Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(5), 1428-1437**
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.105152

Hans汉斯

修理工带休假的两同型部件冷贮备可修系统的指数稳定性

寇玉芳，原文志

太原师范学院数学系，山西 晋中
Email: kou0123coco@163.com, ywzywz123@163.com

收稿日期：2021年4月11日；录用日期：2021年4月25日；发布日期：2021年5月14日

摘 要

本文假设部件工作时间和修理工空闲时间服从指数分布，部件维修时间和修理工休假时间服从一般分布。把系统方程化为*Cauchy*问题，通过C_0半群理论得到系统动态解的性质，再分析算子的性质得到算子的本征值，从而得到修理工带休假的两同型部件冷贮备可修系统的指数稳定性。

关键词

C_0半群，本征值，冷贮备，指数稳定性

Exponential Stability of a Cold Standby Repairable System with Two Identical Components and a Repairman on Vacation

Yufang Kou, Wenzhi Yuan

Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
Email: kou0123coco@163.com, ywzywz123@163.com

Received: Apr. 11th, 2021; accepted: Apr. 25th, 2021; published: May 14th, 2021

Abstract

This paper assumes that component working time and repairman idle time obey exponential distribution, component maintenance time and repairman vacation time obey general distribution. The system equation is transformed into the *Cauchy* problem, the properties of the dynamic solu-

文章引用: 寇玉芳, 原文志. 修理工带休假的两同型部件冷贮备可修系统的指数稳定性[J]. 应用数学进展, 2021, 10(5): 1428-1437. DOI: 10.12677/aam.2021.105152

tion of the system are obtained by the theory of C_0 semigroups, and then the eigenvalues of the operator are obtained by analyzing the properties of the operator, the exponential stability of the cold standby repairable system with two identical components is obtained.

Keywords

C_0 Semigroup, Eigenvalue, Cold Standby, Exponential Stability

1. 引言

冷贮备是当主单元出现问题时，贮备单元才开始运行的系统，贮备期间不发生故障，例如文献[1]。对于冷贮备系统来说，它的性能通常通过系统稳定性来判断例如[2]。

目前多数文章都假设系统发生问题之后能马上维修来讨论系统的稳定性，例如文献[3] [4]。但是实际上，当系统故障时可能由于修理工不一定在场，系统需要一段待处理时间。因此将修理工的休假和空闲等状态考虑到可修系统中是有意义的例如[5]。这类系统大多数采用的是马尔可夫等方法比如文献[6] [7]。

因此文章在文献[7]的基础上讨论修理工带休假的冷贮备可修系统，主要运用 C_0 半群理论，根据系统动态解的性质和算子性质得到系统的指数稳定性。

2. 系统模型

2.1. 基本假设

回顾文献[7]中系统模型：假设部件分别记为 M，N，修理工记为 V：

M，N 的工作时间分布为 $J_1(t)=1-\exp(-\lambda t)$，$t\geq 0$；

V 空闲时间的分布为 $J_2(t)=1-\exp(-\beta t)$，$t\geq 0$；

M，N 修复时间的分布为 $U(t)=\int_0^t u(y)\mathrm{d}y=1-\exp\left(-\int_0^t \mu(y)\mathrm{d}y\right)$；

V 休假时间的分布为 $H(t)=\int_0^t h(x)\mathrm{d}x=1-\exp\left(-\int_0^t \alpha(x)\mathrm{d}x\right)$。

2.2. 系统的状态

状态 0：M 工作，N 贮备，V 空闲。

状态 1：M 工作，N 贮备，V 休假。

状态 2：M 工作，N 故障，V 休假。

状态 3：M 在工作，N 在修理。

状态 4：M，N 都待修，V 休假。

状态 5：M 在修理，N 待修。

2.3. 系统的符号与方程

$X(t)$代表 t 时系统所处状态的一个变量，$Y(t)$代表 t 时系统出现问题时所对应的维修时间。

系统数学方程为

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\lambda+\beta\right)P_0(t)=\int_0^{\infty}P_3(t,y)\mu(y)\mathrm{d}y\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}+\lambda+\alpha(x)\right)P_1(t,x)=0\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}+\lambda+\alpha(x)\right)P_2(t,x)=\lambda P_1(t,x)\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial y}+\lambda+\mu(y)\right)P_3(t,y)=0\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}+\alpha(x)\right)P_4(t,x)=\lambda P_2(t,x)\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial y}+\mu(y)\right)P_5(t,y)=\lambda P_3(t,y)\end{cases}\tag{1}$$

边界条件如下

$$\begin{cases}P_1(t,0)=\beta P_0(t)\\ P_3(t,0)=\lambda P_0(t)+\int_0^{\infty}P_1(t,x)\alpha(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}P_2(t,x)\alpha(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}P_5(t,y)\mu(y)\mathrm{d}y\\ P_5(t,0)=\int_0^{\infty}P_4(t,x)\alpha(x)\mathrm{d}x\\ P_2(t,0)=P_4(t,0)=0\end{cases}\tag{2}$$

初始条件为

$$P_0(0)=1\text{，其余是 }0\tag{3}$$

为了使方程更合理，做以下假设：

(1) $0\le\alpha(x)<\infty,\ 0\le\mu(y)<\infty,\ \int_0^x\alpha(\xi)\mathrm{d}\xi<\infty,\ \int_0^y\mu(\xi)\mathrm{d}\xi<\infty$。

(2) $\int_0^{\infty}\alpha(\xi)\mathrm{d}\xi=\infty,\ \int_0^{\infty}\mu(\xi)\mathrm{d}\xi=\infty$。

(3) $0<C_1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x\alpha(\xi)\mathrm{d}\xi<\infty,\ 0<C_2=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{1}{y}\int_0^y\mu(\xi)\mathrm{d}\xi<\infty$。

选择合适的状态空间

$$\mathrm{X}=\left\{\vec{P}=\left(P_0,P_1(x),P_2(x),P_3(y),P_4(x),P_5(y)\right)^{\mathrm{T}}\middle|P_0\in\mathrm{R},P_i(x)\in\mathrm{L}^1\left(\mathrm{R}^+\right),P_j(y)\in\mathrm{L}^1\left(\mathrm{R}^+\right),i=1,2,4;j=3,5\right\}$$

并且定义范数为

$$\|\vec{P}\|=|P_0|+\|P_1(x)\|+\|P_2(x)\|+\|P_3(y)\|+\|P_4(x)\|+\|P_5(y)\|$$

明显得到 $(\mathrm{X},\|\cdot\|)$ 是一个 *Banach* 空间。

在 X 中分别定义算子 A，B 如下：

$$A=\begin{pmatrix} -(\lambda+\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-(\lambda+\alpha(x)) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-(\lambda+\alpha(x)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}-(\lambda+\mu(y)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\alpha(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu(y) \end{pmatrix}$$

并且算子 A 的定义域为

$$D(A)=\left\{\vec{P}\in \mathrm{X}\left|\frac{\mathrm{d}P_i(x)}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}P_j(y)}{\mathrm{d}y}\in \mathrm{L}^1(\mathrm{R}^+),P_1(0)=\beta P_0(t),\right.\right.$$

$$\left.P_3(t,0)=\lambda P_0(t)+\int_0^{\infty}P_2(t,x)\alpha(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}P_5(t,y)\mu(y)\mathrm{d}y,i=1,2,4;j=3,5\right\}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \int_0^{\infty}\mu(y)\mathrm{d}y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $D(A+B)=D(A)\cap D(B)=D(A)$，$D(A)$ 中 $P_i(x),P_j(y)$ 绝对连续，因此系统方程转化成 *Banach* 空间 X 中的 *Cauchy* 问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}=(A+B)\vec{P}(t),\ t\in[0,\infty) \\ \vec{P}(0)=P_0=(1,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

3. 系统动态解的性质

定义 1 如果对于每一个 $f\in \mathrm{E}$，存在 $g\in \mathrm{O}$，使 $f\le g$，则称 E 的子集 O 在 E 中共尾。

定义 2 [8]设 X 是 Bananch 空间，X 上的有界线性算子半群 $T(t),(t\ge 0)$ 称为有界线性算子强连续半群，如果

$$\lim_{t\to 0}T(t)x=x,\text{对一切}x\in \mathrm{X}\text{成立}$$

X 上的有界线性算子强连续半群简称为 C_0 类半群。

定理 1 [8]设 X 是 Bananch 空间，$T(t)$ 是 X 上一个 C_0 半群。则存在常数 $\omega\ge 0$ 和 $M\ge 1$，使得 $\|T(t)\|\le M\mathrm{e}^{\omega t}$ 对于 $t\ge 0$ 成立。

定理 2 [8] (Lumer-Phillips)若 A 是闭稠定耗散算子，且 $1\in\rho(A)$，则 A 生成一个 C_0 半群 $T(t)$，并且满足 $\|T(t)\|\le 1$。

定理 3 $D(A+B)$ 在 X 中是稠密的。

证明由[9]知，$D(A)$在 X 中是稠密的。而且因为$D(A+B)=D(A)$，从而$D(A+B)$在 X 中稠密。

定理 4 [10]算子$A+B$是预解正算子。

定理 5 算子$A+B$的对偶算子$(A+B)^*$有

$$(A+B)^* Q=\begin{cases}-(\lambda+\beta)Q_0+\beta Q_1(0)+\lambda Q_3(0)\\ \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda-\alpha(x)\right)Q_1(x)+\lambda Q_2(x)+\alpha(x)Q_3(0)\\ \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda-\alpha(x)\right)Q_2(x)+\alpha(x)Q_3(0)+\lambda Q_4(x)\\ \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}-\lambda-\mu(y)\right)Q_3(y)+\mu(y)Q_0+\lambda Q_5(y)\\ \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\alpha(x)\right)Q_4(x)+\alpha(x)Q_5(0)\\ \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}-\mu(y)\right)Q_5(y)+\mu(y)Q_3(0)\end{cases}$$

$$D\left((A+B)^*\right)=\left\{Q\in \mathrm{X}^*\left|\frac{\mathrm{d}Q_i(x)}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}Q_j(y)}{\mathrm{d}y},Q_i(x),Q_j(y)\in \mathrm{L}^\infty\left(\mathrm{R}^+\right),i=1,2,4;j=3,5\right.\right\}$$

证明 任给$P\in D(A+B)$和$Q\in \mathrm{X}^*$，有

$$\begin{aligned}&\langle (A+B)P,Q\rangle\\ &=\left[-(\lambda+\beta)P_0+\int_0^\infty P_3(y)\mu(y)\mathrm{d}y\right]Q_0-\int_0^\infty\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\lambda+\alpha(x)\right)P_1(x)Q_1(x)\mathrm{d}x\\ &\quad-\int_0^\infty\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\lambda+\alpha(x)\right)P_2(x)Q_2(x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty\lambda P_1(x)Q_2(x)\mathrm{d}x\\ &\quad-\int_0^\infty\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}+\lambda+\mu(y)\right)P_3(y)Q_3(y)\mathrm{d}y\\ &\quad-\int_0^\infty\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\alpha(x)\right)P_4(x)Q_4(x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty\lambda P_2(x)Q_4(x)\mathrm{d}x\\ &\quad-\int_0^\infty\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}+\mu(y)\right)P_5(y)Q_5(y)\mathrm{d}y+\int_0^\infty\lambda P_3(y)Q_5(y)\mathrm{d}y\\ &=\left[-(\lambda+\beta)Q_0+\beta Q_1(0)+\lambda Q_3(0)\right]P_0\\ &\quad+\int_0^\infty\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda-\alpha(x)\right)Q_1(x)+\lambda Q_2(x)\right]P_1(x)\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_0^\infty\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda-\alpha(x)\right)Q_2(x)+\alpha(x)Q_3(0)+\lambda Q_4(x)\right]P_2(x)\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_0^\infty\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}-\lambda-\mu(y)\right)Q_3(y)+\mu(y)Q_0+\lambda Q_5(y)\right]P_3(y)\mathrm{d}y\\ &\quad+\int_0^\infty\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\alpha(x)\right)Q_4(x)+\alpha(x)Q_5(0)\right]P_4(x)\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_0^\infty\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}-\mu(y)\right)Q_5(y)+\mu(y)Q_3(0)\right]P_5(y)\mathrm{d}y\\ &=\left\langle P,(A+B)^*Q\right\rangle\end{aligned}$$

定理 6 $A+B$ 生成正的压缩 C_0 半群 $T(t)$。

证明

$$X=\left\{\vec{P}\in R\times L^1\left(R^+\right)\times L^1\left(R^+\right)\middle|\left\|\vec{P}\right\|=\left|P_0\right|+\left\|P_i\left(x\right)\right\|_{L^1\left(R^+\right)}+\left\|P_j\left(y\right)\right\|_{L^1\left(R^+\right)},i=1,2,4;j=3,5\right\}$$

$$X^*=\left\{\vec{Q}\in R\times L^\infty\left(R^+\right)\times L^\infty\left(R^+\right)\middle|\left\|\vec{Q}\right\|=\max\left\{\left|Q_0\right|,\left\|Q_i\left(x\right)\right\|_{L^\infty\left(R^+\right)},\left\|Q_j\left(y\right)\right\|_{L^\infty\left(R^+\right)}i=1,2,4;j=3,5\right\}\right\}$$

X^* 的正锥

$$X_+^*=X^*\cap\left\{Q=\left(Q_0,Q_1,Q_2,Q_3,Q_4,Q_5\right)\middle|Q_0\ge 0,Q_i\left(x\right),Q_j\left(y\right)\ge 0,i=1,2,4;j=3,5\right\}$$

$$D\left(\left(A+B\right)^*\right)=\left\{\vec{Q}\in X^*\middle|\frac{dQ_i\left(x\right)}{dx},\frac{dQ_j\left(y\right)}{dy}\in L^\infty\left(R^+\right),Q_i\left(x\right),Q_j\left(y\right)\in L^\infty\left(R^+\right)\text{绝对连续},i=1,2,4;j=3,5\right\}$$

$$D\left(\left(A+B\right)^*\right)_+=X_+^*\cap D\left(\left(A+B\right)^*\right)$$

从而

$$\forall\vec{f}=\left(f_0,f_i\left(x\right),f_j\left(y\right)\right)^T\in X_+^*$$

$$\left\|\vec{f}\right\|=\max\left\{\left|f_0\right|,\left\|f_i\left(x\right)\right\|_{L^1\left(R^+\right)},\left\|f_j\left(y\right)\right\|_{L^1\left(R^+\right)}\right\}$$

因此

$$\left\|\vec{f}\right\|\ge\left|f_0\right|,\left\|\vec{f}\right\|\ge f_i\left(x\right),\left\|\vec{f}\right\|\ge f_j\left(y\right),x\ge 0,y\ge 0$$

又因为 $1(x),1(y)\in L^\infty\left(R^+\right)$ 且绝对连续，而且 $\frac{d}{dx}1(x),\frac{d}{dx}1(y)\in L^\infty\left(R^+\right)$

对于

$$\left\|\vec{g}\right\|=\left(\left|f_0\right|,\left\|\vec{f}\right\|1(x),\left\|\vec{f}\right\|1(x),\left\|\vec{f}\right\|1(y),\left\|\vec{f}\right\|1(x),\left\|\vec{f}\right\|1(y)\right)\in D\left(\left(A+B\right)^*\right)_+$$

$$\left\|\vec{f}\right\|-f_0\ge 0,\left\|\vec{f}\right\|1(x)-f_i\left(x\right)\ge 0,\left\|\vec{f}\right\|1(y)-f_j\left(y\right)\ge 0,x\ge 0,y\ge 0$$

有 $\vec{g}-\vec{f}\ge 0$ 也就是 $\vec{f}\le\vec{g}$。因此根据定义 1 有，在 X_+^* 中任选一个 $\vec{f}$，存在 $\vec{g}\in D\left(\left(A+B\right)^*\right)_+$ 使 $\vec{f}\le\vec{g}$，即 $D\left(\left(A+B\right)^*\right)_+$ 在 X_+^* 中共尾。而且 $A+B$ 是稠定的，再由定理 4，因此算子 $A+B$ 生成了正的 C_0 半群 $T(t)$。

定理 7 系统存在非负时间解 $P(t,\cdot)$，而且是唯一的，并且满足 $\left\|P(t,\cdot)\right\|=1,\forall t\in[0,\infty)$。

证明 根据定理 6 可知，系统存在时间依赖解 $P(t,\cdot)$，而且唯一非负，还可以表示成 $\left\|P(t,\cdot)\right\|=T(t)P_0,\forall t\in[0,\infty)$。又由 $P(t,\cdot)$ 满足方程组(1)，从而有 $\frac{d\left\|P(t,\cdot)\right\|}{dt}=0$，所以 $\left\|P(t,\cdot)\right\|=\left\|T(t)P_0\right\|=\left\|P_0\right\|=1,\forall t\in[0,\infty)$。

4. 算子的性质

定义 3 如果算子 $A+B$ 是半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，那么增长界

$$\omega\left(A+B\right)=\inf\left\{\omega\in R\middle|\exists M\ge 1,s.t.\ \forall t\ge 0,\left\|T(t)\right\|\le Me^{\omega t}\right\}$$

定义 4 算子 $A+B$ 的谱上界 $s\left(A+B\right)=\inf\left\{\omega\in R\middle|\left(\omega,\infty\right)\subseteq\rho\left(A+B\right)\right\}$

定理 8 算子 $A+B$ 的增长界 $\omega(A+B)=0$。

证明

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_0(t)=-(\lambda+\beta)P_0(t)+\int_0^{\infty}P_3(t,y)\mu(y)\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial t}P_1(t,x)=-\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+\lambda+\alpha(x)\right)P_1(t,x)\\ \dfrac{\partial}{\partial t}P_2(t,x)=-\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+\lambda+\alpha(x)\right)P_2(t,x)+\lambda P_1(t,x)\\ \dfrac{\partial}{\partial t}P_3(t,y)=-\left(\dfrac{\partial}{\partial y}+\lambda+\mu(y)\right)P_3(t,y)\\ \dfrac{\partial}{\partial t}P_4(t,x)=-\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+\alpha(x)\right)P_4(t,x)+\lambda P_2(t,x)\\ \dfrac{\partial}{\partial t}P_5(t,y)=-\left(\dfrac{\partial}{\partial y}+\mu(y)\right)P_5(t,y)+\lambda P_3(t,y)\end{cases}\tag{4}$$

把(4)从 0 到 $+\infty$ 积分，代入(2)，(3)，同时把每个式子左右分别相加有 $\dfrac{\mathrm{d}\|\vec{P}\|}{\mathrm{d}t}=0$。

所以方程组对应的半群是非扩张的，由初始条件 $P_0(0)=1$ 可得 $\|T(t)\|=1$。因此半群的增长界 $\omega(A+B)=0$。

定理 9 算子 $A+B$ 的谱上界 $s(A+B)=0$。

证明由定理 6 和[11]中的定理 2.2，有 $s(A+B)=\omega(A+B)=0$。

5. 系统的指数稳定性

定理 10 $\{r\in\mathrm{C}\,|\,\mathrm{Re}\,r>0\text{或}r=ia,a\in\mathrm{R}\backslash\{0\}\}$ 包含于算子 $A+B$ 的预解集 $\rho(A+B)$ 中。

证明 对任意 $G=\{g_0,g_1(x),g_2(x),g_3(y),g_4(x),g_5(y)\}$，考虑算子方程 $(rI-(A+B))P=G$，得到方程组

$$\begin{cases}(r+\lambda+\beta)P_0=g_0+\int_0^{\infty}P_3(t,y)\mu(y)\mathrm{d}y\\ \dfrac{\mathrm{d}P_1(x)}{\mathrm{d}x}+(r+\lambda+\alpha(x))P_1(x)=g_1(x)\\ \dfrac{\mathrm{d}P_2(x)}{\mathrm{d}x}+(r+\lambda+\alpha(x))P_2(x)=g_2(x)+\lambda P_1(x)\\ \dfrac{\mathrm{d}P_3(y)}{\mathrm{d}y}+(r+\lambda+\mu(y))P_3(y)=g_3(y)\\ \dfrac{\mathrm{d}P_4(x)}{\mathrm{d}x}+(r+\alpha(x))P_4(x)=g_4(x)+\lambda P_2(x)\\ \dfrac{\mathrm{d}P_5(y)}{\mathrm{d}y}+(r+\mu(y))P_5(y)=g_5(y)+\lambda P_3(y)\end{cases}\tag{5}$$

边界条件为

$$\begin{cases}P_1(0)=\beta P_0\\ P_3(0)=\lambda P_0(t)+\int_0^{\infty}P_1(x)\alpha(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}P_2(x)\alpha(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}P_5(y)\mu(y)\mathrm{d}y\\ P_5(0)=\int_0^{\infty}P_4(x)\alpha(x)\mathrm{d}x\\ P_2(0)=P_4(0)=0\end{cases}\tag{6}$$

解方程组(5)可得

$$\begin{cases} P_1(x)=P_1(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x(r+\lambda+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}+G_1(x) \\ P_2(x)=\lambda xP_1(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x(r+\lambda+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}+G_2(x) \\ P_3(y)=P_3(0)\mathrm{e}^{-\int_0^y(r+\lambda+\mu(\sigma))\mathrm{d}\sigma}+G_3(y) \\ P_4(x)=\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)P_1(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x(r+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}+G_4(x) \\ P_5(y)=P_5(0)\mathrm{e}^{-\int_0^y(r+\mu(\sigma))\mathrm{d}\sigma}+\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda y}\right)P_3(0)\mathrm{e}^{-\int_0^y(r+\mu(\sigma))\mathrm{d}\sigma}+G_5(y) \end{cases} \tag{7}$$

其中

$$G_1(x)=\int_0^x g_1(\tau)\mathrm{e}^{-\int_\tau^x(r+\lambda+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\tau$$
$$G_2(x)=\int_0^x\left(g_2(\tau)+\lambda G_1(\tau)\right)\mathrm{e}^{-\int_\tau^x(r+\lambda+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\tau$$
$$G_3(y)=\int_0^y g_3(\tau)\mathrm{e}^{-\int_\tau^y(r+\lambda+\mu(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\tau$$
$$G_4(x)=\int_0^x\left(g_4(\tau)+\lambda G_2(\tau)\right)\mathrm{e}^{-\int_\tau^x(r+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\tau$$
$$G_5(y)=\int_0^y\left(g_5(\tau)+\lambda G_3(\tau)\right)\mathrm{e}^{-\int_\tau^y(r+\mu(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\tau$$

令

$$F_1=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\int_0^x(r+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}x$$
$$F_2=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\int_0^y(r+\mu(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}y$$
$$F_3=\int_0^\infty \mu(y)\mathrm{e}^{-\int_0^y(r+\lambda+\mu(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}y$$
$$F_4=\lambda\int_0^\infty \alpha(x)\mathrm{e}^{-\int_0^x(r+\lambda+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}x$$
$$F_5=\int_0^\infty \alpha(x)\mathrm{e}^{-\int_0^x(r+\lambda+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}x$$
$$W_0=g_0+\int_0^\infty \mu(y)G_3(y)\mathrm{d}y$$
$$W_1=0$$
$$W_2=\int_0^\infty \mu(y)G_5(y)\mathrm{d}y$$
$$W_3=\int_0^\infty \alpha(x)G_4(x)\mathrm{d}x$$

将(7)代入$(r+\lambda+\beta)P_0=g_0+\int_0^\infty P_3(y)\mu(y)\mathrm{d}y$及边界条件(6)中，得到如下矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} r+\lambda+\beta & 0 & -F_3 & 0 \\ -\beta & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & F_5-F_4 & rF_2+F_3 & rF_2-1 \\ 0 & rF_1+F_4+F_5-1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1(0) \\ P_3(0) \\ P_5(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix}$$

令

$$K=\begin{bmatrix} r+\lambda+\beta & 0 & -F_3 & 0 \\ -\beta & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & F_5-F_4 & rF_2+F_3 & rF_2-1 \\ 0 & rF_1+F_4+F_5-1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

下证矩阵 K 是非奇异的。

由于

$$|-\beta|+|-\lambda|=\lambda+\beta<r+\lambda+\beta$$

$$|F_5-F_4|+|rF_1+F_4+F_5-1|=1-rF_1=\int_0^\infty \alpha(x)\mathrm{e}^{-\int_0^x(r+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}x<1$$

$$|-F_3|=F_3<rF_2+F_3$$

$$|rF_2-1|=1-rF_2=\int_0^\infty \mu(y)\mathrm{e}^{-\int_0^y(r+\mu(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}y<1$$

所以矩阵 K 不可约且按列对角占优，$\det K\neq 0$。从而得到方程组 $(rI-(A+B))P=G$ 有唯一的解，说明 $rI-(A+B)$ 是满射。又 $rI-(A+B)$ 是闭的，且有定理 3，所以根据逆算子定理，$\left[rI-(A+B)\right]^{-1}$ 是存在的而且是线性有界的。因此 $\{r\in \mathrm{C} \mid \operatorname{Re} r>0 \text{或} r=ia, a\in \mathrm{R}\backslash\{0\}\}$ 时，$r\in\rho(A+B)$。

定理 11 0 是 $A+B$ 的本征值，而且几何重数为 1。

证明 K 的行列式

$$|K|=\begin{vmatrix} r+\lambda+\beta & 0 & -F_3 & 0 \\ -\beta & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & F_5-F_4 & rF_2+F_3 & rF_2-1 \\ 0 & rF_1+F_4+F_5-1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=r\begin{vmatrix} 1 & F_1 & F_2 & F_2 \\ -\beta & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & F_5-F_4 & rF_2+F_3 & rF_2-1 \\ 0 & rF_1+F_4+F_5-1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=r\beta\left[r^2F_1F_2(F_1-F_2)+F_3(F_1F_4+F_1F_5-F_2F_4-F_2F_5)+F_2(F_3+F_4+F_5)\right.$$
$$\left.+r\left(F_1^2F_3+F_1F_2F_4+F_1F_2F_5+F_2^2-F_1F_2F_3-F_2^2F_4-F_2^2F_5\right)\right]+r\left[(r+\lambda)F_2+F_3\right]$$

令 $|K|=0$，则上式中 $r=0$ 或者

$$\beta\left[r^2F_1F_2(F_1-F_2)+F_3(F_1F_4+F_1F_5-F_2F_4-F_2F_5)+F_2(F_3+F_4+F_5)\right.$$
$$\left.+r\left(F_1^2F_3+F_1F_2F_4+F_1F_2F_5+F_2^2-F_1F_2F_3-F_2^2F_4-F_2^2F_5\right)\right]+r\left[(r+\lambda)F_2+F_3\right]=0$$

因此 0 是系统算子的本征值，$P=(P_0,P_1(x),P_2(x),P_3(y),P_4(x),P_5(y))$ 是对应本向量。令

$$\hat{P}=\frac{P}{\|P\|},\ \hat{P}=\left(\hat{P}_1(x),\hat{P}_2(x),\hat{P}_3(y),\hat{P}_4(x),\hat{P}_5(y)\right)$$

是 $A+B$ 本征值所对应的非负的本征向量，而且是系统的非负稳态解，显然 0 在 X 中的几何重数为 1。

定理 12 $A+B$ 的本征值是 0，代数重数是 1，而且 $(1,1,1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 0 对应的特征向量。

证明 用反证法：想要得到 0 的代数重数是 1，要证明 0 的代数指数为 1。假定 0 在 X 中的代数指数是 2，那么存在 Z 使 $(A+B)Z=\hat{P}$。因此讨论 $(A+B)^*Q=0$。根据定理 5 有

$$\begin{cases} -(\lambda+\beta)Q_0+\beta Q_1(0)+\lambda Q_3(0)=0 \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda-\alpha(x)\right)Q_1(x)+\lambda Q_2(x)+\alpha(x)Q_3(0)=0 \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda-\alpha(x)\right)Q_2(x)+\alpha(x)Q_3(0)+\lambda Q_4(x)=0 \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}-\lambda-\mu(y)\right)Q_3(y)+\mu(y)Q_0+\lambda Q_5(y)=0 \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\alpha(x)\right)Q_4(x)+\alpha(x)Q_5(0)=0 \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}-\mu(y)\right)Q_5(y)+\mu(y)Q_3(0)=0 \end{cases} \tag{8}$$

解上述方程组有 $Q_0=Q_1(x)=Q_2(x)=Q_3(y)=Q_4(x)=Q_5(y)$，容易验证 $Q\in D\left((A+B)^*\right)$，而且 0 为 $(A+B)^*$ 的本征值，令 $Q^*=(1,1,1,1,1,1)$，有 Q^* 为 0 对应的本向量，并且几何重数是 1，即 $(A+B)^*Q^*=0$，$\left\langle \hat{P},Q^*\right\rangle=\left\langle (A+B)Z,Q^*\right\rangle=\left\langle Z,(A+B)^*Q^*\right\rangle=0$，但是 $\left\langle \hat{P},Q^*\right\rangle=1$，存在矛盾，因此 0 是本征值，而且代数重数为 1。

定理 13 系统(1)的时间依赖解是有强收敛性的，并且收敛于稳态解，也就是 $\lim\limits_{t\to\infty}P(t,\cdot)=\hat{P}$，而且 $\left\|P(t,\cdot)-\hat{P}\right\|\le M\mathrm{e}^{-\lambda t}$，其中 M 为某个适当的常数。

参考文献

[1] 曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论[M]. 北京: 科学出版社, 1986.

[2] 任寒景, 张玉峰, 张欣. 含同原因故障和一冷储备部件的系统稳定性[J]. 应用泛函分析学报, 2016, 18(1): 41-49.

[3] 赵玉荣, 刘诗, 等. 两相同部件冷贮备可修复系统算子性质[J]. 数学实践与认识, 2014, 44(2): 262-270.

[4] 凤宝林. 一类两个相同部件并联的可修系统指数稳定性[J]. 牡丹江师范学院学报(自然科学版), 2013(4): 6-8.

[5] 唐应辉, 刘晓云. 修理工带休假的单部件可修系统的可靠性分析[J]. 自动化学报, 2004, 30(3): 466-470.

[6] 陈永燕, 郑海鹰. 冷贮备可修系统的一个新模型及其可靠性分析[J]. 浙江大学学报(理学版), 2011, 38(3): 274-278.

[7] 杨会崇. 修理工带休假的两同型部件冷贮备可修系统[J]. 数学理论与应用, 2009, 29(1): 23-28.

[8] Pazy, A. (1983) Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1

[9] 郭卫华. 两相同部件温储备可修的人机系统解的性质分析[J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(7): 88-95.

[10] Zhang, X. (2015) Reliability Analysis of a Cold Standby Repairable System with Repairman Extra Work. *Journal of Systems Science and Complexity*, **28**, 1015-1032. https://doi.org/10.1007/s11424-015-4081-5

[11] Arendt, W. (1987) Resolvent Positive Operators. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **s3-54**, 321-349. https://doi.org/10.1112/plms/s3-54.2.321