\rho_1} + \frac{16\lambda_1\lambda_2}{\rho_2} - 2\varphi_1, \rho_2 > \frac{16\lambda_2^2}{\rho_2} + \frac{16\lambda_1\lambda_2}{\rho_1} - 2\varphi_2 \quad (14)$$

则

$$\tilde{L}(v^{k+1}, x_2^k) + c_2 \|x_1^{k+1} - x_1^k\|_2^2 + c_3 \|x_2^{k+1} - x_2^k\|_2^2 \leq \tilde{L}(v^k, x_2^{k-1})$$

其中参数 $c_2 > 0$, $c_3 > 0$, 且

$$c_2 = \frac{2\varphi_1 + \rho_1}{2} - \frac{8\lambda_1^2}{\rho_1} - \frac{8\lambda_1\lambda_2}{\rho_2}, c_3 = \frac{2\varphi_2 + \rho_2}{2} - \frac{8\lambda_2^2}{\rho_2} - \frac{8\lambda_1\lambda_2}{\rho_1}$$

证明 此引理的证明与文献[5]的引理 1 的证明相似, 故略。

引理 2 设序列 $\{v^k\}$ 由(5)~(10)产生, 如果(14)满足, 那么 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v^{k+1} - v^k\|_2^2 = 0$, 故 $\{v^k\}$ 的任何聚点都是 L 的一个驻点。

证明 由(7)得出的最小值 x_1^{k+1} 满足

$$2A_1^T(A_1x_1^{k+1} + A_2x_2^k - y) + \rho_1(x_1^{k+1} - z_1^{k+1} + w_1^k/\rho_1) = 0$$

将(9)代入其中有

$$w_1^{k+1} = -2A_1^T(A_1x_1^{k+1} + A_2x_2^k - y) \tag{15}$$

从而结合 $\lambda_{\max}(A_1A_1^T) = \lambda_{\max}(A_1^TA_1) = \lambda_1$, $\lambda_{\max}^2(A_1^TA_2) \leq \lambda_1\lambda_2$ 有

$$\|w_1^k\|_2^2 \leq \frac{16}{3}\lambda_1\|A_1x_1^k + A_2x_2^k - y\|_2^2 + 16\lambda_1\lambda_2\|x_2^k - x_2^{k-1}\|_2^2 \tag{16}$$

类似地, 结合(8)及(10)可得

$$w_2^{k+1} = -2A_2^T(A_1x_1^{k+1} + A_2x_2^{k+1} - y) \tag{17}$$

$$\|w_2^k\|_2^2 \leq 4\lambda_2\|A_1x_1^k + A_2x_2^k - y\|_2^2 \tag{18}$$

因为 $\tilde{L}(\tilde{v}^k)$ 下半连续, 故下有界。由引理 1 可知当满足(14)时, $\tilde{L}(\tilde{v}^k)$ 非增, 因此收敛。对于 $k > 1$, 由 \tilde{L} 的定义及(16)和(18)有

$$\frac{8\lambda_1\lambda_2}{\rho_1}\|x_2^k - x_2^{k-1}\|_2^2 - \frac{\|w_1^k\|_2^2}{2\rho_1} \geq -\frac{8\lambda_1}{3\rho_1}\|A_1x_1^k + A_2x_2^k - y\|_2^2, \quad -\frac{\|w_2^k\|_2^2}{2\rho_2} \geq -\frac{2\lambda_2}{\rho_2}\|A_1x_1^k + A_2x_2^k - y\|_2^2$$

因此

$$\tilde{L}(\tilde{v}^1) \geq \tilde{L}(\tilde{v}^k) \geq c_4\|A_1x_1^k + A_2x_2^k - y\|_2^2 + \beta\mu\sum_{i=1}^{m_1}\omega_{1,i}^k|z_{1,i}^k| + \beta\sum_{j=1}^{m_2}\omega_{2,j}^k|z_{2,j}^k| + \frac{\rho_1}{2}\left\|x_1^k - z_1^k + \frac{w_1^k}{\rho_1}\right\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2}\left\|x_2^k - z_2^k + \frac{w_2^k}{\rho_2}\right\|_2^2$$

这里的 $c_4 = 1 - \frac{8\lambda_1}{3\rho_1} - \frac{2\lambda_2}{\rho_2}$ 。令 $x = \frac{\lambda_1}{\rho_1}$, $y = \frac{\lambda_2}{\rho_2}$, 且 $\rho_1 \leq \lambda_1$, $\rho_2 \leq \lambda_2$, 故(14)可以转化为 $0 < y < \frac{1}{16x} - x + \frac{1}{8}$, $0 < x < \frac{1}{16y} - y + \frac{1}{8}$, 且 $c_4 = 1 - \frac{8}{3}x - 2y$ 。由文献[5]的引理 2 证明过程可知, 当 x, y 同时满足上述两个不等式时, $f(x, y) = \frac{8}{3}x + 2y$ 的最大值小于 1, 即 $1 - \frac{8}{3}x - 2y > 0$ 。因此当(14)成立时, 有 $c_4 > 0$ 。从而序列 $\{v^k\}$ 有界。故对于有界序列 $\{\tilde{v}^k\}$, 必存在一个收敛子列 $\{\tilde{v}^{k_j}\}$ 收敛到聚点 \tilde{v}^* , 又 $\tilde{L}(\tilde{v}^k)$ 在 $c_2, c_3 > 0$ 时非增收敛, 那么对任意 $k \geq 1$ 都有 $\tilde{L}(\tilde{v}^k) \geq \tilde{L}(\tilde{v}^*)$, 从而结合引理 1 可得

$$c_2\sum_{k=1}^N\|x_1^{k+1} - x_1^k\|_2^2 + c_3\sum_{k=1}^N\|x_2^{k+1} - x_2^k\|_2^2 \leq \sum_{k=1}^N[\tilde{L}(\tilde{v}^k) - \tilde{L}(\tilde{v}^{k+1})]$$

综上

$$c_2\sum_{k=1}^N\|x_1^{k+1} - x_1^k\|_2^2 + c_3\sum_{k=1}^N\|x_2^{k+1} - x_2^k\|_2^2 \leq \sum_{k=1}^N[\tilde{L}(\tilde{v}^k) - \tilde{L}(\tilde{v}^{k+1})] = \tilde{L}(\tilde{v}^1) - \tilde{L}(\tilde{v}^{N+1}) \leq \tilde{L}(\tilde{v}^1) - \tilde{L}(\tilde{v}^*) < \infty$$

令 $N \rightarrow \infty$, 当 $c_2, c_3 > 0$ 时有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_1^{k+1} - x_1^k\|_2^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\|x_2^{k+1} - x_2^k\|_2^2 < \infty \tag{19}$$

由(15)有

$$\|w_1^{k+1} - w_1^k\|_2^2 \leq 4\left(\|A_1^TA_1(x_1^{k+1} - x_1^k)\|_2 + \|A_1^TA_2(x_2^k - x_2^{k-1})\|_2\right)^2 \leq 8\lambda_1^2\|x_1^{k+1} - x_1^k\|_2^2 + 8\lambda_1\lambda_2\|x_2^k - x_2^{k-1}\|_2^2 \tag{20}$$

同理由(17)可得

$$\|w_2^{k+1} - w_2^k\|_2^2 \leq 8\lambda_1\lambda_2 \|x_1^{k+1} - x_1^k\|_2^2 + 8\lambda_2^2 \|x_2^{k+1} - x_2^k\|_2^2 \quad (21)$$

再结合(20)有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|w_1^{k+1} - w_1^k\|_2^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|w_2^{k+1} - w_2^k\|_2^2 < \infty \quad (22)$$

再据(19)和(22)可得 $\sum_{k=1}^{\infty} \|z_1^{k+1} - z_1^k\|_2^2 < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} \|z_2^{k+1} - z_2^k\|_2^2 < \infty$ 。因此 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v^{k+1} - v^k\|_2^2 = 0$ 。故可知由(5)~(10)

产生的序列 $\{v^k\}$ 的任何聚点都是 L 的一个驻点, 且由最优性条件可知其满足

$$\begin{cases} 0 \in \beta\mu\partial \sum_{i=1}^{n_1} \omega_i^{k+1} |z_i^{k+1}| - w_1^{k+1} + \rho_1(x_1^{k+1} - x_1^k), \\ 0 \in \beta\partial \sum_{j=1}^{n_2} \omega_{2j}^{k+1} |z_{2j}^{k+1}| - w_2^{k+1} + \rho_2(x_2^{k+1} - x_2^k), \\ 0 = w_1^{k+1} + 2A_1^T(A_1x_1^{k+1} + A_2x_2^k - y), \\ 0 = w_2^{k+1} + 2A_2^T(A_1x_1^{k+1} + A_2x_2^{k+1} - y), \\ w_1^{k+1} = w_1^k + \rho_1(x_1^{k+1} - z_1^{k+1}), \\ w_2^{k+1} = w_2^k + \rho_2(x_2^{k+1} - z_2^{k+1}). \end{cases} \quad (23)$$

取 $\{v^k\}$ 的一个收敛子列 $\{v^{k_j}\}$ 。因 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v^{k+1} - v^k\|_2^2 = 0$, 从而 v^{k_j} 和 v^{k_j+1} 有相同的极限点

$v^* := (x_1^*, x_2^*, z_1^*, z_2^*, w_1^*, w_2^*)$ 。由于 $\tilde{L}(v^k)$ 收敛, 故 $\sum_{i=1}^{n_1} \omega_i^{k+1} |z_i^{k+1}|$, $\sum_{j=1}^{n_2} \omega_{2j}^{k+1} |z_{2j}^{k+1}|$ 收敛。对(23)两侧求极限可得

$$\begin{aligned} x_1^* = z_1^*, \quad x_2^* = z_2^*, \quad w_1^* \in \beta\mu\partial \sum_{i=1}^{n_1} \omega_i^* |z_i^*|, \quad w_2^* \in \beta\partial \sum_{j=1}^{n_2} \omega_{2j}^* |z_{2j}^*| \\ -w_1^* = 2A_1^T(A_1x_1^* + A_2x_2^* - y), \quad -w_2^* = 2A_2^T(A_1x_1^* + A_2x_2^* - y) \end{aligned}$$

故 v^* 是 L 的一个驻点。

引理 3 函数 $\tilde{L}(v^k, \tilde{x})$ 如前定义, 若(14)成立, 则存在常数 $c_5 > 0$, 使得

$$\text{dist}(0, \partial\tilde{L}(v^{k+1}, x_2^k)) \leq c_5 (\|x_1^{k+1} - x_1^k\|_2 + \|x_2^{k+1} - x_2^k\|_2 + \|x_2^k - x_2^{k-1}\|_2)$$

证明 由 \tilde{L} 的定义可得

$$\partial_{z_1} \tilde{L}(\tilde{v}^{k+1}) = \beta\mu\partial \sum_{i=1}^{n_1} \omega_i^{k+1} |z_i^{k+1}| - w_1^{k+1} - \rho_1(x_1^{k+1} - z_1^{k+1}) = \beta\mu\partial \sum_{i=1}^{n_1} \omega_i^{k+1} |z_i^{k+1}| - w_1^{k+1} - (w_1^{k+1} - w_1^k)$$

结合(23)有 $\rho_1(x_1^k - x_1^{k+1}) + (w_1^k - w_1^{k+1}) \in \partial_{z_1} \tilde{L}(\tilde{v}^{k+1})$ 。类似可得:

$$\rho_2(x_2^k - x_2^{k+1}) + (w_2^k - w_2^{k+1}) \in \partial_{z_2} \tilde{L}(\tilde{v}^{k+1}), \quad \partial_{\tilde{x}} \tilde{L}(\tilde{v}^{k+1}) = 2c_1(x_2^k - x_2^{k+1}),$$

$$\partial_{w_1} \tilde{L}(\tilde{v}^{k+1}) = w_1^{k+1} - w_1^k, \quad \partial_{w_2} \tilde{L}(\tilde{v}^{k+1}) = (w_2^{k+1} - w_2^k) + 2c_1(x_2^{k+1} - x_2^k),$$

$$\partial_{w_1} \tilde{L}(\tilde{v}^{k+1}) = (w_1^{k+1} - w_1^k) / \rho_1, \quad \partial_{w_2} \tilde{L}(\tilde{v}^{k+1}) = (w_2^{k+1} - w_2^k) / \rho_2.$$

因此, 存在常数 $c_6 > 0$ 使得

$$\text{dist}\left(0, \partial \tilde{L}(\tilde{v}^{k+1})\right) \leq c_6 \left(\|x_1^{k+1} - x_1^k\|_2 + \|x_2^{k+1} - x_2^k\|_2 + \|w_1^{k+1} - w_1^k\|_2 + \|w_2^{k+1} - w_2^k\|_2 \right)$$

再由引理 2 的证明可得结论。

注：这个结论为迭代间隙提供了一个次梯度下界，同时结合引理 2 可得出当 $k \rightarrow \infty$ 时，

$$\text{dist}\left(0, \partial \tilde{L}(\tilde{v}^{k+1})\right) \rightarrow 0$$

定理 1 若(14)成立，则本文算法产生的点列 $\{v^k\}$ 收敛到问题(4)的一个聚点。

证明 首先证明序列 $\{v^k\}$ 满足

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|v^{k+1} - v^k\|_2 < \infty \tag{24}$$

对于本文定义的加权 l_1 范数 $\sum_{i=1}^m h_i |x_i| = \sum_{i=1}^m 0.3(x_i^2 + \varepsilon)^{-\frac{1}{4}} |x_i|$ ，当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时， $0.3(x_i^2 + \varepsilon)^{-\frac{1}{4}} |x_i| \rightarrow 0.3|x_i|^{\frac{1}{2}}$ 。

取定任意小的正数 δ ，当 $\varepsilon \in (0, \delta)$ 时， $0.3(x_i^2 + \varepsilon)^{-\frac{1}{4}} |x_i| = 0.3|x_i|^{\frac{1}{2}} + o(\varepsilon)$ 。因 $|x_i|^{\frac{1}{2}}$ 是 KL 函数，故当 ε 充分小时， $\sum_{i=1}^m h_i |x_i| = \sum_{i=1}^m 0.3(x_i^2 + \varepsilon)^{-\frac{1}{4}} |x_i|$ 是 KL 函数，从而 \tilde{L} 也为 KL 函数，故(24)成立。因此迭代点列 $\{v^k\}$ 是柯西列且收敛，结合引理 2 可得迭代点列 $\{v^k\}$ 全局收敛到 L 的一个聚点。关于(24)的详细证明可参考文献[6]，此处略去。

4. 数值实验

本节测试两组 3D 彩色图像恢复实验，程序用 Matlab2017a 编写。为加速算法，对参数 β 采取如下措施：对于 $\beta_k > 10^{-6}$ ， $\beta_k = 0.97\beta_{k-1}$ ，否则 $\beta_k = 10^{-6}$ 。取 $A_2 = I$ ， A_1 为逆离散余弦变换(IDCT)矩阵，因此 x_1 是图像的 DCT 系数。然后根据 DCT 系数的相对误差(RelErr)和恢复图像的峰值信噪比(PSNR)来评估算法的效果，并与 JP [7]，YALL1 [8]算法进行对比。实验一、二、三修复的是三张含有 30%盐噪声的图像。实验四、五、六重建的是三张含有 30%椒盐噪声的图像，其中含有 25%盐噪声和 5%胡椒噪声。

实验一

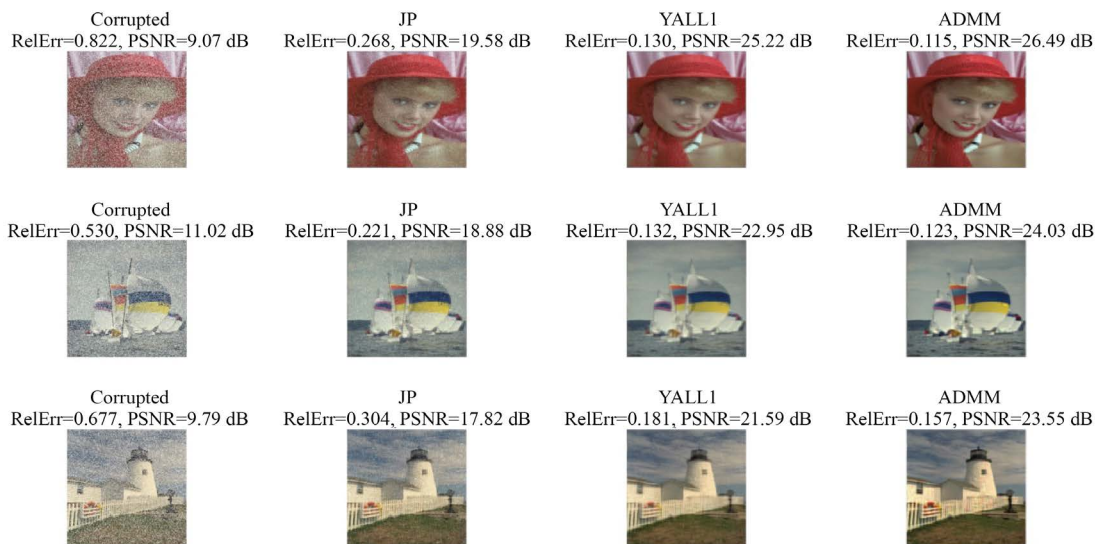


Figure 1. Comparisons of ADMM algorithm, the JP and the YALL1 (30% of the pixels are corrupted by salt noise)

图 1. ADMM 算法与 JP 和 YALL1 算法的对比结果(30%盐噪声)

实验二

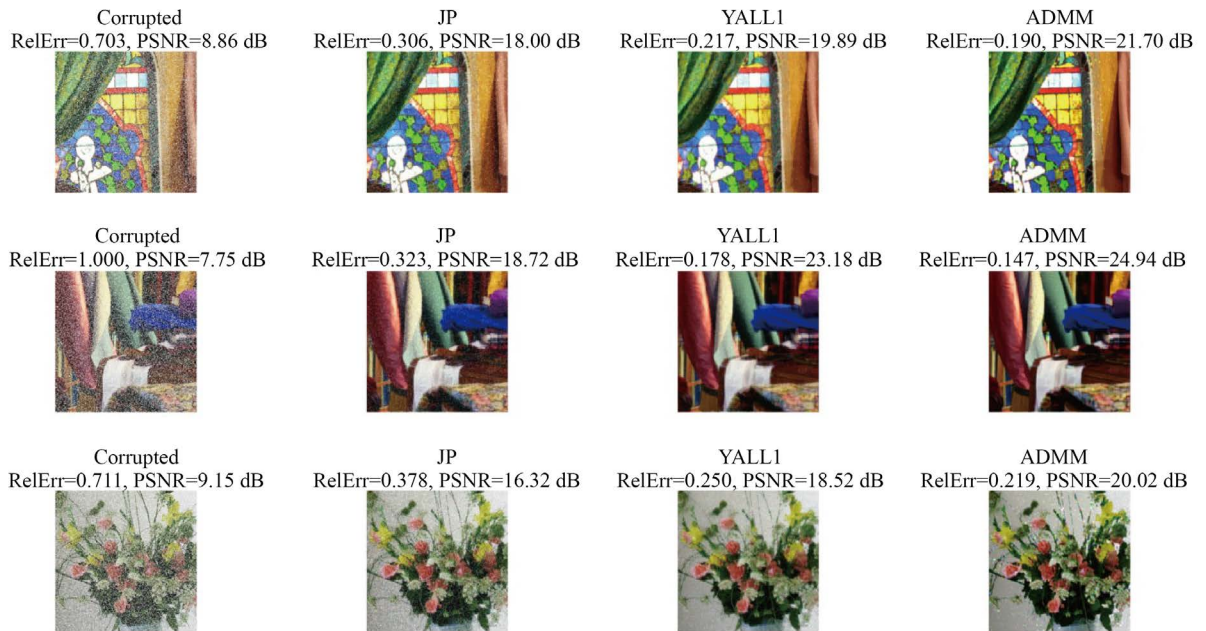


Figure 2. Comparisons of ADMM algorithm, the JP and the YALL1 (30% of the pixels are corrupted by salt noise)
图 2. ADMM 算法与 JP 和 YALL1 算法的对比结果(30%盐噪声)

实验三

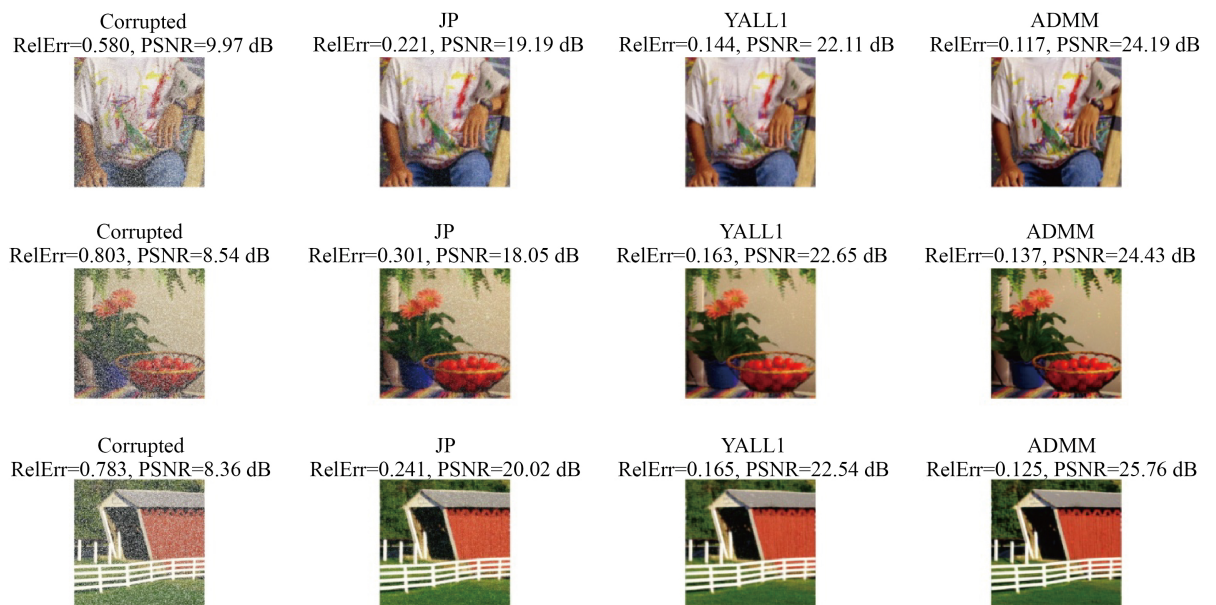


Figure 3. Comparisons of ADMM algorithm, the JP and the YALL1 (30% of the pixels are corrupted by salt noise)
图 3. ADMM 算法与 JP 和 YALL1 算法的对比结果(30%盐噪声)

实验四

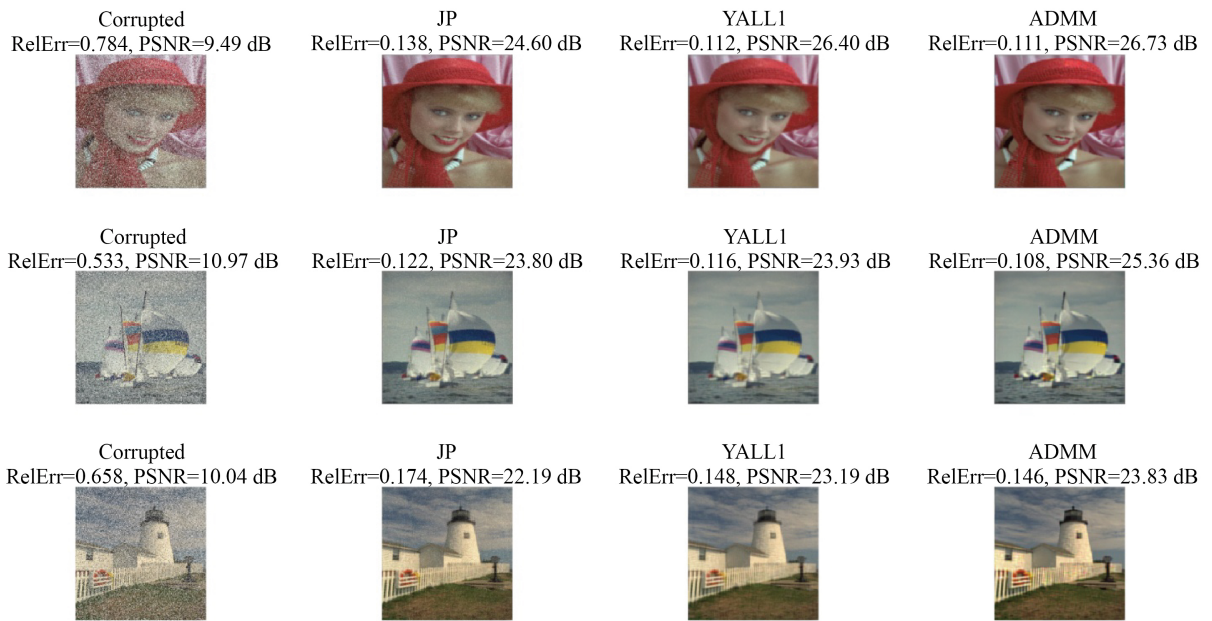


Figure 4. Comparisons of ADMM algorithm, the JP and the YALL1 (30% of the pixels are corrupted by salt-and-pepper noise)

图 4. ADMM 算法与 JP 和 YALL1 算法的对比结果(30%椒盐噪声)

实验五

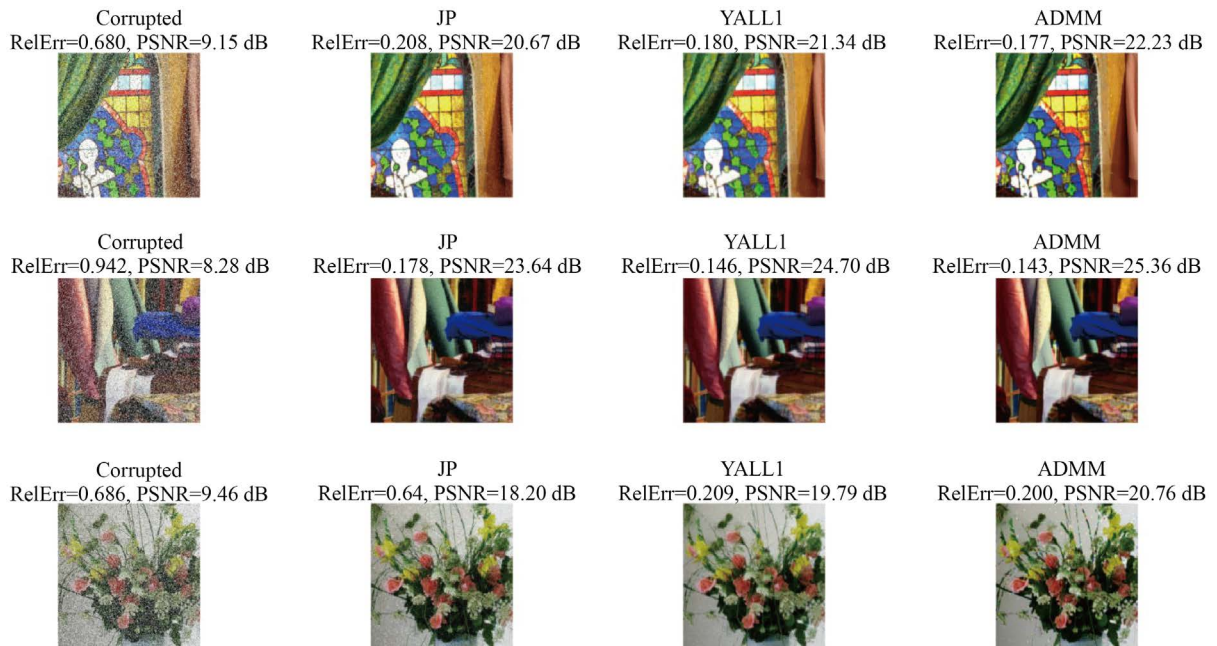


Figure 5. Comparisons of ADMM algorithm, the JP and the YALL1 (30% of the pixels are corrupted by salt-and-pepper noise)

图 5. ADMM 算法与 JP 和 YALL1 算法的对比结果(30%椒盐噪声)

实验六

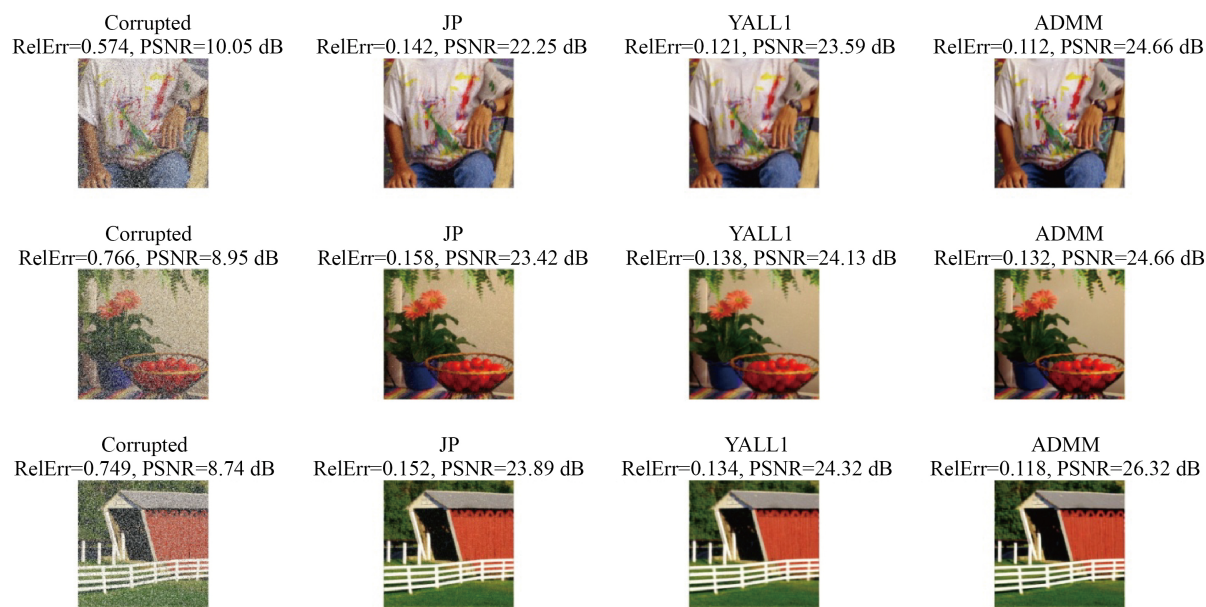


Figure 6. Comparisons of ADMM algorithm, the JP and the YALL1 (30% of the pixels are corrupted by salt-and-pepper noise)

图 6. ADMM 算法与 JP 和 YALL1 算法的对比结果(30%椒盐噪声)

由图 1~3 可以看出, 当彩色图片中含 30%的盐噪声时, 与 JP 算法相比, 本文的 ADMM 算法的峰值信噪比 PSNR 提高了 3~7 dB; 与 YALL1 算法相比, 本文的 ADMM 算法的峰值信噪比 PSNR 提高了 1~3.3 dB。相应的相对误差 RelErr 明显降低。由图 4~6 可以看出, 当彩色图片中含 30%的椒盐噪声时, 与 JP 算法相比, 本文的 ADMM 算法的峰值信噪比 PSNR 提高了 1~2.6 dB; 与 YALL1 算法相比, ADMM 算法的峰值信噪比 PSNR 提高了 0.3~2 dB, 相对误差 ReLErr 的减少量也较大。由此可见, 基于本文提出的加权 l_1 范数极小化模型的 ADMM 算法在 3D 彩色图像重建中具有有效性。

5. 结论

本文针对具有两个稀疏信号的恢复问题, 提出了加权 l_1 范数极小化模型, 通过模型的等价转化应用 ADMM 算法进行求解。在适当地假设下证明了算法的收敛性。在数值试验中, 对具有 30%盐噪声和 30%椒盐噪声的 3D 彩色图像分别进行了恢复, 并与经典的 JP 算法及 YALL1 算法进行了数值比对。实验结果表明相比于其他两个算法, ADMM 算法的峰值信噪比 PSNR 明显提高, 而相对误差 RelErr 明显降低, 因此具有较好的图像恢复效果。

参考文献

- [1] Jung, M. and Kang, M. (2015) Simultaneous Cartoon and Texture Image Restoration with Higher-Order Regularization. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **8**, 721-756. <https://doi.org/10.1137/140967416>
- [2] He, L. and Wang, Y. (2014) Iterative Support Detection-Based Split Bregman Method for Wavelet Frame-Based Image Inpainting. *IEEE Transactions on Image Processing*, **23**, 5470-5485. <https://doi.org/10.1109/TIP.2014.2362051>
- [3] Mallat, S.Y.G. (2010) Super-Resolution with Sparse Mixing Estimators. *IEEE Transactions on Image Processing*, **19**, 2889-2900. <https://doi.org/10.1109/TIP.2010.2049927>
- [4] Arias, P., Facciolo, G., Caselles, V., et al. (2011) A Variational Framework for Exemplar-Based Image Inpainting. *International Journal of Computer Vision*, **93**, 319-347. <https://doi.org/10.1007/s11263-010-0418-7>
- [5] Wen, F., Adhikari, L., Pei, L., et al. (2017) Nonconvex Regularization Based Sparse Recovery and Demixing with Ap-

- plication to Color Image Inpainting. *IEEE Access*, **5**, 11513-11527. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2017.2705646>
- [6] Li, G.Y. and Pong, T.K. (2014) Global Convergence of Splitting Methods for Nonconvex Composite Optimization. *SIAM Journal on Optimization*, **25**, 2434-2460. <https://doi.org/10.1137/140998135>
- [7] Studer, C. (2012) Recovery of Sparsely Corrupted Signals. *IEEE Transactions on Information Theory*, **58**, 3115-3130. <https://doi.org/10.1109/TIT.2011.2179701>
- [8] Yang, J. and Zhang, Y. (2011) Alternating Direction Algorithms for l_1 Problems in Compressive Sensing. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **33**, 250-278. <https://doi.org/10.1137/09077761>