Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(5), 1804-1824
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.105191

具有井位势的非线性分数阶Schrödinger-Poisson 方程组的基态解的存在性和渐近性

王亚军

云南师范大学数学学院，云南 昆明
Email: 15732155719@163.com

收稿日期：2021年4月27日；录用日期：2021年5月11日；发布日期：2021年5月31日

摘 要

在本文中，我们研究了如下分数阶 Schrödinger-Poisson 方程组

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u + \lambda V(x)u + \phi u = f(x,u) & x \in \mathbb{R}^3,\\ (-\Delta)^t \phi = u^2 & x \in \mathbb{R}^3,\end{cases}$$

其中$(-\Delta)^\alpha$ 是阶数为 $\alpha \in (0,1)$ 的分数阶 Laplace 算子，$\lambda > 0$ 是一个参数，$2_s^* = \frac{6}{3-2s}$ 是分数阶临界指数．在 V, f 满足适当条件下，利用变分方法我们证明了基态解的存在性．及当 $\lambda \to +\infty$ 时基态解的渐近行为．

关键词

分数阶 Schrödinger-Poisson 方程组，Nehari 流形，变分方法

Existence and Asymptotic Behavior of Ground State Solutions for Nonlinear Fractional Schrödinger-Poisson Systems with Steep Potential Well

文章引用: 王亚军. 具有井位势的非线性分数阶 Schrödinger-Poisson 方程组的基态解的存在性和渐近性[J]. 应用数学进展, 2021, 10(5): 1804-1824. DOI: 10.12677/aam.2021.105191

Yajun Wang

Department of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan
Email: 15732155719@163.com

Received: Apr. 27^{th}, 2021; accepted: May 11^{th}, 2021; published: May 31^{st}, 2021

Abstract

In this paper, we study the following fractional Schrödinger-Poisson system:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + \lambda V(x)u + \phi u = f(x,u) & \text{in } \mathbb{R}^3, \\ (-\Delta)^t \phi = u^2 & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

where $(-\Delta)^\alpha$ denotes the fractional Laplacian of order $\alpha \in (0,1)$, $\lambda > 0$ is a parameter, $2_s^* = \frac{6}{3-2s}$ is the fractional critical exponent. Under appropriate assumptions on V and f, we prove the existence of ground state solutions using variational methods. Furthermore, we also study the asymptotic behavior of ground state solutions as $\lambda \to +\infty$.

Keywords

Fractional Schrödinger-Poisson System, Nehari Manifold, Variational Method

1. 引言和主要结果

本章主要研究如下分数阶 Schrödinger-Poisson 方程组

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + \lambda V(x)u + \phi u = f(x,u) & x \in \mathbb{R}^3, \\ (-\Delta)^t \phi = u^2 & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1.1}$$

基态解的存在性和渐近性. 其中 $\lambda > 0$ 是一个参数, $(-\Delta)^{\alpha}$ 是阶数为 α 的分数阶 Laplace 算子([1]), $2_s^* = \frac{6}{3-2s}$ 是分数阶临界指数, $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为在无穷远处超线性但次临界的连续函数. 位势函数 V 和非线性项 f 满足:

(V_1) $V \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ 且 $V(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$.

(V_2) 存在 $b > 0$ 使得集合 $V_b := \{x \in \mathbb{R}^3 | \, V(x) < b\}$ 非空且测度有限.

(V_3) $\Omega := int(V^{-1}(0))$ 非空具有光滑边界, 且 $\bar{\Omega} = V^{-1}(0)$.

(f_1) $f \in C(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ 且存在 $c > 0$, 有 $|f(x,u)| \leq c(1 + |u|^{p-1})$, $4 < p < 2_s^*$.

(f_2) $\lim\limits_{u \to 0} \frac{f(x,u)}{u} = 0$ 关于 $x \in \mathbb{R}^3$ 上一致成立.

(f_3) $\lim\limits_{|u| \to \infty} \frac{F(x,u)}{u^4} = \infty$ 关于 $x \in \mathbb{R}^3$ 上一致成立, 其中 $F(x,u) := \int_0^u f(x,\tau)d\tau$.

(f_4) 函数 $s \mapsto \frac{f(u)}{u^3}(u \neq 0)$ 是正的, 并且在 $(-\infty, 0)$ 上单减, 在 $(0, \infty)$ 上单增.

上述类型的位势函数由 Bartsch 和 Wang [2] 在研究非线性 Schrödinger 方程时首次提出, 且在不同问题中得到广泛应用. 如见 [3–8] 以及其参考文献. 条件 $(V_1) - (V_3)$ 意味着位势函数 λV 的深度由 λ 控制. 当 λ 足够大时, λV 可以被看做是井位势, 并且我们希望找到的解集中在底部 Ω 附近.

我们注意到:

注1.1 由 (f_1) 有 $4 < 2_s^* = \frac{6}{3-2s}$, 因此 $s > \frac{3}{4}$. 此外, 如果 $s, t \in (\frac{3}{4}, 1)$, 我们会有 $2s + 2t > 3$.

注1.2 当 $(f_1) - (f_4)$ 成立时, 我们有

$$0 \leq 4F(x,u) \leq f(x,u)u, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}.$$

此外, 当 $u > 0$ 时, $\frac{1}{4}f(x,u)u - F(x,u)$ 单减.

本章的主要结果如下:

定理1. *设 V, f 分别满足 $(V_1) - (V_3)$ 和 $(f_1) - (f_4)$. 则存在 $\Lambda > 0$, 使得当 $\lambda > \Lambda$ 时, 问题 (1.1) 至少存在一个基态解.*

关于基态解的渐近行为, 我们有以下结论.

定理2. *设 u_λ 是由定理 1 给出的基态解. 则在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中, 当 $\lambda \to \infty$ 时, 有 $u_\lambda \to u_0$, 其中 $u_0 \in H_0^s(\Omega)$ 是下述问题的基态解*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + \big(u^2 * \frac{1}{|x|^{3-2t}}\big)u = f(x,u) & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \mathbb{R}^3 \backslash \Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

注1.3 需要指出, 在 [8] 中只证明了 u_0 是极限问题的基态解, 而在本文中, 我们进一步证明了 u_0 是极限问题 (1.2) 的基态解. 此外, 我们研究的非线性项 f 只是连续的, 这可以看作是 [8] 中结论的拓展.

这里给出一些记号:

- $L^p(\mathbb{R}^3)$ $(1 \leq p < \infty,)$ 表示 Lebesgue 空间且赋予范数 $|u|_p = (\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p dx)^{\frac{1}{p}}$, $|\cdot|_\infty =$

$esssup_{x\in\mathbb{R}^3}|u(x)|$ 表示空间 $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ 的范数;

- 对任意 $R>0$, $x\in\mathbb{R}^N$, $B_R(x)$ 表示半径为 R, 球心为点 x 的开球;
- 当 $n\to\infty$ 时, $u_n\rightharpoonup u$ 和 $u_n\to u$ 分别表示弱收敛和强收敛;
- $C, C_i, c_i(i=1,2,\cdots)$ 表示不同的正的常数;
- $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 表示在 $\mathbb{R}^N$ 中具有紧支集的无穷次可微函数的全体.

2. 变分背景和初步结果

对任意的 $\alpha\in(0,1)$, 定义齐次分数阶 Sobolev 空间 $\mathcal{D}^{\alpha,2}(\mathbb{R}^N)$ 为 $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 关于

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{\alpha,2}}:=\Big(\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2\alpha}}dxdy\Big)^{\frac{1}{2}}$$

的完备化空间. 其内积为

$$(u,v)_{\mathcal{D}^{\alpha,2}(\mathbb{R}^3)}=\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{3+2\alpha}}dxdy=\int_{\mathbb{R}^3}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}vdx.$$

我们有, 对任意的 $\alpha\in(0,1)$, 嵌入 $\mathcal{D}^{\alpha,2}(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^{2_\alpha^*}(\mathbb{R}^3)$ 是连续的, 存在最佳常数 $S_\alpha>0$ 为

$$S_\alpha:=\inf_{u\in\mathcal{D}^{\alpha,2}(\mathbb{R}^3)}\frac{\|u\|^2_{\mathcal{D}^{\alpha,2}(\mathbb{R}^3)}}{\|u\|^2_{2_\alpha^*(\mathbb{R}^3)}}$$

定义分数阶 Sobolev 空间 $H^\alpha(\mathbb{R}^N)$ 为

$$H^\alpha(\mathbb{R}^N):=\{u\in L^2(\mathbb{R}^N):\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{N+2\alpha}{2}}}\in L^2(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)\},$$

赋予范数

$$\|u\|^2_{H^\alpha}=[u]^2_{H^\alpha}+|u|_2^2,$$

其中

$$[u]_{H^\alpha}=\Big(\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2\alpha}}dxdy\Big)^{\frac{1}{2}}$$

为 u 的 Gagliardo 半范数. 空间 $H^\alpha(\mathbb{R}^N)$ 可以等价地定义为:

$$H^\alpha(\mathbb{R}^N)=\{u\in L^2(\mathbb{R}^N):\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^{2\alpha})|\mathcal{F}u|^2d\xi<+\infty\},$$

其中 $\mathcal{F}$ 表示傅里叶变换.

光滑函数 $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 的分数阶 Laplace 算子 $(-\Delta)^\alpha u$ 定义为:

$$(-\Delta)^\alpha u(\xi)=\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\alpha}\mathcal{F}u(\xi)),\quad \xi\in\mathbb{R}^3.$$

由文献 [1] 中命题 3.4 以及命题 3.6, 我们可知

$$|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2\alpha}|\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2}C_{N,\alpha}[u]_{H^\alpha},$$

其中 $C_{N,\alpha}$ 是一个依赖于空间维数 N 和算子阶数 α 的常数. 因此, $H^\alpha(\mathbb{R}^N)$ 上的如下三个范数

$$u \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2dx + \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2\alpha}}dxdy\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$u \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2\alpha}|\mathcal{F}u(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$u \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2dx + |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u|_2^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

等价, 且 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在空间 $H^\alpha(\mathbb{R}^N)$ 中稠密.

考虑到位势函数 $V(x)$ 的影响, 我们引入一个希尔伯特子空间

$$H = \left\{u \in H^s(\mathbb{R}^3) : \int_{\mathbb{R}^3} V(x)u^2dx < +\infty\right\},$$

赋予内积

$$(u,v) = \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}vdx + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)uvdx,$$

和范数

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)u^2dx.$$

对 $\lambda > 0$, 我们有下面的内积和范数

$$(u,v)_\lambda = \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}vdx + \int_{\mathbb{R}^3} \lambda V(x)uvdx, \quad \|u\|_\lambda = (u,u)_\lambda^{\frac{1}{2}}.$$

显然当 $\lambda \geq 1$ 时有 $\|u\| \leq \|u\|_\lambda$. 设 $H_\lambda = (H, \|\cdot\|_\lambda)$, 则我们有下面的引理.

下面, 给出分数阶 Sobolev 空间的一些性质.

引理3. *([1])* 设 $0 < s < 1$, 则存在常数 $C = C(s) > 0$, 使得对任意 $u \in H^s(\mathbb{R}^3)$, 有

$$|u|_{2_s^*}^2 \leq C[u]_{H^s(\mathbb{R}^3)}^2.$$

此外, 对任意 $r \in [2, 2_s^*]$, 嵌入 $H^s(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^3)$ 连续, 且当 $r \in [2, 2_s^*)$ 时, 上述嵌入是局部紧的.

引理4. *([9])* 设 $\{u_n\}$ 在 $H^\alpha(\mathbb{R}^N)$ 中有界, 且存在 $R > 0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n(x)|^2dx = 0,$$

则对任意的 $q \in (2, 2_\alpha^*)$, 在 $L^q(\mathbb{R}^N)$ 中有 $u_n \to 0$.

引理5. *([10])* 设 $u \in \mathcal{D}^{\alpha,2}(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, 对任意的 $r > 0$, 令 $\varphi_r(x) = \varphi(\frac{x}{r})$. 则

$$u\varphi_r \to 0 \text{ 于 } \mathcal{D}^{\alpha,2}(\mathbb{R}^N)\ (r \to 0).$$

此外, 如果在原点的邻域内有 $\varphi \equiv 1$, 则有

$$u\varphi_r \to u \text{ 于 } \mathcal{D}^{\alpha,2}(\mathbb{R}^N)\ (r \to 0).$$

引理6. 设 $V(x)$ 满足条件 $(V_1) - (V_2)$. 则存在常数 $\lambda^* > 0$, 使得当 $\lambda > \lambda^*$ 时, 对任意 $r \in [2, 2_s^*]$, 嵌入 $H_\lambda \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^3)$ 连续, 而当 $r \in [2, 2_s^*)$ 时前述嵌入局部紧.

证明: 我们首先证明, 存在常数 c_0, λ^* (与 λ 无关), 使得

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} \le c_0\|u\|_\lambda, \quad \forall u \in H_\lambda, \lambda \ge \lambda^*.$$

事实上, 利用 (V_1), (V_2) 和 *Sobolev* 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} (|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2 + u^2)dx = \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2 dx + \int_{V_b} u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3\setminus V_b} u^2 dx \\
\le& \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2 dx + (meas(V_b))^{\frac{2s}{3}} (\int_{\mathbb{R}^3} u^{2_s^*} dx)^{\frac{3-2s}{3}} + \int_{\mathbb{R}^3\setminus V_b} u^2 dx \\
\le& \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2 dx + (meas(V_b))^{\frac{2s}{3}} (\int_{\mathbb{R}^3} u^{2_s^*} dx)^{\frac{3-2s}{3}} + \frac{1}{\lambda b}\int_{\mathbb{R}^3\setminus V_b} \lambda V(x) u^2 dx \\
\le& \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2 dx + (meas(V_b))^{\frac{2s}{3}} (\int_{\mathbb{R}^3} u^{2_s^*} dx)^{\frac{3-2s}{3}} + \frac{1}{\lambda b}\int_{\mathbb{R}^3} \lambda V(x) u^2 dx \\
\le& \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2 dx + (meas(V_b))^{\frac{2s}{3}} S_s^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2 dx + \frac{1}{\lambda b}\int_{\mathbb{R}^3} \lambda V(x) u^2 dx \\
\le& [1 + (meas(V_b))^{\frac{2s}{3}} S_s^{-2}] \int_{\mathbb{R}^3} (|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2 + \lambda V(x)u^2)dx := c_0 \int_{\mathbb{R}^3} (|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2 + \lambda V(x)u^2)dx
\end{aligned}$$

其中 $\lambda \ge \lambda^* := \frac{1}{b}[1 + (meas(V_b))^{\frac{2s}{3}} S_s^{-2}]^{-1}$. 这证明了当 $\lambda \ge \lambda^*$ 时, 有嵌入 $H_\lambda \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^3)$. 根据引理 3, 对任意 $r \in [2, 2_s^*]$ 嵌入 $H^s(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^3)$ 是连续的, 即存在常数 $c_r, c_0 > 0$, 使得

$$|u|_r \le c_r\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} \le c_0 c_r \|u\|_\lambda, \quad \forall\ u \in H_\lambda,\ 2 \le r \le 2_s^*. \tag{2.1}$$

且当 $r \in [2, 2_s^*)$ 时上述嵌入局部紧, 证毕.

显然方程组 (1.1) 是泛函 $J : H_\lambda \times \mathcal{D}^{t,2}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$

$$J(u,\phi) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\phi|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \phi u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(x,u)dx. \tag{2.2}$$

的 $Euler - Lagrange$ 方程, 即 J 是方程组 (1.1) 对应的能量泛函.

易见泛函 J 是强不定的, 即在无穷维子空间中它是上方无界并且下方无界的. 我们为克服这一困难, 用 [11] 中的约化思想来处理. 首先, 对于固定的 $u \in H_\lambda$, 由 Lax-Milgram 定理, 存在唯一的

$\phi_u^t \in \mathcal{D}^{t,2}(\mathbb{R}^3)$ 是

$$(-\Delta)^t\phi = u^2, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

的解, 且 ϕ_u^t 具有如下积分形式

$$\phi_u^t(x) = C_t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(y)}{|x-y|^{3-2t}} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

它也被称为 t-Riesz 势(见 [12]), 其中

$$C_t = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma(3-2t)}{2^{2t}\Gamma(s)}.$$

把分数阶 Poisson 方程的解入第一个方程, 则方程组 (1.1) 可以简化为单个方程, 这就是本文处理方程组 (1.1) 的基本思想. 为了更好地理解分数阶 Poisson 方程的解 ϕ_u^t, 下面收集一些有用的结论.

引理7. *([13]) 对任意 $u \in H^s(\mathbb{R}^3)$, $4s+2t \geq 3$, 我们有*

(i) $\phi_u^t \geq 0$;

(ii) $\phi_u^t : H^s(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{D}^{t,2}(\mathbb{R}^3)$ *是连续的, 并且将有界集映到有界集;*

(iii) $\|\phi_u^t\|^2_{\mathcal{D}^{t,2}(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u^t u^2 dx \leq S_t^2 \|u\|^4_{\frac{12}{3+2t}}$;

(iv) 若在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ *中* $u_n \rightharpoonup u$, *则在* $\mathcal{D}^{t,2}(\mathbb{R}^3)$ *中有* $\phi_{u_n}^t \rightharpoonup \phi_u^t$;

(v) 若在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ *中* $u_n \to u$, *则在* $\mathcal{D}^{t,2}(\mathbb{R}^3)$ *中有* $\phi_{u_n}^t \to \phi_u^t$, *且* $\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}^t u_n^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u^t u^2 dx$.

为便于讨论泛函的几何结构, 我们需要研究耦合项 $N : H^s(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ 为

$$N(u) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u^t u^2 dx.$$

显然, 对任意 $y \in \mathbb{R}^3$ 及 $u \in H^s(\mathbb{R}^3)$, 有 $N(u(\cdot+y)) = N(u)$, 且 N 弱下半连续. 此外, 类似于经典的 Brezis-Lieb 引理 ([14]), 我们有如下分离性质.

引理8. *([13]) 设 $2s+2t > 3$, 在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中有 $u_n \rightharpoonup u$ 且 $u_n \to u$ a.e. $x \in \mathbb{R}^3$. 则*

(i) $N(u_n - u) = N(u_n) - N(u) + o(1)$;

(ii) $N'(u_n - u) = N'(u_n) - N'(u) + o(1)$.

把 $\phi = \phi_u^t$ 代入方程组 (1.1)的第一个方程, 得到如下非局部半线性椭圆方程

$$(-\Delta)^s u + \lambda V(x)u + \phi_u^t u = f(x,u) \ \ x \in \mathbb{R}^3,$$

相应的能量泛函 $I_\lambda : H_\lambda \to \mathbb{R}$ 定义为

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \lambda V(x)u^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u^t u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(x,u) dx.$$

注意到如果 $4s+2t \geq 3$, 则有 $2 \leq \frac{12}{3+2t} \leq 2_s^*$, 因此, $H^s(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{\frac{12}{3+2t}}(\mathbb{R}^3)$, 由 Hölder 不等式和

Sobolev 不等式有

$$\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u^t u^2dx \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{\frac{12}{3+2t}}dx\Big)^{\frac{3+2t}{6}}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|\phi_u^t|^{2_t^*}dx\Big)^{\frac{1}{2_t^*}} \leq \mathcal{S}_t^{-\frac{1}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{\frac{12}{3+2t}}dx\Big)^{\frac{3+2t}{6}}\|\phi_u^t\|_{\mathcal{D}^{t,2}}$$
$$\leq C\|u\|_\lambda^2\|\phi_u^t\|_{\mathcal{D}^{t,2}} < \infty.$$

因此, 对任意 $u\in H_\lambda$, 泛函 I_λ 是有意义的, 且 $I_\lambda\in C^1(H_\lambda,\mathbb{R})$. 接下来我们应用变分方法研究 I_λ 的临界点.

3. 定理 1 的证明

本节我们需要用 Nehari 流形的方法寻找 I_λ 的临界点, 并且给出定理 1的证明.

首先, 我们记与 I_λ 相应的 Nehari 流形为

$$\mathcal{N}_\lambda=\{u\in H_\lambda\backslash\{0\}:\langle I_\lambda'(u),u\rangle=0\}.$$

所以对 $u\in\mathcal{N}_\lambda$, 我们有

$$\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2dx+\int_{\mathbb{R}^3}\lambda V(xx)u^2dx+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u^t u^2dx=\int_{\mathbb{R}^3}f(x,u)udx.$$

记

$$c_\lambda:=\inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda}I_\lambda(u).$$

为了找到 (1.1) 的基态解, 我们可以先寻找 (1.1) 的解, 再证明它是 $I_\lambda|_{\mathcal{N}_\lambda}$ 的极小值点. 如果 $\mathcal{N}_\lambda$ 是光滑的流形, 我们利用 $\mathcal{N}_\lambda$ 的微分结构来处理极小化问题, 证明 $I_\lambda|_{\mathcal{N}_\lambda}$ 的极小值点是 I_λ 的临界点. 然而, 在我们的假设下, $\mathcal{N}_\lambda$ 未必光滑. 因此, 我们不能直接在 $\mathcal{N}_\lambda$ 上应用极大极小定理. 为了克服这个困难, 我们将采用在 [15,16] 中使用的技巧来证明 $\mathcal{N}_\lambda$ 仍然是拓扑流形, 它仍然同胚于 H_λ 中的单位球面, 然后我们研究 I_λ 相应临界值的极大极小性质.

引理9. *设位势 V 和函数 f 分别满足 $(V_1)-(V_2)$ 和 $(f_1)-(f_4)$. 则对 $\lambda\geq\lambda^*$, 有下列性质成立:*

(A_1) *对每个 $u\in S_\lambda:=\{u\in H_\lambda:\|u\|_\lambda=1\}$, 令 $h_u:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 为 $h_u(\tau)=I_\lambda(\tau u)$. 则存在唯一的 $\tau_u>0$, 使得在 $(0,\tau_u)$ 中 $h_u'(\tau)>0$, 且在 (τ_u,∞) 中 $h_u'(\tau)<0$. 此外, $I_\lambda(\tau_u u)=\max\limits_{\tau\geq0}I_\lambda(\tau u)$.*

(A_2) *存在与 u 无关的常数 $\sigma>0$, 使得对所有 $u\in S_\lambda$, 有 $\tau_u\geq\sigma$. 此外, 对每个紧集 $\mathcal{W}\subset S_\lambda$, 存在 $C_{\mathcal{W}}>0$, 使得对所有 $u\in\mathcal{W}$ 有 $\tau_u\leq C_{\mathcal{W}}$.*

(A_3) *集合 $\mathcal{N}_\lambda$ 有界且与 0 有距离. 此外, $\mathcal{N}_\lambda$ 在 H_λ 中是闭的.*

(A_4) *$c_\lambda\geq\rho>0$, 这里 $\rho>0$ 不依赖于 λ.*

(A_5) *定义映射 $m_\lambda:S_\lambda\to\mathcal{N}_\lambda$ 为 $m_\lambda(u)=\tau_u u$, 则其是 S_λ 和 $\mathcal{N}_\lambda$ 间的同胚. 此外, $m_\lambda^{-1}(u)=\frac{u}{\|u\|_\lambda}$ 且 $\mathcal{N}_\lambda$ 是拓扑流形.*

证明: (A_1). 易证 $h_u(0)=0$, 当 $\tau>0$ 足够小时 $h_u(\tau)>0$, 且当 $\tau>0$ 足够大时 $h_u(\tau)<0$. 事实

上, 由 $(f_1),(f_2)$ 知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $C_\varepsilon>0$, 使得

$$|f(x,u)|\leq \varepsilon|u|+C_\varepsilon|u|^{p-1},\quad \forall x\in\mathbb{R}^3,u\in\mathbb{R}, \tag{3.1}$$

和

$$|F(x,u)|\leq \frac{\varepsilon}{2}|u|^2+C_\varepsilon|u|^{p},\quad \forall x\in\mathbb{R}^3,u\in\mathbb{R}. \tag{3.2}$$

对每个 $r\in[2,2_s^*]$, 由 Sobolev 嵌入不等式, 有

$$\begin{aligned}I_\lambda(\tau u)&=\frac{\tau^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\big(|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2+\lambda V(x)u^2\big)dx+\frac{\tau^4}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u^t u^2dx-\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)dx\\&\geq\frac{\tau^2}{2}\|u\|_\lambda^2-C\varepsilon\tau^2\|u\|_\lambda^2-C_\varepsilon\tau^p\|u\|_\lambda^p\\&=\frac{1-C\varepsilon}{2}\tau^2\|u\|_\lambda^2-C_\varepsilon\tau^p\|u\|_\lambda^p.\end{aligned}$$

因为 $p>4$, 我们证明了对充分小的 $\tau>0$, 有 $h_u(\tau)>0$.

另一方面,

$$\begin{aligned}h_u(\tau)&=\frac{\tau^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\big(|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2+\lambda V(x)u^2\big)dx+\frac{\tau^4}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u^t u^2dx-\int_{\mathbb{R}^3}F(x,\tau u)dx\\&=\frac{\tau^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\big(|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2+\lambda V(x)u^2\big)dx+\frac{\tau^4}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u^t u^2dx-\tau^4\int_{u\neq0}\frac{F(x,\tau u)}{(\tau u)^4}u^4dx,\end{aligned}$$

由 (f_4) 和 Fatou 引理, 上式右边的最后一个积分当 $\tau\to\infty$ 时趋向于无穷. 因此, 当 $\tau\to\infty$ 时 $h_u(\tau)\to-\infty$.

因为 $h_u\in C^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, 所以存在 h_u 的全局极大值点 $\tau_u>0$ 使得 $h'_u(\tau_u)=0$. 因此, $I'_\lambda(\tau_u u)(\tau_u u)=0$ 且 $\tau_u u\in\mathcal{N}_\lambda$. 故 $\tau_u>0$ 是唯一使得 $h'_u(\tau_u)=0$ 的正数. 若不然, 假设结论不成立, 则存在 $\tau_1>\tau_2>0$ 满足 $h'_u(\tau_1)=h'_u(\tau_2)=0$. 对于 $i=1,2$, 有

$$\tau_i^2\|u\|_\lambda^2+\tau_i^4\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u^t u^2dx=\int_{\mathbb{R}^3}f(x,\tau_i u)\tau_i udx.$$

因此,

$$\frac{\|u\|_\lambda^2}{\tau_i^2}+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u^t u^2dx=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(x,\tau_i u)}{(\tau_i u)^3}u^4dx,$$

这说明

$$(\frac{1}{\tau_1^2}-\frac{1}{\tau_2^2})\|u\|_\lambda^2=\int_{\mathbb{R}^3}(\frac{f(x,\tau_1 u)}{(\tau_1 u)^3}-\frac{f(x,\tau_2 u)}{(\tau_2 u)^3})u^4dx,$$

与 (f_4) 矛盾. 所以 (A_1) 成立.

(A_2). 设 $u\in S_\lambda$, 由 $(f_1),(f_2)$ 和 Sobolev 不等式有

$$\tau_u\leq\int_{\mathbb{R}^3}f(x,\tau_u u)udx\leq\epsilon C\tau_u^2+C_\epsilon\tau_u^p.$$

由上述不等式可知, 存在与 u 无关的常数 $\sigma > 0$, 使得 $\tau_u \geq \sigma$.

设 $\mathcal{W} \subset S_\lambda$ 为紧集. 倘若结论不成立, 则存在 $\{u_n\} \subset \mathcal{W}$, 使得 $\tau_n := \tau_{u_n} \to \infty$. 因为 $\mathcal{W}$ 紧, 故存在 $u \in \mathcal{W}$, 使得 $u_n \to u$ 于 H_ε. 由前证明可知

$$I_\lambda(\tau_n u_n) \to -\infty.$$

另一方面, 由 $v_n := \tau_n u_n \in \mathcal{N}_\lambda$ 和注 1.1, 可以得到

$$\begin{aligned} I_\lambda(v_n) = I_\lambda(v_n) - \frac{1}{4} I'_\lambda(v_n) v_n &= \frac{1}{4}\|v_n\|_\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} f(x, v_n) v_n - F(x, v_n)\right) dx \\ &\geq \frac{1}{4}\|v_n\|_\lambda^2, \end{aligned}$$

矛盾. 因此 (A_2) 成立.

(A_3). 对于 $u \in \mathcal{N}_\lambda$, 由 (3.1) 和 (3.2) 有

$$\|u\|_\lambda^2 \leq C\varepsilon \|u\|_\lambda^2 + C_\varepsilon \|u\|_\lambda^p.$$

故存在 $\kappa > 0$, 使得

$$\|u\|_\lambda \geq \kappa, \quad \forall u \in \mathcal{N}_\lambda. \tag{3.3}$$

因此, $\mathcal{N}_\lambda$ 与 0 有距离, 且 $\mathcal{N}_\lambda$ 在 H_λ 中闭.

(A_4). 对于 $u \in \mathcal{N}_\lambda$, 有

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= I_\lambda(u) - \frac{1}{4} I'_\lambda(u) u \\ &= \frac{1}{4}\|u\|_\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} f(x, u) u - F(x, u)\right) dx \\ &\geq \frac{1}{4}\|u\|_\lambda^2. \end{aligned}$$

再结合 (3.3) 就证明了结论.

(A_5). 首先证明 m_λ 和 m_λ^{-1} 是有意义的. 事实上, 由 (A_1) 知, 对每个 $u \in S_\lambda$, 存在唯一的 $\tau_u > 0$, 使得 $\tau_u u \in \mathcal{N}_\lambda$, 所以存在唯一的 $m_\lambda(u) = \tau_u u \in \mathcal{N}_\lambda$. 因此, $m_\lambda^{-1}(u) = \frac{u}{\|u\|_\lambda} \in S_\lambda$ 有意义且连续. 因为

$$m_\lambda^{-1}(m_\lambda(u)) = m_\lambda^{-1}(\tau_u u) = \frac{\tau_u u}{\tau_u \|u\|_\lambda} = u, \ \forall\ u \in S_\lambda,$$

可知 m_λ 是一个双射.

为证明 $m_\lambda : S_\lambda \to \mathcal{N}_\lambda$ 连续, 设 $\{u_n\} \subset S_\lambda$ 和 $u \in S_\lambda$, 使得 $u_n \to u$ 于 H_λ. 由 (A_2) 知, 在子列意义下, 存在 $\tau_0 > 0$, 使得 $\tau_n := \tau_{u_n} \to \tau_0$. 因为 $\tau_n u_n \in \mathcal{N}_\lambda$, 可得

$$\tau_n^2 \|u_n\|_\lambda^2 + \tau_n^4 \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}^t u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, \tau_n u_n) \tau_n u_n dx, \ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

根据引理 5, 对上式取极限得到

$$\tau_0^2\|u\|_\lambda^2 + \tau_0^4\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u^t u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(x,\tau_0 u)\tau_0 u dx,$$

这得出 $\tau_0 u \in \mathcal{N}_\lambda$ 和 $\tau_u = \tau_0$. 故在 S_λ 上有 $m_\lambda(u_n) \to m_\lambda(u)$. 因此, m_λ^{-1} 和 m_λ 都连续, 所以 (A_5) 成立.

定义泛函 $\Psi_\lambda : S_\lambda \to \mathbb{R}$ 为

$$\Psi_\lambda(u) = I_\lambda(m_\lambda(u)).$$

尽管我们没证明 $\mathcal{N}_\lambda$ 是 C^1 的流形, 但我们仍可以证明 Ψ_λ 是 C^1 的, 且 Ψ_λ 的临界点与 I_λ 的非平凡临界点之间存在一一对应关系.

下面的结果是引理 9 的直接推论. 详情可见 [16]. 为方便读者, 在此对证明做一个简短回顾.

引理10. 设 $(V_1)-(V_2)$ 和 $(f_1)-(f_4)$ 成立, $\lambda \geq \lambda^*$, 则

(B_1) $\Psi_\lambda \in C^1(S_\lambda, \mathbb{R})$ 且

$$\langle \Psi_\lambda'(u), v\rangle = \|m_\lambda(u)\|_\lambda \langle I_\lambda'(m_\lambda(u)), v\rangle, \quad \forall\ v \in T_u S_\lambda = \{v \in H_\lambda : (u,v)_\lambda = 0, \quad \forall u \in S_\lambda\}.$$

(B_2) 若 $\{u_n\}$ 是 Ψ_λ 的 $(PS)_c$ 序列, 则 $\{m_\lambda(u_n)\}$ 是 I_λ 的 $(PS)_c$ 序列. 若 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda$ 是 I_λ 的 $(PS)_c$ 序列, 则 $\{m_\lambda^{-1}(u_n)\}$ 是 Ψ_λ 的 $(PS)_c$ 序列.

(B_3) u 是 Ψ_λ 的临界点当且仅当 $m_\lambda(u)$ 是 I_λ 的临界点. 此外, 相应的临界值一致且

$$\inf_{S_\lambda} \Psi_\lambda = \inf_{\mathcal{N}_\lambda} I_\lambda.$$

证明: (B_1). 设 $u \in S_\lambda$, $v \in H_\lambda$. 由 Ψ_λ 和 t_u 的定义及中值定理可得

$$\begin{aligned}\Psi_\lambda(u+hv) - \Psi_\lambda(u) &= I_\lambda\big(\tau_{u+hv}(u+hv)\big) - I_\lambda(\tau_u u)\\ &\leq I_\lambda\big(\tau_{u+hv}(u+hv)\big) - I_\lambda(\tau_{u+hv} u)\\ &= I_\lambda'\big(\tau_{u+hv}(u+\theta hv)\big)\tau_{u+hv} hv,\end{aligned}$$

其中 $|h|$ 充分小且 $\theta \in (0,1)$. 类似地,

$$\Psi_\lambda(u+hv) - \Psi_\lambda(u) \geq I_\lambda(\tau_u(u+hv)) - I_\lambda(\tau_u u) = I_\lambda'(\tau_u(u+\varsigma hv))\tau_u hv,$$

这里 $\varsigma \in (0,1)$. 由引理 9 可知, 映射 $u \mapsto \tau_u u$ 是连续的, 结合这两个不等式有

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Psi_\lambda(u+hv) - \Psi_\lambda(u)}{h} = \langle \tau_u I_\lambda'(\tau_u u), v\rangle = \|m_\lambda(u)\|_\lambda \langle I_\lambda'(m_\lambda(u)), v\rangle.$$

因为 $I_\lambda \in C^1$, 所以 Ψ_λ 的 Gâteaux 导算子关于 v 是线性有界的, 关于 u 是连续的. 由 [17] 可知,

$\Psi_\lambda \in C^1(S_\lambda, \mathbb{R})$ 且

$$\langle \Psi'_\lambda(u), v\rangle = \|m_\lambda(u)\|_\lambda \langle I'_\lambda(m_\lambda(u)), v\rangle, \quad \forall\ v \in T_u S_\lambda = \{v \in H_\lambda : (u,v)_\lambda = 0, \quad \forall u \in S_\lambda\}.$$

(B_1) 得证.

(B_2). 首先, 我们注意到对于每个 $u \in S_\lambda$, 有 $H_\lambda = T_u S_\lambda \oplus \mathbb{R}u$, 且线性映射 $P : H_\lambda \to T_u S_\lambda$, $P(v + \tau u) = v$ 连续, 即存在 $C > 0$, 使得

$$\|v\|_\lambda \le C\|v + \tau u\|_\lambda, \quad \forall\ u \in S_\lambda, v \in T_u S_\lambda,\ \tau \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

此外, 由 (B_1) 知

$$\|\Psi'_\lambda\| = \sup_{v \in T_u S_\lambda, \|v\|_\lambda = 1} \Psi'_\lambda(u)v = \|w\|_\lambda \sup_{v \in T_u S_\lambda, \|v\|_\lambda = 1} I'_\lambda(w)v, \tag{3.5}$$

其中 $w = m_\lambda(u)$. 由 $w \in \mathcal{N}_\lambda$ 可得

$$I'_\lambda(w)u = I'_\lambda(w)\frac{w}{\|w\|_\lambda} = 0. \tag{3.6}$$

因此, 由 (3.4) 和 (3.6) 可得

$$\|\Psi'_\lambda(u)\| \le \|w\|_\lambda \|I'_\lambda(w)\| \le C\|w\|_\lambda \sup_{v \in T_u S_\lambda \setminus \{0\}} \frac{I'_\lambda(w)v}{\|v\|_\lambda} = C\|\Psi'_\lambda(u)\|,$$

这证明了

$$\|\Psi'_\lambda(u)\| \le \|w\|_\lambda \|I'_\lambda(w)\| \le C\|\Psi'_\lambda(u)\|,\ \forall\ u \in S_\lambda. \tag{3.7}$$

因为 $w \in \mathcal{N}_\lambda$, 我们有 $\|w\| \ge \gamma > 0$. 所以, 结合不等式 (3.7) 和 $I_\lambda(w) = \Psi_\lambda(u)$ 可知 (B_2) 成立.

(B_3). 根据 (3.7) 可得, $\Psi'_\lambda(u) = 0$ 当且仅当 $I'_\lambda(w) = 0$. 再结合 Ψ_λ 的定义可知 (B_3) 成立.

类似于 [16], 有

$$c_\lambda = \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda} I_\lambda(u) = \inf_{u \in H_\lambda \setminus \{0\}} \max_{\tau > 0} I_\lambda(\tau u) = \inf_{u \in S_\lambda} \max_{\tau > 0} I_\lambda(\tau u) > 0.$$

取 $e_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, 显然存在一个不依赖于 λ 的常数 $C_0 > 0$, 使得

$$c_\lambda = \inf_{u \in H_\lambda \setminus \{0\}} \max_{\tau > 0} I_\lambda(\tau u) \le \max_{\tau > 0} I_\lambda(\tau e_0) \le C_0. \tag{3.8}$$

下面研究 I_λ 的极小化序列.

引理11. *在引理 10 的条件之下, 若 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda$ 是 I_λ 的极小化序列, 则 $\{u_n\}$ 在 H_λ 中有界.*

证明: 令 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda$ 是 I_λ 的极小化序列, 即

$$c_\lambda + o_n(1) = \frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}^t u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(x, u_n)dx.$$

上式结合注 1.2 可得

$$\begin{aligned} c_\lambda + o_n(1) &= \frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}^t u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(x, u_n) dx \\ &= \frac{1}{4}\|u_n\|_\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} f(x, u_n) u - F(x, u_n)\right) dx \\ &\geq \frac{1}{4}\|u_n\|_\lambda^2. \end{aligned}$$

所以 $\{u_n\}$ 在 H_λ 中有界.

接下来我们讨论泛函的紧性.

引理12. 在定理 1 的假设下, 如果 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda$ 使得 $I_\lambda(u_n) \to c_\lambda$, 且 $I'_\lambda(u_n) \to 0$, 则存在 $\Lambda > 0$, 使得对所有 $\lambda \geq \Lambda$, $\{u_n\}$ 在 H_λ 中有收敛子列.

证明: 设 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda$ 满足

$$I_\lambda(u_n) \to c_\lambda \quad \text{且} \quad I'_\lambda(u_n) \to 0. \tag{3.9}$$

由引理 11 知 $\{u_n\}$ 在 H_λ 中有界. 在子列意义下, 有

$$\begin{aligned} & u_n \rightharpoonup u \text{ 于 } H_\lambda, \\ & u_n \to u \text{ 于 } L^r_{loc}(\mathbb{R}^3),\ 2 \leq r < 2_s^*, \\ & u_n(x) \to u(x)\ a.e. \text{ 于 } \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{3.10}$$

此外, 下列情形之一成立, 要么

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^3} \int_{B_R(y)} |u_n|^2 dx = 0, \tag{3.11}$$

要么存在 $R, \delta > 0$ 和序列 $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^3$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^2 dx \geq \delta > 0. \tag{3.12}$$

首先, 我们断言 $u \neq 0$. 若不然, 假设 $u = 0$. 接下来证明 (3.11) 和 (3.12) 都不成立, 这就产生矛盾.

若 (3.11) 成立, 由引理 4 知, 对任意 $r \in (2, 2_s^*)$, 在 $L^r(\mathbb{R}^3)$ 中有 $u_n \to 0$. 再由 (3.1), (3.2) 和 (3.10), 可知 $\int_{\mathbb{R}^3} f(x, u_n) u_n dx \to 0$. 由 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda$, 有

$$\begin{aligned} 0 = \langle I'_\lambda(u_n), u_n \rangle &= \|u_n\|_\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}^t u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(x, u_n) u_n dx \\ &= \|u_n\|_\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}^t u_n^2 dx + o_n(1). \end{aligned}$$

所以当 $n\to\infty$ 时, 有 $\|u_n\|_\lambda\to 0$. 这与引理 9 的 (A_3) 矛盾.

若 (3.12) 成立, 由 (3.10) 可知, 当 $n\to\infty$ 时, 有 $|y_n|\to\infty$. 所以, $|B_R(y_n)\cap\{x\in\mathbb{R}^3: V(x)<b\}|\to 0$. 由 Hölder 不等式知

$$\int_{B_R(y_n)\cap\{V<b\}} u_n^2dx\to 0. \tag{3.13}$$

由 (3.8) 和引理 11, 有

$$\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|_\lambda^2\le 4C_0.$$

再结合 (3.12) 和 (3.13), 可得

$$\begin{aligned}4C_0&\ge\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|_\lambda^2\\&\ge\lambda b\limsup_{n\to\infty}\int_{B_R(y_n)\cap\{V\ge b\}}u_n^2dx\\&=\lambda b\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{B_R(y_n)}u_n^2dx-\int_{B_R(y_n)\cap\{V<b\}}u_n^2dx\right)\ge\lambda b\delta.\end{aligned}\tag{3.14}$$

令 $\Lambda:=\max\{\frac{4C_0}{b\delta},\lambda^*\}$, 则有 $\lambda>\frac{4C_0}{b\delta}$, 这与 (3.14) 矛盾.

易证当 $n\to\infty$ 时, 有 $\|u_n\|_\lambda\to\|u\|_\lambda$, 证毕.

定理 1 的证明. 设 $\{w_n\}$ 是 Ψ_λ 的极小化序列. 由 Ekeland 变分原理, 我们不妨假设 $\Psi_\lambda'(w_n)\to 0$. 由引理 10,

$$I_\lambda(u_n)\to c_\lambda\ \text{ 且 }\ I_\lambda'(u_n)\to 0,\quad (n\to\infty)$$

这里 $u_n=m_\lambda(w_n)\in\mathcal{N}_\lambda$. 由引理 11 和 12 知, 存在 $\Lambda>0$, 使得 $\lambda>\Lambda$ 时, 在 H_λ 中有 $u_n\to u$. 所以 u 是 (1.1) 的基态解.

4. 自治问题

由于相应的极限问题的结论在研究方程组 (1.1) 的基态解的渐近性中起着重要作用. 因此, 本节我们首先考虑与 (1.1) 相关的极限问题, 即

$$\begin{cases}(-\Delta)^su+\left(u^2*\frac{1}{|x|^{3-2t}}\right)u=f(x,u) & x\in\ \Omega,\\ u=0 & x\in\mathbb{R}^3\backslash\Omega.\end{cases}\tag{4.1}$$

首先, 我们引入一些分数阶空间知识, 详情见 [1]. 设 $s\in(0,1)$ 是固定的, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是具有光滑边界的开区域. 下面我们记 $\mathcal{Q}=\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{O}$, 其中

$$\mathcal{O}=(\Omega^c\times\Omega^c)\subset\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\ \text{ 且 }\ \Omega^c=\mathbb{R}^3\backslash\Omega.$$

分数阶空间 X 定义为

$$X=\{u\in L^2(\Omega):\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{3+2s}{2}}}\in L^2(\mathcal{Q})\},$$

赋予范数

$$\|u\|_X = \left(\int_\Omega u^2 dx + \int_Q \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{3+2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2}$$

设

$$X_0 = \{u \in X : u = 0 \ a.e. \text{ 于 } \mathbb{R}^3 \backslash \Omega\}.$$

由 [18] 可知

$$\|u\|_{X_0} = \left(\int_Q \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{3+2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}$$

是 X_0 的范数, 与 (4.2) 中定义的普通范数等价. 而且 X_0 是一个 Hilbert 空间, 为了方便起见, 我们用 $\|\cdot\|_0$ 来表示 $\|\cdot\|_{X_0}$.

定义泛函 $I_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ 为

$$I_0(u) = \frac{1}{2} \int_Q |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \frac{1}{4} \int_\Omega \phi_u^t u^2 dx - \int_\Omega F(x,u) dx.$$

我们知道 I_0 的临界点是方程 (4.1) 的弱解. 定义与 I_0 相关的 Nehari 流形为

$$\mathcal{N}_0 = \{u \in X_0 \backslash \{0\} : \langle I_0'(u), u \rangle = 0\}.$$

对于 $u \in \mathcal{N}_0$, 有

$$\int_Q |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx + \int_\Omega \phi_u^t u^2 dx = \int_\Omega f(x,u) u dx.$$

定义 c_0 为

$$c_0 := \inf_{u \in \mathcal{N}_0} I_0(u).$$

类似于引理 9, 可知 $\mathcal{N}_0$ 有以下基本性质.

引理13. 设 f 在 Ω 上满足 $(f_1)-(f_4)$. 则

(A_1) 设 $g_u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 为 $g_u(\tau) = I_0(\tau u)$, 其中 $u \in S_0 := \{u \in X_0 : \|u\|_0 = 1\}$. 则存在唯一的 $\tau_u > 0$, 使得在 $(0, \tau_u)$ 上有 $g_u'(\tau) > 0$, 在 (τ_u, ∞) 上有 $g_u'(\tau) < 0$. 另外, $I_0(\tau_u u) = \max\limits_{\tau \geq 0} I_0(\tau u)$.

(A_2) 存在不依赖于 u 的常数 $\sigma > 0$, 使得对 $u \in S_0$ 有 $\tau_u \geq \sigma$. 进一步, 对每个紧集 $\mathcal{W} \subset S_0$ 有 $C_{\mathcal{W}} > 0$ 使得对所有 $u \in \mathcal{W}$ 有 $\tau_u \leq C_{\mathcal{W}}$.

(A_3) 集合 $\mathcal{N}_0$ 有界且与 0 有距离. 进一步, $\mathcal{N}_0$ 在 X_0 中闭.

(A_4) $c_0 \geq \rho > 0$.

(A_5) 定义映射 $m_0 : S_0 \to \mathcal{N}_0$ 为 $m_0(u) = \tau_u u$, 则其是 S_0 与 $\mathcal{N}_0$ 之间的同胚. 此外, $m_0^{-1}(u) = \frac{u}{\|u\|_0}$ 且 $\mathcal{N}_0$ 是一个拓扑流形.

现在, 我们可以定义约化泛函 $\Psi_0 : S_0 \to \mathbb{R}$ 如下

$$\Psi_0(u) = I_0(m_0(u)).$$

与引理 10 类似, 我们有如下引理.

引理14. 在引理 13 的假设下, 有:

(B_1) $\Psi_0 \in C^1(S_0, \mathbb{R})$ 且

$$\langle \Psi_0'(u), v\rangle = \|m_0(u)\|_0 \langle I_0'(m_0(u)), v\rangle, \quad \forall\ v \in T_u S_0 = \{v \in X_0 : (u, v)_0 = 0, \quad \forall u \in S_0\}.$$

(B_2) 若 $\{u_n\}$ 是 Ψ_0 的 $(PS)_c$ 序列, 则 $\{m_0(u_n)\}$ 是 I_0 的 $(PS)_c$ 序列. 若 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_0$ 是 I_0 的 $(PS)_c$ 序列, 则 $\{m_0^{-1}(u_n)\}$ 是 Ψ_0 的 $(PS)_c$ 序列.

(B_3) u 是 Ψ_0 的临界点当且仅当 $m_0(u)$ 是 I_0 的临界点. 另外, 相应的临界值一致且

$$\inf_{S_0} \Psi_0 = \inf_{\mathcal{N}_0} I_0.$$

由引理 13, 我们注意到:

$$c_0 = \inf_{u \in \mathcal{N}_0} I_0(u) = \inf_{u \in X_0 \setminus \{0\}} \max_{\tau > 0} I_0(\tau u) = \inf_{u \in S_0} \max_{\tau > 0} I_0(\tau u) > 0.$$

接下来我们研究 I_0 的极小化序列.

引理15. 在引理 13 的假设下, 设 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_0$ 是 I_0 的极小化序列, 则 $\{u_n\} \subset X_0$ 有界.

证明: 设 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_0$ 是 I_0 的极小化序列, 即

$$c_0 + o_n(1) = I_0(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|_0^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}^t u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(x, u_n) dx.$$

结合上式和注 1.2 有

$$c_0 + o_n(1) = I_0(u_n) - \frac{1}{4} I_0'(u_n) u_n \geq \frac{1}{4}\|u_n\|_0^2.$$

结论得证.

接下来我们给出方程 (4.1) 的紧性结论.

引理16. 在引理 13 的假设下, 若 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_0$ 使得 $I_0(u_n) \to c_0$ 且 $I_0'(u_n) \to 0$, 则在 H_0 中 $\{u_n\}$ 有收敛子列.

证明: 设 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_0$ 满足

$$I_0(u_n) \to c_0 \quad 且 \quad I_0'(u_n) \to 0. \tag{4.3}$$

由引理 15 知, $\{u_n\}$ 在 X_0 中有界. 在子列意义下, 有

$$\begin{aligned} & u_n \rightharpoonup u \ 于\ X_0, \\ & u_n \to u \ 于\ L^r(\mathbb{R}^3), 2 \leq r < 2_s^*, \\ & u_n(x) \to u(x)\ a.e.\ 于\ \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{4.4}$$

我们断言 $u \neq 0$. 否则, 设 $u = 0$. 引理 4 说明在 $L^r(\mathbb{R}^3)$ 中有 $u_n \to 0$, 其中 $r \in (2, 2_s^*)$. 再根据 (3.1), (3.2) 和 (4.4), 我们推出 $\int_{\mathbb{R}^3} f(x, u_n)u_n dx \to 0$. 由 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_0$, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \langle I_0'(u_n), u_n \rangle \\ &= \|u_n\|_0^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}^t u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(x, u_n)u_n dx \\ &= \|u_n\|_0^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}^t u_n^2 dx + o_n(1). \end{aligned}$$

所以当 $n \to \infty$ 时, $\|u_n\|_0 \to 0$. 这与引理 13 中 (A_3) 矛盾.

易见, 当 $n \to \infty$ 时, 有 $\|u_n\|_0 \to \|u\|_0$, 这样就完成了证明.

现在我们来讨论极限问题 (4.1) 的主要结论.

定理17. *设引理 13 中假设成立. 则问题 (4.1) 存在基态解.*

证明: 设 $\{w_n\}$ 是 Ψ_0 的极小化序列. 由 Ekeland 变分原理, 不妨设 $\Psi_0'(w_n) \to 0$. 则由引理 14 可知

$$I_0(u_n) \to c_0 \quad 且 \quad I_0'(u_n) \to 0,$$

其中 $u_n = m_0(w_n) \in \mathcal{N}_0$. 根据引理 15 和 16, 我们有在 X_0 中 $u_n \to u$. 所以 u 是 (4.1) 的基态解.

进一步, 我们有如下结论.

引理18. *设 $(V_1) - (V_3)$ 和 $(f_1) - (f_4)$ 成立. 则当 $\lambda > 0$ 时, 有 $c_\lambda \leq c_0$.*

证明: 由定理 17, 设 $u \in X_0$ 为问题 (4.1) 的基态解, 则 $c_0 = I_0(u)$. 因此有

$$c_\lambda \leq \max_{\tau \geq 0} I_\lambda(\tau u) = \max_{\tau \geq 0} I_0(\tau u) = I_0(u) = c_0.$$

所以, 对 $\lambda > 0$, 我们有 $c_\lambda \leq c_0$.

5. 基态解的渐近行为

这一节中我们研究问题 (1.1) 的基态解的渐近行为并且给出定理 2 的证明.

定理 2 的证明. 我们下面的证明基本遵循 [3](或 [8]) 中的思路. 对任一序列 $\lambda_n \to \infty$, 令 $u_n := u_{\lambda_n}$ 是定理 1 中给出的 I_{λ_n} 的临界点. 由注 1.2, 可知

$$c_{\lambda_n} + o_n(1) = I_{\lambda_n}(u_n) - \frac{1}{4} I_{\lambda_n}'(u_n)u_n \geq \frac{1}{4}\|u_n\|_{\lambda_n}^2.$$

再结合 (3.8) 可得

$$\sup_{n \geq 1} \|u_n\|_{\lambda_n}^2 \leq C_1, \tag{5.1}$$

其中 C_1 是与 λ_n 无关的常数. 所以, 在子列意义下不妨设

$$\begin{aligned} & u_n \rightharpoonup u_0 \text{ 于 } H_{\lambda_n}, \\ & u_n \to u_0 \text{ 于 } L^r_{loc}(\mathbb{R}^3),\ 2 \le r < 2^*_s, \\ & u_n(x) \to u_0(x)\ a.e. \text{ 于 } \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{5.2}$$

由 Fatou 引理和 (5.1)可得

$$\int_{\mathbb{R}^3} V(x)u_0^2 dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} V(x)u_n^2 dx \le \liminf_{n\to\infty} \frac{\|u_n\|^2_{\lambda_n}}{\lambda_n} = 0,$$

所以 $u_0 = 0$ a.e. 于 $\mathbb{R}^3 \backslash V^{-1}(0)$, 且由条件 (V_3) 知 $u_0 \in X_0$.

现在我们证明在 $L^r(\mathbb{R}^3)$ 中有 $u_n \to u_0$, 其中 $2 < r < 2^*_s$. 否则, 根据引理 4 知, 存在 $\delta > 0$, $\rho > 0$ 和 $x_n \in \mathbb{R}^3$, 使得

$$\int_{B_\rho(x_n)} (u_n - u_0)^2 dx \ge \delta.$$

又因为 $|x_n| \to \infty$, 所以 $|B_\rho(x_n) \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) < b\}| \to 0$. 再由 Hölder 不等式可得

$$\int_{B_\rho(x_n)\cap\{V<b\}} (u_n - u_0)^2 dx \to 0.$$

因此

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2_{\lambda_n} &\ge \lambda_n b \int_{B_\rho(x_n)\cap\{V\ge b\}} |u_n|^2 dx \\ &\ge \lambda_n b \int_{B_\rho(x_n)\cap\{V\ge b\}} |u_n - u_0|^2 dx \\ &= \lambda_n b \Big(\int_{B_\rho(x_n)} |u_n - u_0|^2 dx - \int_{B_\rho(x_n)\cap\{V<b\}} |u_n - u_0|^2 dx \Big) \\ &\to \infty, \end{aligned}$$

这与 (5.1) 矛盾.

然后我们证明在 H 中有 $u_n \to u_0$. 因为 $\langle I'_{\lambda_n}(u_n), u_n\rangle = \langle I'_{\lambda_n}(u_n), u_0\rangle = 0$, 故

$$\|u_n\|^2_{\lambda_n} + \int_{\mathbb{R}^3} \phi^t_{u_n} u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, u_n)u_n dx, \tag{5.3}$$

和

$$\|u_0\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi^t_{u_n} u_n u_0 dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, u_0)u_0 dx + o_n(1). \tag{5.4}$$

注意到, 由引理 7, 8, (3.1) 和 (3.2) 可得

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\phi^t_{u_n} u_n^2 - \phi^t_{u_n} u_n u_0) dx \to 0, \tag{5.5}$$

和

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,u_n)u_n dx \to \int_{\mathbb{R}^3} f(x,u_0)u_0 dx. \tag{5.6}$$

由 (5.3)-(5.6), 有

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{\lambda_n}^2 \le \|u_0\|^2.$$

另一方面, 范数的弱下半连续性表明

$$\|u_0\|^2 \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2 \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{\lambda_n}^2, \tag{5.7}$$

所以在 H 中有 $u_n \to u_0$.

最后, 我们只需证 u_0 是 (4.1) 的基态解. 因为 $\langle I'_{\lambda_n}(u_n), \varphi\rangle = 0$, 对于任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 易证

$$\int_{\mathcal{Q}} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_0 (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi dx + \int_\Omega \phi_{u_0}^t u_0 \varphi dx = \int_\Omega f(x,u_0)\varphi dx,$$

由 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^s(\Omega)$ 中的稠密性, 可知 u_0 是 (4.1) 的弱解. 因为 (3.1), (3.2), (5.3) 成立且 $u_n \ne 0$, 可得

$$\|u_n\|^2 \le \|u_n\|_{\lambda_n}^2 \le C_1 |u_n|_p^p \le C_2 \|u_n\|^p,$$

这表明 $u_0 \ne 0$. 由 (5.7), 可得

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{\lambda_n}^2 = \|u_0\|^2. \tag{5.8}$$

由 (5.8), Fatou 引理, 注 1.2 和引理 18 得到

$$\begin{aligned}
c_0 &\le I_0 - \frac{1}{4}\langle I'_0(u_0), u_0\rangle \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\|u_n\|_{\lambda_n}^2 + \int_{\mathbb{R}^3} (\frac{1}{4} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n))dx \right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(I_{\lambda_n}(u_n) - \frac{1}{4}\langle I'_{\lambda_n}(u_n), u_n\rangle \right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} I_{\lambda_n}(u_n) \\
&\le c_0.
\end{aligned}$$

故 $I_0(u_0) = c_0$. 这样就完成了定理 2 的证明.

参考文献

[1] Di Nezza, E., Palatucci, G. and Valdinoci, E. (2012) Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **136**, 521-573. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2011.12.004

[2] Bartsch, T. and Wang, Z. (1995) Existence and Multiplicity Results for Some Superlinear Elliptic Problems on $\mathbf{R}^N$. *Communications in Partial Differential Equations*, **20**, 1725-1741.

https://doi.org/10.1080/03605309508821149

[3] Bartsch, T., Pankov, A. and Wang, Z. (2001) Nonlinear Schrödinger Equations with Steep Potential Well. *Communications in Contemporary Mathematics*, **3**, 549-569. https://doi.org/10.1142/S0219199701000494

[4] Ding, Y. and Szulkin, A. (2007) Bound States for Semilinear Schrödinger Equations with Sign-Changing Potential. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **29**, 397-419. https://doi.org/10.1007/s00526-006-0071-8

[5] Jiang, Y. and Zhou, H. (2011) Schrödinger-Poisson System with Steep Potential Well. *Journal of Differential Equations*, **251**, 582-608. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.05.006

[6] Sun, J. and Wu, T. (2014) Ground State Solutions for an Indefinite Kirchhoff Type Problem with Steep Potential Well. *Journal of Differential Equations*, **256**, 1771-1792. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.12.006

[7] Ye, Y. and Tang, C. (2015) Existence and Multiplicity of Solutions for Schrödinger-Poisson Equations with Sign-Changing Potential. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **53**, 383-411. https://doi.org/10.1007/s00526-014-0753-6

[8] Zhao, L., Liu, H. and Zhao, F. (2013) Existence and Concentration of Solutions for the Schrödinger-Poisson Equations with Steep Well Potential. *Journal of Differential Equations*, **255**, 1-23. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.03.005

[9] Secchi, S. (2013) Ground State Solutions for Nonlinear Fractional Schrödinger Equations in $\mathbb{R}^N$. *Journal of Mathematical Physics*, **54**, Article ID: 031501. https://doi.org/10.1063/1.4793990

[10] Palatucci, G. and Pisante, A. (2014) Improved Sobolev Embeddings, Profile Decomposition and Concentration-Compactness for Fractional Sobolev Spaces. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **50**, 799-829. https://doi.org/10.1007/s00526-013-0656-y

[11] Benci, V. and Fortunato, D. (1998) An Eigenvalue Problem for the Schrödinger-Maxwell Equations. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **11**, 283-293. https://doi.org/10.12775/TMNA.1998.019

[12] Landkof, N. (1972) Foundations of Modern Potential Theory. Springer-Verlag, New York-Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-65183-0

[13] Teng, K. (2016) Existence of Ground State Solutions for the Nonlinear Fractional Schrödinger-Poisson System with Critical Sobolev Exponent. *Journal of Differential Equations*, **261**, 3061-3106. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.05.022

[14] Brézis, H. and Lieb, E. (1983) A Relation Between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Functionals. *Proceedings of the AMS*, **88**, 486-490. https://doi.org/10.2307/2044999

[15] Szulkin, A. and Weth, T. (2009) Ground State Solutions for Some Indefinite Variational Problems. *Journal of Functional Analysis*, **257**, 3802-3822. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2009.09.013

[16] Szulkin, A. and Weth, T. (2010) The Method of Nehari Manifold. In: Gao, D.Y. and Motreanu, D., Eds., *Handbook of Nonconvex Analysis and Applications*, International Press, Somerville, MA, 597-632.

[17] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1

[18] Bisci, G.M., Radulescu, D. and Servadei, R. (2016) Variational Methods for Nonlocal Fractional Problems. Vol. 162, Cambridge University Press, Cambridge.