Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(6), 2137-2150
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.106223

一类带有临界增长的广义拟线性Schrödinger-Poisson系统基态变号解的存在性

褚海慧

兰州理工大学理学院，甘肃 兰州
Email: 731310928@qq.com

收稿日期：2021年5月21日；录用日期：2021年6月9日；发布日期：2021年6月24日

摘 要

在这篇文章当中，我们研究了如下Schrödinger-Poisson系统

$$\begin{cases} -div(g^2(u)\nabla u)+g(u)g'(u)|\nabla u|^2+\lambda\phi G(u)g(u)=\mu f(u)+|G(u)|^4 G(u)g(u),\ x\in\Omega, \\ -\Delta\phi=G^2(u),\ x\in\Omega, \\ u,\phi=0,\ x\in\Omega, \end{cases}$$

其中$\Omega\in\mathbb{R}^3$是边界$\partial\Omega$光滑的有界区域，$\mu,\lambda>0$。对f,g施加适当的条件，若μ足够大，通过利用约束变分方法和形变引理，得到了该系统对于每一个$\lambda>0$都有相对应的基态变号解v_λ，并且基态变号解的能量严格大于二倍基态解的能量。

关键词

Schrödinger-Poisson系统，变号解，非局部项，变分法

Existence of the Ground State Sign-Changing Solution for a Class of Generalized Quasilinear Schrödinger-Poisson System

Haihui Chu

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu
Email: 731310928@qq.com

文章引用: 褚海慧. 一类带有临界增长的广义拟线性Schrödinger-Poisson系统基态变号解的存在性[J]. 应用数学进展, 2021, 10(6): 2137-2150. DOI: 10.12677/aam.2021.106223

Received: May 21st, 2021; accepted: Jun. 9th, 2021; published: Jun. 24th, 2021

Abstract

In this paper, we study the following Schrödinger-Poisson system

$$\begin{cases} -div(g^2(u)\nabla u)+g(u)g'(u)|\nabla u|^2+\lambda\phi G(u)g(u)=\mu f(u)+|G(u)|^4 G(u)g(u),\ x\in\Omega, \\ -\Delta\phi=G^2(u),\ x\in\Omega, \\ u,\phi=0,\ x\in\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega\in\mathbb{R}^3$ is a bounded domain with a smooth boundary $\partial\Omega$, $\mu,\lambda>0$, under suitable conditions of f,g, by using constraint variational method and the quantitative deformation lemma, if μ is large enough, we obtain a ground state sign-changing solution v_λ to this problem for each $\lambda>0$, and its energy is strictly large than twice that of the ground state solutions.

Keywords

Schrödinger-Poisson System, Sign-Changing Solutions, Nonlocal Term, Variation Methods

1. 引言

本文研究如下 Schrödinger-Poisson 系统，

$$\begin{cases} -div\left(g^2(u)\nabla u\right)+g(u)g'(u)|\nabla u|^2+\lambda\phi G(u)g(u) \\ =\mu f(u)+|G(u)|^4 G(u)g(u), x\in\Omega, \\ -\Delta\phi=G^2(u), x\in\Omega, \\ u,\phi=0, x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中有界光滑区域 $\mu,\lambda>0$，函数 $f\in C^1(R,R)$， $g\in C^1(R,R^+)$。

一方面，系统(1.1)源于如下拟线性薛定谔方程

$$i\partial_t z=-\Delta z+W(x)z-k(x,|z|)-\Delta l\left(|z|^2\right)l'\left(|z|^2\right)z, \tag{1.2}$$

其中 $z:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$, $W:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 是势函数， $l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $k:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是合适函数。对于各种类型的 l，可以演绎成不同的 Schrödinger 方程，且具有不同的物理意义。特别的，在文献[1] [2]中，若 $l(s)=s$，则方程(1.2)表示的是流体力学超流体膜方程。对于更多的物理背景，可以参考文献[3] [4] [5] [6]。设 $z(t,x)=\exp(-iEt)u(x)$，其中 $E\in\mathbb{R}$ 且 u 是实函数，则方程(1.2)即为如下椭圆型方程，

$$-\Delta u+V(x)u-\Delta l\left(u^2\right)l'\left(u^2\right)u=h(x,u),\ x\in\mathbb{R}^N. \tag{1.3}$$

如果取 $g^2(u)=1+\frac{\left[\left(l^2(u)\right)'\right]^2}{2}$，则方程(1.3)为如下拟线性椭圆方程[7]，

$$-div\left(g^2(u)\nabla u\right)+g(u)g'(u)|\nabla u|^2+V(x)u=h(x,u),\ x\in\mathbb{R}^N. \tag{1.4}$$

另一方面，系统(1.1)源于如下的 Schrödinger-Poisson 系统，

$$\begin{cases}-\Delta u+V(x)u+\lambda\phi u=f(u),\ x\in\mathbb{R}^3,\\ -\Delta\phi=u^2,\ x\in\mathbb{R}^3.\end{cases} \tag{1.5}$$

系统(1.5)来自带有时间变量的 Schrödinger-Poisson 系统在物理学被用来描述量子粒子和自身运动所产生的电磁场的相互作用[8] [9] [10] [11]。由于系统(1.5)中含有 $\varphi_u u$ 这一项，表明(1.5)不是一个逐点成立的等式，称 $\varphi_u u$ 为非局部项。非局部项的出现让问题变得更加有趣。近年来，系统(1.5)引起了广大学者的关注，尤其是正解，多解，变号解，基态解和半经典解的存在性，具体可以参考文献[12]-[20]。

在文献[17]中，当 $f(u)=|u|^{p-1}u$ 时，运用约束变分方法结合 Brouwer 度理论，Wang 和 Zhou 证明了系统(1.5)对于所有的 $\lambda>0$ 有一个极小能量变号解。在文献[20]中，运用约束极小变分方法和形变引理，Shuai 和 Wang 证明了(1.5)变号解的存在性，并且得到了系统(1.5)变号解的能量严格大于二倍基态解的能量。在文献[21]中，当 $f(u)$ 在原点附近满足线性增长而在无穷远处满足 3 次线性增长条件下，运用变号 Nehari 流形的技巧，Zhong 和 Tang 证明了系统(1.5)极小能量变号解的存在性和渐近行为。

在文献[22]中，Wang，Zhang 和 Guan 研究了如下临界 Schrödinger-Poisson 系统，

$$\begin{cases}-\Delta u+V(x)u+\lambda\phi u=|u|^4u+\mu f(u),\ x\in\mathbb{Z}^3,\\ -\Delta\phi=u^2,\ x\in\mathbb{R}^3,\end{cases} \tag{1.6}$$

其中 $V(x)$ 是光滑函数，$\mu,\lambda>0$。通过对非线性 f 施加适当的条件，当参数 μ 充分大的时候，运用约束变分方法和形变引理，作者证明了系统(1.6)极小能量变号解的存在性和能量特征。

最近，在文献[23]中，Zhu，Li 和 Liang 研究了如下的广义 Schrödinger-Poisson 系统，

$$\begin{cases}-div\left(g^2(u)\nabla u\right)+g(u)g'(u)|\nabla u|^2+V(x)u\\ +\mu\phi G(u)g((u))=K(x)f(u),\ x\in\mathbb{R}^3,\\ -\Delta\phi=G^2(u),\ x\in\mathbb{R}^3.\end{cases} \tag{1.7}$$

当势在无穷远处消失时，作者运用山路定理证明了系统(1.7)基态解的存在性。随后，在文献[24]中，Chen，Tang 和 Cheng 利用一些新的分析技巧和 Non-Nehari 流形方法获得了系统(1.7)基态变号解的存在性和能量特征。

受上述工作尤其是文献[17] [20] [21] [22] [24]的启发，自然的考虑对于系统(1.7)而言能不能在临界条件下讨论其变号解问题，即如何讨论系统(1.1)基态变号解的存在性？

对于函数 f,g，我们假设 $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$，$g\in C^1\left(\mathbb{R},\mathbb{R}^+\right)$ 满足下列条件：

(F_1) $\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)}{g(t)G^3(t)}=0$；

(F_2) 存在 $q\in(2,6)$ 使得 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{g(t)G^{q-1}(t)}=0$；

(F$_3$) $\dfrac{f(t)}{g(t)G^3(t)}$ 是关于 $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 的增函数。

设 $H_0^1(\Omega)$ 是标准的 Hilbert 空间，其上的范数为 $\|u\|^2=\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x$。注意到，对任意的 $u\in H_0^1(\Omega)$，记 ϕ_u 是 $-\Delta\phi=u^2$ 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 中的唯一解，且

$$\phi_u(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{R^3}\frac{u^2(x)}{|x-y|}\mathrm{d}y.$$

任意的 $u\in H_0^1(\Omega)$，如果 $G(u)\in H_0^1(\Omega)$，则 $\phi_{G(u)}$ 是 $-\Delta\phi=G^2(u)$ 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 中的弱解，且

$$\phi_{G(u)}(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{R^3}\frac{G^2(u(y))}{|x-y|}\mathrm{d}y,\ a.e.x\in\mathbb{R}^3.$$

将 $\phi_{G(u)}$ 带入(1.1)式，系统(1.1)转化为关于 u 的微分方程，其相对应的能量泛函定义为

$$J_\lambda^\mu(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega g^2(u)|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{4}\int_\Omega\phi_{G(u)}G^2(u)\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_\Omega|G(u)|^6\mathrm{d}x.$$

因为 $\int_\Omega g^2(u)|\nabla u|^2\mathrm{d}x$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 不能很好的定义，为了克服这个困难，Shen 和 Wang [18]对其进行了变量替换

$$u=G^{-1}(v),\text{且 }G(u)=\int_0^u g(t)\mathrm{d}t,\ \forall v\in H_0^1(\Omega),$$

则

$$\int_\Omega g^2(u)|\nabla u|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega g^2\left(G^{-1}(v)\right)\left|\nabla G^{-1}(v)\right|^2\mathrm{d}x:=\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x<\infty$$

则系统(1.1)相对应的能量泛函为，

$$J_\lambda^\mu(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{g}^2\left(G^{-1}(v)\right)\left|\nabla G^{-1}(v)\right|^2\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{4}\int_\Omega\phi_v v^2\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega F\left(G^{-1}(v)\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_\Omega|v|^6\mathrm{d}x,\ x\in\Omega. \tag{1.8}$$

如果 $v\in C^2(\Omega)$ 是(1.8)的临界点，则 $u=G^{-1}(v)\in C^2(\Omega)$ 是系统(1.1)的经典解。为了得到(1.8)的临界点，我们只需要寻找如下系统的弱解，

$$\begin{cases}-\Delta v+\lambda\phi v=\mu\dfrac{f\left(G^{-1}(v)\right)}{g\left(G^{-1}(v)\right)}+|v|^4v,\ x\in\Omega,\\ -\Delta\phi=v^2,x\in\Omega,\\ v,\phi=0,x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{1.9}$$

因此 $v\in H_0^1(\Omega)$ 是系统(1.9)的弱解当且仅当

$$\int_\Omega\nabla v\nabla\varphi\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega\phi_v v\varphi\mathrm{d}x=\mu\int_\Omega\frac{f\left(G^{-1}(v)\right)}{g\left(G^{-1}(v)\right)}\varphi\mathrm{d}x+\int_\Omega|v|^4v\varphi\mathrm{d}x,\ \forall\varphi\in H_0^1(\Omega).$$

为使问题变得简单，我们将系统(1.9)写成如下的形式，

$$\begin{cases} -\Delta v+\lambda\phi v=\mu\tilde{f}+|v|^4 v, x\in\Omega, \\ -\Delta\phi=v^2, x\in\Omega, \\ v,\phi=0, x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

其中 $\tilde{f}(v)=\dfrac{f\left(G^{-1}(v)\right)}{g\left(G^{-1}(v)\right)}$, $\tilde{F}(v)=\int_0^v \tilde{f}(t)\mathrm{d}t=\int_0^v \dfrac{f\left(G^{-1}(t)\right)}{g\left(G^{-1}(t)\right)}\mathrm{d}t$.

与(1.10)相对应的能量泛函为：

$$J_\lambda^\mu(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{4}\int_\Omega \phi_v v^2\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega \tilde{F}(v)\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_\Omega |v|^6\,\mathrm{d}x,\ x\in\Omega, \tag{1.11}$$

并且 $J_\lambda^\mu(v)$ 的 Fréchet 导数为，

$$\left\langle \left(J_\lambda^\mu\right)',\psi\right\rangle=\int_\Omega \nabla v\nabla\psi\,\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega \phi_v v\psi\,\mathrm{d}x-\int_\Omega \tilde{f}(v)\psi\,\mathrm{d}x-\int_\Omega |v|^4 v\psi\,\mathrm{d}x,\forall\psi\in H_0^1(\Omega). \tag{1.12}$$

令

$$M_\lambda^\mu=\left\{v\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\},v^\pm\neq 0,\left\langle\left(J_\lambda^\mu\right)'(v),v^\pm\right\rangle=0\right\},$$

$$N_\lambda^\mu=\left\{v\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}\mid\left\langle\left(J_\lambda^\mu\right)'(v),v\right\rangle=0\right\}.$$

主要结果如下：

定理 1.1 如果系统(1.10)满足条件(f_1)~(f_3)，则存在 $\mu^*>0$ 对任意的 $\mu\geq\mu^*$ 系统(1.10)有一个极小能量变号解 v_λ，它有两个变号区域，且满足 $J_\lambda^\mu(v_\lambda)=\inf\limits_{v\in M_\lambda^\mu} J_\lambda^\mu(v)=c_\lambda^\mu$。

定理 1.2 如果系统(1.10)满足条件(f_1)~(f_3)，则存在 $\mu^{**}>0$ 对任意的 $\mu\geq\mu^{**}$，$c^*>0$ 是可达的，并且 $J_\lambda^\mu(v_\lambda)>2c^*$，其中 $c^*=\inf\limits_{v\in N_\lambda^\mu} J_\lambda^\mu(v)$，$v_\lambda$ 是定理 1.1 中的极小能量变号解。

2. 几个重要的引理

引理 2.1. 若条件(F_1)~(F_3)成立，则有：

(f_1) $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\tilde{f}}{s^3}=0$；

(f_2) $\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{\tilde{f}}{s^{q-1}}=0$；

(f_3) $\dfrac{\tilde{f}}{|s|^3}$ 是关于 $s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 的增函数。

证明： 令 $s=G(t)$，可以得到，

$$\lim_{s\to 0}\frac{\tilde{f}}{s^3}=\lim_{s\to 0}\frac{f\left(G^{-1}(s)\right)}{g\left(G^{-1}(s)\right)s^3}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)G^3(t)}=0,$$

所以条件(f_1)成立。

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\tilde{f}}{s^{q-1}}=\lim_{s\to 0}\frac{f\left(G^{-1}(s)\right)}{g\left(G^{-1}(s)\right)s^{q-1}}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)G^{q-1}(t)}=0,$$

所以条件(f$_2$)成立。

$$\frac{\tilde{f}}{|s|^3}=\frac{f\left(G^{-1}(s)\right)}{g\left(G^{-1}(s)\right)|s|^3}=\frac{f(t)}{g(t)G^3(t)},$$

所以条件(f$_3$)成立。

引理 2.2 [10]. 对任意的$v\in H_0^1(\Omega)$，有下列性质：

1) 存在$C>0$使得$\int_\Omega \phi_v v^2\mathrm{d}x\le C\|v\|^4$，$\forall v\in H_0^1(\Omega)$；

2) $\phi_v\ge 0,\ \forall v\in H_0^1(\Omega)$；

3) $\phi_{tv}=t^2\phi_v,\ \forall t>0,\ v\in H_0^1(\Omega)$；

4) 如果$v_n \underset{弱}{\rightarrow} \mathrm{v}$ 在$H_0^1(\Omega)$，则$\phi_{v_n}\underset{弱}{\rightarrow}\phi_v$ 在$H_0^1(\Omega)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \phi_{v_n}v_n^2\mathrm{d}x=\int_\Omega \phi_v v^2\mathrm{d}x.$$

令$v\in H_0^1(\Omega)$且$v^\pm\ne 0$，定义函数$\psi_v:[0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$和映射$W_v:[0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^2$如下：

$$\psi_v(s,t)=J_\lambda^\mu\left(sv^++tv^-\right),\ W_v(s,t)=\left(\left\langle\left(J_\lambda^\mu\right)'\left(sv^++tv^-\right),sv^+\right\rangle,\left\langle\left(J_\lambda^\mu\right)'\left(sv^++tv^-\right),tv^-\right\rangle\right)$$

引理 2.3. 假如系统(1.10)满足条件(f$_1$)~(f$_3$)，如果$v\in H_0^1(\Omega)$且$v^\pm\ne 0$，则ψ_v有以下两条性质：

1) (s,t)关于s，$t>0$是ψ_v的临界点当且仅当$sv^++tv^-\in M_\lambda^\mu$；

2) 函数ψ_v关于$(0,\infty)\times(0,\infty)$有唯一的临界点$(s_v,t_v)$，也是$\psi_v$在$[0,\infty)\times[0,\infty)$唯一的最大值点；而且，如果$\left\langle\left(J_\lambda^\mu\right)'(v),v^\pm\right\rangle\le 0$，则$0<s_v$，$t_v\le 1$。

证明：引理 2.3 与文献[17] [22]证明类似，这里就不再详细证明了。

引理 2.4. 若$c_\lambda^\mu=\inf\limits_{v\in M_\lambda^\mu}J_\lambda^\mu(v)$，则可以得到

$$\lim_{\mu\to\infty}c_\lambda^\mu=0.$$

证明：引理 2.4 与文献[22]证明过程类似，这里不再详细介绍。

引理 2.5 存在$\mu^*>0$使得$\mu\ge\mu^*$，下确界c_λ^μ是可达的。

证明：根据c_λ^μ的定义，存在极小化序列$\{v_n\}\subset \mathrm{M}_\lambda^\mu$使得

$$\lim_{n\to\infty}J_\lambda^\mu(v_n)=c_\lambda^\mu.$$

显然地，$v\in H_0^1(\Omega)\{v_n\}$在$H_0^1(\Omega)$里是有界的，存在$\{v_n\}$的子列，不妨仍用$\{v_n\}$表示，存在使得$v_n\rightharpoonup v$。

因为$H_0^1(\Omega)\to L^p(\Omega)$是紧嵌入，所以对于$p\in(2,6)$，有

$$v_n\to v\text{ 在 }L^p(\Omega)\text{上，}$$

$$v_n(x)\to v(x)\text{ 几乎处处都在 }x\in\Omega\text{ 上。}$$

因此，

$$v_n^\pm\rightharpoonup v^\pm\text{ 在 }H_0^1(\Omega)\text{ 上，}$$

$$v_n^\pm\to v^\pm\text{ 在 }L^p(\Omega)\text{ 上，}$$

$$v_n^\pm\to v^\pm\text{ 几乎处处都在 }x\in\Omega\text{ 上。}$$

记 $\beta := \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$，其中 $S := \inf_{v\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|v\|^2}{\left(\int_\Omega |v|^6 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}}$。

根据引理 2.4，存在 $\mu^* > 0$ 使得 $\mu \geq \mu^*$，$c_\lambda^\mu < \beta$。固定 $\mu \geq \mu^*$，由引理 2.3 对于任意的 $s,t \geq 0$ 有

$$J_\lambda^\mu\left(sv_n^+ + tv_n^-\right) \leq J_\lambda^\mu\left(v_n\right).$$

因此，通过 Brezis-Lieb 引理，Fatou 引理，得到

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} J_\lambda^\mu\left(sv_n^+ + tv_n^-\right) \\
&= \frac{s^2}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\left\|v_n^+ - v^+\right\|^2 + \left\|v^+\right\|^2\right) + \frac{t^2}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\left\|v_n^- - v^-\right\|^2 + \left\|v^-\right\|^2\right) \\
&\quad + \frac{\lambda s^4}{4}\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega \phi_{v_n^+}\left|v_n^+\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda t^4}{4}\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega \phi_{v_n^-}\left|v_n^-\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\quad - \frac{s^6}{6}\lim_{n\to\infty}\left(\left|v_n^+ - v^+\right|_6^6 + \left|v^+\right|_6^6\right) + \frac{t^6}{6}\lim_{n\to\infty}\left(\left|v_n^- - v^-\right|_6^6 + \left|v^-\right|_6^6\right) - \mu\int_\Omega \tilde{F}\left(su^+\right)\mathrm{d}x - \mu\int_\Omega \tilde{F}\left(tv^-\right)\mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{\lambda s^2t^2}{4}\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega \phi_{v_n^+}\left|v_n^-\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda s^2t^2}{4}\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega \phi_{v_n^-}\left|v_n^+\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\geq J_\lambda^\mu\left(sv^+ + tv^-\right) + \frac{s^2}{2}\lim_{n\to\infty}\left\|v_n^+ - v^+\right\|^2 + \frac{t^2}{2}\lim_{n\to\infty}\left\|v_n^- - v^-\right\|^2 \\
&\quad - \frac{s^6}{6}\lim_{n\to\infty}\left|v_n^+ - v^+\right|_6^6 - \frac{t^6}{6}\lim_{n\to\infty}\left|v_n^- - v^-\right|_6^6 \\
&\geq J_\lambda^\mu\left(sv^+ + tv^-\right) + \frac{s^2}{2}A_1 - \frac{s^6}{6}B_1 + \frac{t^2}{2}A_2 - \frac{t^6}{6}B_2,
\end{aligned}$$

其中，

$$A_1 = \lim_{n\to\infty}\left\|v_n^+ - v^+\right\|^2,\ A_2 = \lim_{n\to\infty}\left\|v_n^- - v^-\right\|^2,$$

$$B_1 = \lim_{n\to\infty}\left|v_n^+ - v^+\right|_6^6,\ B_2 = \lim_{n\to\infty}\left|v_n^- - v^-\right|_6^6.$$

按照上述事实，对任意的 $s \geq 0$，$t \geq 0$，可以得到

$$J_\lambda^\mu\left(sv^+ + tv^-\right) + \frac{s^2}{2}A_1 - \frac{s^6}{6}B_1 + \frac{t^2}{2}A_2 - \frac{t^6}{6}B_2 \leq c_\lambda^\mu \tag{2.1}$$

首先，证明 $v^+ \neq 0$。

因为 $v^- \neq 0$ 的证明过程与 $v^+ \neq 0$ 一样，所以我们只需证明 $v^+ \neq 0$。不妨假设 $v^+ = 0$，分两种情况进行讨论。

第一种情况：$B_1 = 0$。

当 $A_1 = 0$，也就是，$v_n{}^+ \to v^+$ 在 $H_0^1(\Omega)$。在引理 2.3，我们得到 $\left\|v^+\right\| > 0$，与我们的假设相矛盾。当 $A_1 > 0$，按照(2.1)，对任意的 $s \geq 0$，则有 $\frac{s^2}{2}A_1 \leq c_\lambda^\mu$ 这是不可能的，得到矛盾。

第二种情况：$B_1 > 0$。

根据 S 的定义，推出

$$\beta = \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{A_1}{\left(B_1\right)^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

并且利用微分法，可以得到$(s,0)$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{A_1}{(B_1)^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\max_{s\ge0}\left\{\frac{s^2}{2}A_1-\frac{s^6}{6}B_1\right\}.$$

由于$c_\lambda^\mu<\beta$，根据(2.1)，就有

$$\beta\le\max_{s\ge0}\left\{\frac{s^2}{2}A_1-\frac{s^6}{6}B_1\right\}<\beta,$$

产生矛盾。

从上面的两种情况中，证明了$v^\pm\ne0$。

其次，证明：$B_1=B_2=0$。

因为$B_2=0$证明方法一样，所以只需证明$B_1=0$。不妨假设$B_1>0$，分两种情况进行讨论。

第一种情况：$B_2>0$。

设$\tilde{s}$和$\tilde{t}$满足

$$\frac{\tilde{s}^2}{2}A_1-\frac{\tilde{s}^6}{6}B_1=\max_{s\ge0}\left\{\frac{s^2}{2}A_1-\frac{s^6}{6}B_1\right\},$$

$$\frac{\tilde{t}^2}{2}A_2-\frac{\tilde{t}^6}{6}B_2=\max_{t\ge0}\left\{\frac{t^2}{2}A_2-\frac{t^6}{6}B_2\right\}.$$

按照$[0,\tilde{s}]\times[0,\tilde{t}]$是闭集且$\psi_v$是连续的，则存在$(s_v,t_v)\in[0,\tilde{s}]\times[0,\tilde{t}]$使得

$$\psi_v(s_v,t_v)=\max_{(s,t)\in[0,\tilde{s}]\times[0,\tilde{t}]}\psi_v(s,t).$$

接下来，证明$(s_v,t_v)\in(0,\tilde{s})\times(0,\tilde{t})$。

可以看出来如果t足够小，就可以得到对任意的$s\in[0,\tilde{s}]$

$$\psi_v(s,0)=J_\lambda^\mu(sv^+)<J_\lambda^\mu(sv^+)+J_\lambda^\mu(tv^-)\le J_\lambda^\mu(sv^++tv^-)=\psi_v(s,t),$$

因此，存在$t_0\in[0,\tilde{t}]$使得对所有的$s\in[0,\tilde{s}]$，

$$\psi_v(s,0)\le\psi_v(s,t_0)$$

即，当$0\le s\le\tilde{s}$时，不是ψ_v的最大值点。因此$(s_v,t_v)\notin[0,\tilde{s}]\times\{0\}$。同理，可以得$(s_v,t_v)\notin\{0\}\times[0,\tilde{t}]$。

从另一方面来说，很容易证明$s\in(0,\tilde{s}]$，$t\in(0,\tilde{t}]$

$$\frac{s^2}{2}A_1-\frac{t^6}{6}B_1>0,\tag{2.2}$$

$$\frac{t^2}{2}A_2-\frac{t^6}{6}B_2>0,\tag{2.3}$$

则对于任意的$s\in[0,\tilde{s}]$和任意的$t\in[0,\tilde{t}]$，有

$$\beta\le\frac{\tilde{s}^2}{2}A_1-\frac{\tilde{s}^6}{6}B_1+\frac{t^2}{2}A_2-\frac{t^6}{6}B_2,$$

$$\beta\le\frac{\tilde{t}^2}{2}A_2-\frac{\tilde{t}^6}{6}B_2+\frac{s^2}{2}A_1-\frac{s^6}{6}B_1,$$

因此，按照(2.1)，则对于所有的 $s\in[0,\tilde{s}]$， $t\in[0,\tilde{t}]$，

$$\psi_v(s,\tilde{t})\le 0,\ \psi_v(\tilde{s},t)\le 0\,,$$

因此，$(s_v,t_v)\notin\{\tilde{s}\}\times[0,\tilde{t}]$和$(s_v,t_v)\notin[0,\tilde{s}]\times\{\tilde{t}\}$。

综上所述，得到$(s_v,t_v)\in(0,\tilde{s})\times(0,\tilde{t})$。由引理 2.3 知$(s_v,t_v)$是$\psi_v$的临界点。因此， $s_vv^+ + t_vv^- \in\mathcal{M}_\lambda^\mu$。

所以，综合(2.1)，(2.2)和(2.3)，就得出

$$\begin{aligned} c_\lambda^\mu &\ge J_\lambda^\mu(s_vv^+ + t_vv^-)+\frac{s_v^2}{2}A_1-\frac{s_v^6}{6}B_1+\frac{t_v^2}{2}A_2-\frac{t_v^6}{6}B_2 \\ &\ge J_\lambda^\mu(s_vv^+ + t_vv^-) \\ &\ge c_\lambda^\mu \end{aligned}$$

产生矛盾，即第一种情况不成立。

第二种情况： $B_2=0$。

在这种情况下，只需证明最值点在$[0,\tilde{s}]\times[0,\infty)$里面。因为存在$t_0\in[0,\infty)$，对于任意的$(s,t)\in[0,\tilde{s}]\times[t_0,\infty)$使得$J_\lambda^\mu(sv^+ + tv^-)\le 0$，所以，这有$(s_v,t_v)\in[0,\tilde{s}]\times[0,\infty)$满足

$$\psi_v(s_v,t_v)=\max_{(s,t)\in[0,\tilde{s}]\times[0,\infty)}\psi_v(s,t)\,.$$

接下来，证明$(s_v,t_v)\in(0,\tilde{s})\times(0,\infty)$。

对于 $s\in[0,\tilde{s}]$且t是足够小，显然有$\psi_v(s,0)<\psi_v(s,t)$，因此有$(s_v,t_v)\notin[0,\tilde{s}]\times\{0\}$。

与此同时，对于$t\in[0,\infty)$且s足够小时， $\psi_v(0,t)<\psi_v(s,t)$，可以得出$(s_v,t_v)\notin\{0\}\times[0,\infty)$。

从另一方面来看，显然对任意的$t\in[0,\infty)$

$$\beta\le\frac{\tilde{s}^2}{2}A_1-\frac{\tilde{s}^6}{6}B_1+\frac{t^2}{2}A_2\,,$$

即对任意的$t\in[0,\infty)$，有$\psi_v(\tilde{s},t)\le 0$。所以$(s_v,t_v)\notin\{\tilde{s}\}\times[0,\infty)$。通过分析可知$(s_v,t_v)\in(0,\tilde{s})\times(0,\infty)$。也就是说，$(s_v,t_v)$是$\psi_v$关于$[0,\tilde{s}]\times[0,\infty)$内部的极大值点。因此$s_vv^+ + t_vv^-\in\mathcal{M}_\lambda^\mu$。

因此，根据(2.2)，有

$$\begin{aligned} c_\lambda^\mu &\ge J_\lambda^\mu(s_vv^+ + t_vv^-)+\frac{s_v^2}{2}A_1-\frac{s_u^6}{6}B_1+\frac{t_v^2}{2}A_2 \\ &\ge J_\lambda^\mu(s_vv^+ + t_vv^-) \\ &\ge c_\lambda^\mu \end{aligned}$$

这样就得出矛盾，即第二种情况不成立。

所以，从上面的讨论中，可以得到$B_1=B_2=0$。

最后证明c_λ^μ是可达的。

对于$v^\pm\ne 0$，根据引理 2.3，存在$s_v,t_v>0$使得$\tilde{v}:=s_vv^+ + t_vv^-\in\mathcal{M}_\lambda^\mu$。此外，这里我们很容易证明

$$\left\langle\left(J_\lambda^\mu\right)'(v),v^\pm\right\rangle\le 0$$

因此$0<s_v,\ t_v<1$。

因为$v_n\in\mathcal{M}_\lambda^\mu$，结合条件($f_1$)和($f_3$)， $B_1=B_2=0$和范数在$H_0^1(\Omega)$是弱下半连续的，可得

$$
\begin{aligned}
c_\lambda^\mu &\le J_\lambda^\mu(\tilde{v})-\frac{1}{4}\left\langle\left(J_\lambda^\mu\right)'(\tilde{v}),\tilde{v}\right\rangle \\
&=\frac{1}{4}\|\tilde{v}\|^2+\frac{1}{12}|\tilde{v}|_6^6+\frac{\mu}{4}\int_\Omega\left[\tilde{f}(\tilde{u})\tilde{v}-4\tilde{F}(\tilde{v})\right]\mathrm{d}x \\
&=\frac{1}{4}\left(\left\|s_v v^+\right\|^2+\left\|t_v v^-\right\|^2\right)+\frac{1}{12}\left(\left|s_v v^+\right|_6^6+\left|t_v v^-\right|_6^6\right)+\frac{\mu}{4}\int_\Omega\left[\tilde{f}\left(s_v v^+\right)\left(s_v v^+\right)-4\tilde{F}\left(s_v v^+\right)\right]\mathrm{d}x \\
&\quad+\frac{\mu}{4}\int_\Omega\left[\tilde{f}\left(t_v v^-\right)\left(t_v v^-\right)-4\tilde{F}\left(t_v v^-\right)\right]\mathrm{d}x \\
&\le\frac{1}{4}\|v\|^2+\frac{1}{12}|v|_6^6+\frac{\mu}{4}\int_\Omega\left[\tilde{f}(v)v-4\tilde{F}(v)\right]\mathrm{d}x \\
&\le\liminf_{n\to\infty}\left[J_\lambda^\mu(v_n)-\frac{1}{4}\left\langle\left(J_\lambda^\mu\right)'(v_n),v_n\right\rangle\right] \\
&\le\liminf_{n\to\infty}J_\lambda^\mu(v_n) \\
&=c_\lambda^\mu
\end{aligned}
$$

所以，$s_v=t_v=1$，并且当 $v_\lambda:=v^++v^-\in\mathcal{M}_\lambda^\mu$，$c_\lambda^\mu$ 是可达的。

3. 主要结果的证明

定理 1.1 的证明

反证法，若 $\left(J_\lambda^\mu\right)'(v_\lambda)\ne0$，则存在 $\delta>0$ 和 $\theta>0$ 使得

$$\left\|\left(J_\lambda^\mu\right)'(v)\right\|\ge\theta,\ \forall\|v-v_\lambda\|\le3\delta.$$

因为 $v_\lambda\in\mathrm{M}_\lambda^\mu$，根据引理 2.3，对于任意的 $(s,t)\in(R_+\times R_+)\backslash(1,1)$ 有

$$J_\lambda^\mu\left(sv_\lambda^++tv_\lambda^-\right)<J_\lambda^\mu\left(v_\lambda^++v_\lambda^-\right)=c_\lambda^\mu,\tag{3.1}$$

选取 $\sigma\in\left(0,\min\left\{1/3,\frac{\delta}{\sqrt{2}\|v_\lambda\|}\right\}\right)$，令 $D:=(1-\sigma,1+\sigma)\times(1-\sigma,1+\sigma)$ 和 $g(s,t)=sv_\lambda^++tv_\lambda^\mu$，$(s,t)\in D$。根据(3.1)，可以证明

$$\bar{c}_\lambda^\mu:=\max_{\partial D}J\circ g<c_\lambda^\mu.\tag{3.2}$$

设 $\varepsilon:=\min\left\{\left(c_\lambda^\mu-\bar{c}_\lambda^\mu\right)/2,\theta\delta/8\right\}$ 和 $S_\delta:=B(v_\lambda,\delta)$，根据形变引理，存在一个形变 $\eta\in C\left([0,1]\times H_0^1(\Omega),H_0^1(\Omega)\right)$ 满足

1) $\eta(1,v)=v$，若 $v\notin\left(J_\lambda^\mu\right)^{-1}\left(\left[c_\lambda^\mu-2\varepsilon,c_\lambda^\mu+2\varepsilon\right]\right)\cap S_{2\delta}$；

2) $\eta\left(1,\left(J_\lambda^\mu\right)^{c_\lambda^\mu+\varepsilon}\cap S_\delta\right)\subset\left(J_\lambda^\mu\right)^{c_\lambda^\mu-\varepsilon}$；

3) $J_\lambda^\mu\left(\eta(1,v)\right)\le J_\lambda^\mu(v)$，对所有的 $v\in H_0^1(\Omega)$。

首先，需要证明

$$\max_{(s,t)\in D}J_\lambda^\mu\left(\eta\left(1,g(s,t)\right)\right)<c_\lambda^\mu.\tag{3.3}$$

事实上，由引理 2.3，可得 $J_\lambda^\mu\left(g(s,t)\right)\le c_\lambda^\mu<c_\lambda^\mu+\varepsilon$。即 $g(s,t)\in\left(J_\lambda^\mu\right)^{c_\lambda^\mu+\varepsilon}$。

另一方面，因为

$$\begin{aligned}\|g(s,t)-v_\lambda\|^2 &= \|(s-1)v_\lambda^+ + (t-1)v_\lambda^-\|^2\\ &\le 2\left((s-1)^2\|v_\lambda^+\|^2 + (t-1)\|v_\lambda^-\|^2\right)\\ &\le 2\sigma^2\|v_\lambda\|^2 < \delta^2,\end{aligned}$$

所以对于任意的$(s,t)\in\bar{D}$， $g(s,t)\in S_\delta$。因此，根据(b)，可以得到$I_\lambda^\mu\left(\eta(1,g(s,t))\right)<c_\lambda^\mu-\varepsilon$，所以(3.3)成立。

下面我们证明$\eta(1,g(D))\cap \mathrm{M}_\lambda^\mu \ne \Phi$。

设$h(s,t):=\eta(1,g(s,t))$，

$$\begin{aligned}\psi_0(s,t) &:= \left(\left\langle \left(J_\lambda^\mu\right)'(g(s,t)),v_\lambda^+\right\rangle,\left\langle \left(J_\lambda^\mu\right)'(g(s,t)),v_\lambda^-\right\rangle\right)\\ &:= \left(\left\langle \left(J_\lambda^\mu\right)'(sv_\lambda^+ + tv_\lambda^-),v_\lambda^+\right\rangle,\left\langle \left(J_\lambda^\mu\right)'(sv_\lambda^+ + tv_\lambda^-),v_\lambda^-\right\rangle\right)\\ &:= \left(\phi_v^1(s,t),\phi_v^2(s,t)\right).\end{aligned}$$

和

$$\psi_1(s,t):=\left(\frac{1}{s}\left\langle \left(J_\lambda^\mu\right)'(h(s,t)),(h(s,t))^+\right\rangle,\frac{1}{t}\left\langle \left(J_\lambda^\mu\right)'(h(s,t)),(h(s,t))^-\right\rangle\right).$$

直接计算可以得到：

$$\left.\frac{\partial\varphi_v^1(s,t)}{\partial s}\right|_{(1,1)} = \|v_\lambda^+\|^2 + 3\lambda\int_\Omega \phi_{v_\lambda^+}|v_\lambda^+|^2\,\mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega \phi_{v_\lambda^-}|v_\lambda^+|^2\,\mathrm{d}x - 5|v_\lambda^+|_6^6 - \mu\int_\Omega \tilde{f}'(v_\lambda^+)(v_\lambda^+)^2\,\mathrm{d}x$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_v^1(s,t)}{\partial t}\right|_{(1,1)} = 2\lambda\int_\Omega \phi_{v_\lambda^-}|v_\lambda^+|^2\,\mathrm{d}x,\quad \left.\frac{\partial\varphi_v^2(s,t)}{\partial s}\right|_{(1,1)} = 2\lambda\int_\Omega \phi_{v_\lambda^+}|v_\lambda^-|^2\,\mathrm{d}x,$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_v^2(s,t)}{\partial t}\right|_{(1,1)} = \|v_\lambda^-\|^2 + 3\lambda\int_\Omega \phi_{v_\lambda^-}|v_\lambda^-|^2\,\mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega \phi_{v_\lambda^+}|v_\lambda^-|^2\,\mathrm{d}x - 5|v_\lambda^-|_6^6 - \mu\int_\Omega \tilde{f}'(v_\lambda^-)(v_\lambda^-)^2\,\mathrm{d}x$$

令

$$M=\begin{vmatrix}\left.\frac{\partial\varphi_v^1(s,t)}{\partial s}\right|_{(1,1)} & \left.\frac{\partial\varphi_v^2(s,t)}{\partial s}\right|_{(1,1)}\\ \left.\frac{\partial\varphi_v^1(s,t)}{\partial t}\right|_{(1,1)} & \left.\frac{\partial\varphi_v^2(s,t)}{\partial t}\right|_{(1,1)}\end{vmatrix}.$$

根据条件(f_3)，若$s\ne 0$，有 $\tilde{f}'(s)s^2-3\tilde{f}(s)s>0$。

因为$v_\lambda\in \mathrm{M}_\lambda^\mu$，可以得到$\det M>0$

因为$\psi_0(s,t)$是连续可微的且(1,1)是ψ_0唯一的孤立推出零点，通过度理论，可以推出$\deg(\psi_0,D,0)=1$。

因此，结合(3.2)和(a)，可知在∂D上， $g(s,t)=h(s,t)$。所以，可以得到$\deg(\psi_1,D,0)=1$。因此，存在$(s_0,t_0)\in D$， $\psi_1(s_0,t_0)=0$。所以$\eta(1,g(s_0,t_0))=h(s_0,t_0)\in \mathrm{M}_\lambda^\mu$，这与(3.33)矛盾。

从上面的讨论中，得到了v_λ是(1.10)的变号解。

最后，证明v_λ有两个变号区域。不妨假设

$$v_\lambda = v_1 + v_2 + v_3$$

且

$$v_i \neq 0,\ v_1 \geq 0,\ v_2 \leq 0,\ \sup pt(v_i) \cap \sup pt(v_j) = \Phi,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,3,$$

和

$$\left\langle \left(J_\lambda^\mu\right)'(v_\lambda), v_i \right\rangle = 0,\ i = 1,2,3.$$

设 $v := v_1 + v_2$，则 $v^+ = v_1,\ v^- = v_2$，即 $v^\pm \neq 0$。那么，存在唯一一对正实数 (s_v, t_v) 使得 $s_v v_1 + t_v v_2 \in \mathrm{M}_\lambda^\mu$。就得到

$$J_\lambda^\mu\left(s_v v_1 + t_v v_2\right) \geq c_\lambda^\mu.$$

根据 $\left\langle \left(J_\lambda^\mu\right)'(v_\lambda), v_i \right\rangle = 0$，得到 $\left\langle \left(J_\lambda^\mu\right)'(v), v^\pm \right\rangle < 0$。

因此，利用引理 2.3，有

$$(s_v, t_v) \in (0,1] \times (0,1].$$

另一方面，有

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{4}\left\langle \left(J_\lambda^\mu\right)'(v_\lambda), v_3 \right\rangle \\
&= \frac{1}{4}\|v_3\|^2 + \frac{\lambda}{4}\int_\Omega \phi_{v_1}|v_3|^2\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{4}\int_\Omega \phi_{v_2}|v_3|^2\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{4}\int_\Omega \phi_{v_3}|v_3|^2\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{4}\int_\Omega |v_3|^6\mathrm{d}x - \frac{\mu}{4}\int_\Omega \tilde{f}(v_3)v_3\mathrm{d}x \\
&< J_\lambda^\mu(v_3) + \frac{\lambda}{4}\int_\Omega \phi_{v_1}|v_3|^2\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{4}\int_\Omega \phi_{v_1}|v_3|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因此，结合条件 (f_1) 和 (f_3) 可以得到

$$\begin{aligned}
c_\lambda^\mu &\leq J_\lambda^\mu(s_v v_1 + t_v v_2) = J_\lambda^\mu(s_v v_1 + t_v v_2) - \frac{1}{4}\left\langle \left(J_\lambda^\mu\right)'(s_v v_1 + t_v v_2), (s_v v_1 + t_v v_2) \right\rangle \\
&= \frac{1}{4}\left(\|s_v v_1\|^2 + \|t_v v_2\|^2\right) + \frac{\mu}{4}\int_\Omega \left[\tilde{f}(s_v v_1)(s_v v_1) - 4\tilde{F}(s_v v_1)\right]\mathrm{d}x + \frac{\mu}{4}\int_\Omega \left[\tilde{f}(t_v v_2)(t_v v_2) - 4\tilde{F}(s_v v_2)\right]\mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{s_v^6}{12}\int_\Omega |v_1|^6\mathrm{d}x + \frac{t_v^6}{12}\int_\Omega |v_2|^6\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{4}\left(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2\right) + \frac{\mu}{4}\int_\Omega \left[\tilde{f}(v_1)(v_1) - 4\tilde{F}(v_1)\right]\mathrm{d}x + \frac{\mu}{4}\int_\Omega \left[\tilde{f}(v_2)(v_2) - 4\tilde{F}(v_2)\right]\mathrm{d}x + \frac{1}{12}\int_\Omega |v_1|^6\mathrm{d}x + \frac{1}{12}\int_\Omega |v_2|^6\mathrm{d}x \\
&= J_\lambda^\mu(v_1 + v_2) - \frac{1}{4}\left\langle \left(J_\lambda^\mu\right)'(v_1 + v_2), (v_1 + v_2) \right\rangle \\
&= J_\lambda^\mu(v_1 + v_2) + \frac{1}{4}\left\langle \left(J_\lambda^\mu\right)'(v_\lambda), v_3 \right\rangle + \frac{\lambda}{4}\int_\Omega \phi_{v_1}|v_3|^2\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{4}\int_\Omega \phi_{v_2}|v_3|^2\mathrm{d}x \\
&< J_\lambda^\mu(v_1) + J_\lambda^\mu(v_2) + J_\lambda^\mu(v_3) + \frac{\lambda}{4}\int_\Omega \varphi_{v_2+v_3}|v_1|^2\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{4}\int_\Omega \varphi_{v_1+v_3}|v_2|^2\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{4}\int_\Omega \varphi_{v_1+v_2}|v_3|^2\mathrm{d}x \\
&= J_\lambda^\mu(v_\lambda) \\
&= c_\lambda^\mu,
\end{aligned}$$

矛盾，所以 $v_3 = 0$ 且 v_λ 有两个变号区域。

至此，定理 1.1 证明完成。

定理 1.2 的证明

与引理 2.5 的证明类似，存在 $\mu_1^*>0$ 使得对所有 $\mu\ge\mu_1^*$，对于每一个 $\lambda>0$，都存在相对应的 $v_\lambda^*\in N_\lambda^\mu$ 满足 $J_\lambda^\mu\left(v_\lambda^*\right)=c^*>0$。与定理 1.1 证明方法类似，可以得到泛函 J_λ^μ 在 N_λ^μ 的临界点是泛函 J_λ^μ 在 $H_0^1(\Omega)$ 的临界点和 $\left(J_\lambda^\mu\right)'\left(v_\lambda^*\right)=0$。换句话说，$v_\lambda^*$ 是系统(1.10)的基态解。

对于所有 $\mu\ge\mu^*$，根据定理 1.1，对于每一个 $\lambda>0$，可以得到(1.10)有一个最小能量变号解 v_λ。

设

$$\mu^{**}=\max\left\{\mu^*,\mu_1^*\right\}.$$

假设 $v_\lambda=v^++v^-$。同引理 2.3 的证明类似，存在 s_{v^+}，$t_{v^-}\in(0,1)$ 使得 $s_{v^+}v^+\in N_\mu, t_{v^-}v^-\in N_\lambda^\mu$。

因此，根据引理 2.3，可以得到

$$\begin{aligned}2c^*&\le J_\lambda^\mu\left(s_{v^+}v^+\right)+J_\lambda^\mu\left(t_{v^-}v^-\right)\le J_\lambda^\mu\left(s_{v^+}v^++t_{v^-}v^-\right)\\&<J_\lambda^\mu\left(v^++v^-\right)=c_\lambda^\mu.\end{aligned}$$

定理 1.2 的证明完成。

参考文献

[1] Kurihara, S. (1981) Large-Amplitude Quasi-Solitins in Superfluid Films. *Journal of the Physical Society of Japan*, **50**, 3262-3267. https://doi.org/10.1143/JPSJ.50.3262

[2] Laedke, E., Spatschek, K. and Stenflo, L. (1983) Evolution Theorem for a Class of Perturbed Envelope Soliton Solutions. *Journal of Mathematical Physics*, **24**, 2764-2769. https://doi.org/10.1063/1.525675

[3] Bouard, A.D., Hayashi, N. and Saut, J. (1997) Global Existence of Small Solutions to a Relativistic Nonlinear Schrödinger Equation. *Communications in Mathematical Physics*, **189**, 73-105. https://doi.org/10.1007/s002200050191

[4] Bass, F.G. and Nasanov, N.N. (1990) Nonlinear Electromagnetic-Spin Waves. *Physics Reports*, **189**, 165-223. https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90093-H

[5] Poppenberg, M., Schmitt, K. and Wang, Z. (2002) On the Existence of Soliton Solutions to Quasilinear Schrödinger Equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **14**, 329-344. https://doi.org/10.1007/s005260100105

[6] Ritchie, B. (1994) Relativistic Self-Focusing and Channel Formation in Laser-Plasma Interaction. *Physical Review E*, **50**, 687-689. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.50.R687

[7] Shen, Y. and Wang, Y. (2013) Solition Solutions for Generalized Quasilinear Schrödinger Equations. *Nonlinear Analysis*, **80**, 194-201. https://doi.org/10.1016/j.na.2012.10.005

[8] Ambrosetti, A. (2008) On Schrödinger-Poisson System. *Milan Journal of Mathematics*, **76**, 257-274. https://doi.org/10.1007/s00032-008-0094-z

[9] Ambrosetti, A. and Ruiz, D. (2008) Multiple Bound States for the Schrödinger-Poisson System. *Milan Journal of Mathematics*, **10**, 391-404. https://doi.org/10.1142/S021919970800282X

[10] Ruiz, D. (2006) The Schrödinger-Poisson Equation under the Effect of a Nonlinear Local Term. *Journal of Functional Analysis*, **237**, 655-674. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2006.04.005

[11] Sánchez, O. and Soler, J. (2004) Long-Time Dynamics of the Schrödinger-Poisson-Slater System. *Journal of Statistical Physics*, **114**, 179-204. https://doi.org/10.1023/B:JOSS.0000003109.97208.53

[12] D'Aprile, T. and Wei, J.C. (2006) Standing Waves in the Maxwell-Schrödinger Equation and an Optimal Configuration Problem. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **25**, 105-173. https://doi.org/10.1007/s00526-005-0342-9

[13] Ianni, I. (2013) Sign-Changing Radial Solutions for the Schrödinger-Poisson-Slater Problem. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **41**, 365-385.

[14] Ianni, I. and Vaira, G. (2008) On Concentration of Positive Bound States for the Schrödinger-Poisson Problem with Potentials. *Advanced Nonlinear Studies*, **8**, 573-595. https://doi.org/10.1515/ans-2008-0305

[15] Li, G., Peng, S. and Yan, S. (2010) Infinitely Many Positive Solutions for the Nonlinear Schrödinger-Poisson System. *Communications in Contemporary Mathematics*, **12**, 1069-1092. https://doi.org/10.1142/S0219199710004068

[16] Ruiz, D. (2010) On the Schrödinger-Poisson-Slater System: Behavior of Minimizers, Radial and Nonradial Cases. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **198**, 349-368. https://doi.org/10.1007/s00205-010-0299-5

[17] Shuai, W. and Wang, Q.F. (2015) Existence and Asymptotic Behavior of Sign-Changing Solutions for the Nonlinear Schrödinger-Poisson System in R^3. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **66**, 3267-3282. https://doi.org/10.1007/s00033-015-0571-5

[18] Wang, J., Tian, L., Xu, J. and Zhang, F. (2013) Existence and Concentration of Positive Solutions for Semilinear Schrödinger-Poisson System in R^3. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **48**, 243-273. https://doi.org/10.1007/s00526-012-0548-6

[19] Wang, Z. and Zhou, H. (2017) Positive Solution for a Nonlinear Stationary Schrödinger Poisson System in R^3. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **18**, 809-816. https://doi.org/10.3934/dcds.2007.18.809

[20] Wang, Z. and Zhou, H. (2015) Sign-Changing Solutions for the Nonlionear Schrödinger-Poisson System in R^3. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **52**, 927-943. https://doi.org/10.1007/s00526-014-0738-5

[21] Zhong, X. and Tang, C. (2017) Ground State Sign-Changing Solutions for a Schrödinger-Poisson System with a 3-Linear Growth Nonlinearity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **455**, 1956-1974. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.04.010

[22] Wang, D.B., Zhang, H.B. and Guan, W. (2019) Existence of Least-Energy Sign-Changing Solutions for Schrödinger-Poisson System with Critical Growth. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **479**, 2284-2301. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.07.052

[23] Zhu, X., Li, F. and Liang, Z. (2016) Existence of Ground State Solutions to a Generalized Quasilinear Schrödinger-Maxwell System. *Journal of Mathematical Physics*, **57**, Article ID: 101505. https://doi.org/10.1063/1.4965442

[24] Chen, J.H., Tang, X.H. and Cheng, B.T. (2017) Existence of Ground State Sign-Changing Solutions for a Class of Generalized Quasilinear Schrödinger-Maxwell System in R^3. *Computers & Mathematics with Applications*, **74**, 466-481. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.04.028