Advances in Applied Mathematics **应用数学进展, 2021, 10(6), 2249-2256**
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.106234

串并联图的分数 DP-色数

温荣荣

浙江师范大学数学与计算机科学学院, 浙江 金华
Email: 978578382@qq.com

收稿日期：2021年5月28日；录用日期：2021年6月19日；发布日期：2021年6月29日

摘 要

在 2015 年，DP -染色(也叫对应染色)是由 $Dvořák$ 和 $Postle$ 提出的有关列表染色推广。在 2019 年，$Bernshteyn$，$Kostochka$，and Zhu 提出了 DP-染色的分数版本。不像分数列表色数，一个图G的分数 DP -色数被记为$\chi^*_{DP}(G)$，可以任意大比它的分数色数。$\mathcal{G}$ 是一些图所构成的集族，它的分数 DP -色数是这些图中分数 DP -色数的上确界。我们把围长至少为 t 的一类串并联图记为$\mathcal{Q}_t$。这篇论文证明了对于$t = 4q-1, 4q, 4q+1, 4q+2$，$\mathcal{Q}_t$ 的分数 DP -色数为 $2+\frac{1}{q}$。

关键词

分数 DP-色数，围长，串并联图

Fractional DP-Chromatic Number of Series-Parallel

Rongrong Wen

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: 978578382@qq.com

Received: May 28^{th}, 2021; accepted: Jun. 19^{th}, 2021; published: Jun. 29^{th}, 2021

文章引用: 温荣荣. 串并联图的分数 DP-色数[J]. 应用数学进展, 2021, 10(6): 2249-2256.
DOI: 10.12677/aam.2021.106234

Abstract

DP-coloring (also called correspondence coloring) is generalization of list coloring introduced by *Dvořák* and *Postle* in 2015. In 2019, Bernshteyn，Kostochka，and Zhu introduced a fractional version of DP-coloring. Unlike the fraction list chromatic number, the fractional DP-chromatic number of a graph G，denoted $\chi^*_{DP}(G)$，can be arbitrarily larger than $\chi^*(G)$. The fractional DP-chromatic number of a family $\mathcal{G}$ of graphs is the supremum of the fractional DP-chromatic number of graphs in $\mathcal{G}$. We denote by $\mathcal{Q}_t$ the class of series-parallel graphs with girth at least t. This paper proves that for $t = 4q-1, 4q, 4q+1, 4q+2$, the fractional DP-chromatic number of $\mathcal{Q}_t$ is exactly $2+\frac{1}{q}$.

Keywords

Fractional DP-Chromatic Number, Girth, Series-Parallel Graph

1. 引言

图 G 的一个 b-重染色是指一个映射 φ，它给 G 的每个顶点 v 分配一个 b 颜色集 $\varphi(v) \subseteq \{1, 2, \cdots, a\}$，满足相邻顶点接收不相交的颜色集。 G 的一个 (a, b)-染色是指 G 的一个 b-重染色 φ，使得对于每个顶点 v 满足 $\phi(v) \subseteq \{1, 2, \cdots, a\}$。我们称 G 是 (a, b)-可染的当且 G 中存在一个 (a, b)-染色。 G 的分数色数为

$$\chi^*(G) = \inf\{\frac{a}{b} : G \text{ 是 } (a, b)\text{-可染的}\}"$$

G 的一个 a-列表赋值是指一个映射 L，它给 G 每个顶点 v 分配一个可用颜色集合 $L(v)$, G 的一个 b-重 L-染色是指 G 的一个 b-重染色 φ，使得对于每个顶点 v 满足 $\phi(v) \subseteq L(v)$。我们称 G 是 (a, b)-可选的当且对于 G 的任意一个 a-列表赋值， G 中存在一个 b-重 L-染色。 G 的分数选择色数为

$$\chi^*_\ell(G) = \inf\{\frac{a}{b} : G \text{ 是 } (a, b)\text{-可选的}\}"$$

显然如果一个图是 (a,b)-可选的，那么它也是 (a,b)-可染的。因此 $\chi^*(G) \le \chi^*_\ell(G)$. Alon, Tuza 和 Voigt [1] 证明了对于有限图 G 满足 $\chi^*(G) = \chi^*_\ell(G)$。且 $\chi^*_\ell(G)$ 定义中的下界可以用最小值来取代，这意味着如果一个图 G 是 (a,b)-可染的，那么对于某些整数 m, G 也是 (am,bm)-可选的。这里的 m 通常取决于图 G 且一般是一个很大的整数。自然而然我们考虑这么一个问题：是否对每个 (a,b)，对任意正整数 m, G 都是 (am,bm)- 可选的Erdős 等人猜想如果图 G 是 (a,b)-可选的，那么对任意整数 $m \in \mathbb{N}$, G 也是 (am,bm)-可选的。 Tuza 和 Voigt [2] 证明了该猜想当 $a=2$ 和 $b=1$ 是成立的，但是，对于一般情况，该猜想在 [3] 中得到了反证。

DP-染色是 Dvořák 和 Postle [4] 对于列表染色进行的推广， G 的覆盖是指一组有序对 $\mathcal{H}=(L,H)$，由一个图 H 和一个满足下列条件的函数 $L: V(G) \longrightarrow P(V(H))$ 组成：

- $V(G_L)$=$\bigcup_{u\in V(G)} L_u$.
- 对任意的 $u \in V(G)$, $H[L(u)]$ 是一个完全图.
- 若 $E_H(L(u),L(v))$ 非空, 则 $u=v$ 或者 $uv \in E(G)$.
- 若 $uv \in E(G)$, 则 $E_H(L(u),L(v))$ 是一个匹配(匹配可能为空).

若对于 G 中的每个顶点 u 满足 $|L(u)|=m$，则称 G 的一个覆盖 $\mathcal{H}=(L,H)$ 是 m-重的。G 的一个 $\mathcal{H}$-染色是指在图 H 中找到的一个独立集，其大小为 $|V(G)|$。因为对于每个顶点 u，$H[L(u)]$ 都是一个完全图，我们称一个独立集 $I \subseteq V(H)$ 是 G 的一个 $\mathcal{H}$-染色当且仅当对于每个顶点 $u \in V(G)$，满足 $|I \cap L(u)|=1$. G 的 DP-色数 $\chi_{DP}(G)$ 是满足 G 的最小整数 m，使得 G 对其每个 m-重覆盖 $\mathcal{H}$ 都有一个 $\mathcal{H}$-染色。

图的分数 DP-色数的概念是由 Bernshteyn, Kostochka 和 Zhu [5] 提出的。给定图 G 的覆盖$\mathcal{H}=(L,H)$，我们把 H 中连接划分 $\{L(v): v \in V(G)\}$ 的不同部分的边称为交叉边。若 $H[S]$ 不包含交叉边，则称子集 $S \subseteq V(H)$ 是拟独立的。

若 $\mathcal{H}=(L,H)$ 是 G 的 a-重覆盖， $b \in \mathbb{N}$ 且 $a \ge b$. G 的一个 $(\mathcal{H},b)$-染色是指存在一个拟独立集 $S \subseteq V(H)$，使得对每个顶点 $v \in V(G)$ 满足 $|S \cap L(v)|=b$。我们称 G 是 $(\mathcal{H},b)$-可染的当且 G 中有一个 $(\mathcal{H},b)$-染色。对于 $a,b \in \mathbb{N}$ 且 $a \ge b$，我们称图 G 是 (a,b)-DP-可染的当且对于 G 的每个 a-重覆盖 $\mathcal{H}$, G 都是 $(\mathcal{H},b)$-可染的。 G 的分数 DP-色数为

$$\chi^*_{DP}(G) = \inf\{\frac{a}{b} : G \text{ 是 } (a,b)\text{-}DP\text{-可染的}\}”$$

不难看出如果图 G 是 (a,b)-DP-可染的，那么 G 也是 (a,b)-可选的，且每个图 G 都是 $(\chi_{DP}(G),1)$-DP-可染的，因此可得

$$\chi^*(G) = \chi^*_\ell(G) \le \chi^*_{DP}(G) \le \chi_{DP}(G).$$

在 [5] 中刻画了 $\chi^*_{DP}(G)=2$ 的图类：一个顶点数大于或等于 2 的连通图 G 满足 $\chi^*_{DP}(G)=2$ 当且仅当 G 中不包含奇圈且最多含有一个偶圈. 其次，如果 G 不含奇圈且刚好含有一个偶圈，则对于任意正整数 b, G 不是 $(2b,b)$-DP-可染的，也就是说，对于 $\chi^*_{DP}(G)$ 的定义中的下界是不能达到的。在 [5] 中也证明了如果一个图的最大平均度满足 $d \ge 4$，则 $\chi^*_{DP}(G) \ge d/(2\ln d)$。对于图的

分数 DP-色数在 [6] 中也有研究，其中证明了 $\chi^*_{DP}(C_{2r+1}) = 2 + \frac{1}{r}$。对于任意 $n \geq 2$ 和 $m \in \mathbb{N}$，存在 $t \in \mathbb{N}$ 使得 $\chi^*_{DP}(K_{n,m}) \leq n + 1 - \frac{1}{t}$。同时当 $m \geq 3$ 确定了 $\chi^*_{DP}(K_{2,m})$ 的下界。

在这篇论文中，我们考虑串并联图的分数 DP -色数。对于正整数 k ，令

$$\mathcal{Q}_t = \{G : G \text{ is a series-parallel graph with girth at least } k\}.$$

这篇论文证明了以下结果:

定理1 假设 q 是一个正整数，对于$t \in \{4q-1, 4q, 4q+1, 4q+2\}$，$\chi^*_{DP}(\mathcal{Q}_t) = 2 + \frac{1}{q}$。

2. 定理 1 的证明

串并联图是图的集合，有着深入的研究。并且有大量的等价定义对于这样的图类。这篇论文主要用了归纳法，我们采用定义，将不断对 K_2 通过串和并的操作，形成串并联图。

定义1 $(G; x, y)$定义为通过如下递归操作得到的两个端点的串并联图

- 令$V(K_2) = \{0, 1\}$. 那么$(K_2; 0, 1)$ 是一个两端点的串并联图
- (并操作) 令$(G; x, y)$ 和$(G'; x', y')$ 是点不交的两端点串并联图。通过把端点 x 和 x' 并为一个点 x'' ，并且端点 y 和 y' 并为一个点 y'' ，将图 G 和 G' 合并起来，得到图 G'' 。那么$(G''; x'', y'')$ 是一个两端点的串并联图。
- (串操作) 再令$(G; x, y)$ and $(G'; x', y')$ 是点不交的两端点串并联图。通过把点 y 和 x' 合并为一个点 x'' ，将图 G 和 G' 合并起来，得到图 G'' 。那么$(G''; x, y')$ 是一个两端点的串并联图。

如果存在某两个点 x , y 使得$(G; x, y)$是一个两端点串并联图，那么这个图是一个串并联图。

引理1 假设 a , k 是一个正整数并且假设 ϵ 是一个正实数，使得 ϵa 是一个整数， $P_k = (v_0, v_1, ..., v_k)$ 是一条路，并且 $\mathcal{H} = (L, H)$ 是路 P_k 的一个 $(2a + \epsilon a)$ -重覆盖，而且 $|L(v_0)| = a$, $|L(v_i)| = 2a + \epsilon a$ $(1 \leq i \leq k)$。对于 $0 \leq j \leq k$ ，存在 $L(v_j)$ 的一个子集 T_j 满足下面要求:

- 如果 $j = 2m + 1$ 是奇数, 那么 $|T_j| = a + \epsilon a$; 如果 $j = 2m$ 是偶数, 那么 $|T_j| = a$.
- 对于 $L(v_j)$ 中满足 $|B_j \cap T_j| \geq (1 - m\epsilon)a$ 的任意 a -元子集 B_j ，那么路 $P_j = (v_0, v_1, ..., v_j)$ 存在一个 $(\mathcal{H}, a)$ -染色 ϕ 使得点 v_j 染集合 B_j 中的颜色，记为 $\phi(v_j) = B_j$ 。

证明 对 j 进行归纳假设，如果 $j = 0$ ，那么令 $T_0 = L(v_0)$ ，如果 $j = 1$ ，那么令 $T_1 = L(v_1) - N_H(T_0)$ 。这个结果显然是成立的。

假设 $j \geq 2$ ，并且对于 $j' < j$ 这个引理成立。

情况 1 $j = 2m$ 为偶数。

由归纳假设可得，在 $L(v_{2m-1})$ 中存在一个 $(a + \epsilon a)$ -元子集 T_{2m-1} ,使得属于集合 $L(v_{2m-1})$ 中任意a-元子集B_{2m-1}，有 $|B_{2m-1} \cap T_{2m-1}| \geq (1 - (m-1)\epsilon)a$ 成立。对于路 P_{2m-1} 上的染色，存在一个 $(\mathcal{H}, a)$ -染色 ϕ ，使得点 v_{2m-1} 染集合B_{2m-1} 中的颜色，记为$\phi(v_{2m-1}) = B_{2m-1}$。

令 T'_{2m-1}是 集合 T_{2m-1} 在 $L(v_{2m})$ 中所匹配的颜色，也就是说 $T'_{2m-1} = N_H(T_{2m-1}) \cap L(v_{2m})$ 。不失一般性，我们可以假设 $|T'_{2m-1}| = a + \epsilon a$ ，因为 $|L(v_{2m})| = (2 + \epsilon)a$ ，我们有 $|L(v_{2m}) -$

$T_{2m-1}| \ge a$。令 T_{2m} 是 $L(v_{2m}) - T_{2m-1}$ 中任意 a -元子集。假设 B_{2m} 是 $L(v_{2m})$ 中 a -元集合且满足 $|B_{2m} \cap T_{2m}| \ge (1-m\epsilon)a$。我们应该证明路 P_{2m} 存在一个 $(\mathcal{H}, a)$-染色 ϕ 使得$\phi(v_{2m}) = B_{2m}$。

已知 $|B_{2m} \cap T'_{2m-1}| \le a - (1-m\epsilon)a = m\epsilon a$ 。所以 $|T'_{2m-1} - B_{2m}| \ge (1-(m-1)\epsilon)a$ 。

令 $B'_{2m} = N_H(B_{2m}) \cap L(v_{2m-1})$，因为 $|T'_{2t-1} - B_{2m}| \ge (1-(m-1)\epsilon)a$ ，那么 $L(v_{2m-1}) - B'_{2m}$ 中存在一个包含 $(1-(m-1)\epsilon)a$ 颜色的 a -元集合 B_{2m-1} 。通过归纳假设，路 P_{2m-1} 存在一个 $(\mathcal{H}, a)$ -染色 ϕ ，且使得点 v_{2m-1} 染集合 B_{2m-1} 中的颜色，记为 $\phi(v_{2m-1}) = B_{2m-1}$ 。即染色 ϕ 可以延拓到路 P_{2m} 上的 $(\mathcal{H}, a)$ - 染色，且点 v_{2m} 染集合 B_{2m} 中的颜色,记为 $\phi(v_{2m}) = B_{2m}$ 。

情况 2 $j = 2m+1$ 是奇数

由归纳假设可得， $L(v_{2m})$ 中存在一个 a -元子集T_{2m}，使得对于 $L(v_{2m})$ 中满足 $|B_{2m} \cap T_{2m}| \ge (1-m\epsilon)a$ 的任意 a -元子集 B_{2m} ，路 P_{2m} 存在一个 $(\mathcal{H}, a)$ - 染色 ϕ ，且点 v_{2m} 染集合 B_{2m} 中的颜色，记为 $\phi(v_{2m}) = B_{2m}$ 。令 T'_{2m} 是集合 $L(v_{2m+1})$ 中与 T_{2m} 匹配的颜色。也就是说 $T'_{2m} = N_H(T_{2m}) \cap L(v_{2m+1})$。我们假设 $|T'_{2m}| = a$ ，可得 $|L(v_{2m+1}) - T'_{2m}| = (1+\epsilon)a$。令 T_{2m+1} 是 $L(v_{2m+1}) - T_{2m}$ 中任意 $(1+\epsilon)a$-元集合。假设 B_{2m+1}是$L(v_{2m+1})$ 中满足 $|B_{2m+1} \cap T_{2m+1}| \ge (1-m\epsilon)a$ 的 a -元集合。我们应该要证明路 P_{2m+1} 存在一个 $(\mathcal{H}, a)$ -染色 ϕ 且使得点 v_{2m+1} 染集合 B_{2m+1} 中的颜色，记为 $\phi(v_{2m+1}) = B_{2m+1}$ 。

已知 $|B_{2m+1} \cap T'_{2m}| \le (1-m\epsilon)a$ ，所以 $|T'_{2m} - B_{2m+1}| \ge (1-m\epsilon)a$ 。

令 $B'_{2m+1} = N_H(B_{2m+1}) \cap L(v_{2m})$ 。假设 $|B'_{2m+1}| = a$ 。那么 $L(v_{2m}) - B'_{2m+1}$ 存在一个包含 T_{2m} 中 $(1-m\epsilon)a$ 颜色的 a -元集合。通过归纳假设，路 P_{2m} 存在一个 $(\mathcal{H}, a)$ -染色 ϕ ，且使得点 v_{2m+1} 染集合 B_{2m+1} 中的颜色,记为 $\phi(v_{2m+1}) = B_{2m+1}$ 。

推论1 假设 a, k 是正整数，令

$$\epsilon = \begin{cases} \frac{2}{k-1}, & \text{if } k \text{ is odd} \\ \frac{2}{k}, & \text{if } k \text{ is even.} \end{cases}$$

如果 $P_k = (v_0, v_1, ..., v_k)$ 是一条长为 k 的路，并且 $\mathcal{H} = (L, H)$ 是 G 的一个 $(2a+\epsilon a)$ -重覆盖。路 P_k 上首尾两点的列表长为 a ，记为 $|L(v_0)| = |L(v_k)| = a$ ，对于其他的点的列表长为 $2a+\epsilon a$ ，记为$|L(v_i)| = 2a+\epsilon a$ ($1 \le i \le k-1$)。那么存在路 P_k 上的一个 $(\mathcal{H}, a)$ -染色 ϕ 。

证明 我们把这个证明分为两种情况：

情况 1 $k = 2m$ 为偶数

通过引理1可得，存在列表 $L(v_{k-1})$ 上长为 $(a+\epsilon a)$ 的子集 T_{k-1} ，使得对于 $L(v_{k-1})$ 上满足 $|B_{k-1} \cap T_{k-1}| \ge (1-(m-1)\epsilon)a$ 的任意 a -元子集 B_{k-1} ，路 $P_{k-1} = (v_0, v_1, ...v_{k-1})$ 存在一个 $(\mathcal{H}, a)$ -染色 ϕ ，且使得点 v_{k-1} 染集合 B_{k-1} 中的颜色，记为 $\phi(v_{k-1}) = B_{k-1}$ 。因为 $t\epsilon a = a$ ，我们有 $|T_{k-1} - L(v_k)| \ge \epsilon a = (1-(m-1)\epsilon)a$ 。因此在 $L(v_{k-1}) - L(v_k)$ 上存在 a -元子集 B_{k-1} ，包含 T_{k-1} 中至少 $(1-(m-1)\epsilon)a$ 个颜色。由引理1可得，路 P_{k-1} 存在一个 $(\mathcal{H}, a)$ -染色 ϕ 且满足 $\phi(v_k) = L(v_k)$ 。

情况 2 $k = 2m+1$ 为奇数

令 B 是 $L(v_{k-1}) - L(v_k)$ 的 a -元子集。对于 $1 \le i \le k-2$ ，令 $L'(v_i) = L(v_i)$ ，并且令

$L'(v_{k-1}) = B$。由情况1可得路 $P_{k-1} = (v_0, v_1, ...v_{k-1})$ 有一个 $(\mathcal{H}, a)$ -染色 ϕ，且满足点 v_{k-1} 染集合 B 中的颜色，记为 $\phi(v_{k-1}) = B$。现在 ϕ 可以延拓到路 P_k 上的一个 $(\mathcal{H}, a)$ -染色，且使得点 v_k 染集合 B_k 中的颜色，记为 $\phi(v_k) = L(v_k)$。

引理 2 [7] 如果 $(G; x, y)$ 是一个围长至少为 t 的串并联图，且 $k = \lceil t/2 \rceil$,则 G 要么本身是一条路，要么就包含一条长为 k 的路 $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$，使得 G 中所有的点 $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ 度为2。而且它们都是端点 x 或者 y。

证明 假设 G 包含一个圈 C。如果圈 $G = C$，因为 C 有围长至少为 t，那么这个结论是对的。反之，$(G_1; x_1, y_1)$ 和 $(G_2; x_2, y_2)$ 通过一系列的串并联构造得到 $(G; x, y)$。如果 $(G_1; x_1, y_1)$ 和 $(G_2; x_2, y_2)$ 其中一个包含一个圈，那么 G_1 或 G_2 包含一条满足要求的路。反之，因为 G 包含一个圈，$(G; x, y)$ 可由 $(G_1; x_1, y_1)$ 和 $(G_2; x_2, y_2)$ 并联得到。对于 $i = 1, 2$, G_i 是一条路连接 x_i 和 y_i。那么 G 是一个圈，并且这个结论成立。

定理2 假设 q , a 是一个正整数，对于任意围长至少为 t 的串并联图 G，当 $t \in \{4q-1, 4q, 4q+1, 4q+2\}$ 时，G 是 $((2+\frac{1}{q})a, a)$ -DP-染色。

证明 假设 $\mathcal{H} = (L, H)$ 是 G 的 $((2+\frac{1}{q})a)$ -重覆盖。我们需要说明 G 有一个 $(\mathcal{H}, a)$ -染色。这个证明通过对 G 中点的数目进行归纳。如果 G 是一条路，那么 G 是 $(2a, a)$ -DP-可染，并且得到结论。假设 G 不是一条路。通过引理2，G 有一条长为 k 的路 $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ (当 $t \in \{4q-1, 4q\}$ 时，那么 $k = 2q$;当 $t \in \{4q+1, 4q+2\}$,那么 $k = 2q+1$)，使得 G 中所有的点 $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ 的度为2.令 $G' = G - \{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$。那么 G' 是一个围长至少为 $4q-1$ 的串并联图，或者 G' 是一条路。假设 G' 是一个围长至少为 $4q-1$ 的串并联图，那么通过归纳假设，G' 有一个 $(\mathcal{H}, a)$ -染色 ϕ。如果 G' 是一条路，因为路是 $(2a, a)$ -DP-染色，那么 G' 有一个 $(\mathcal{H}, a)$ -染色 ϕ。令 $\mathcal{H}' = (L', H)$ 是路 $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ 的 $((2+\frac{1}{q})a)$ -重覆盖，且对于路 $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ 上的点满足 $L'(v_l) = \phi(v_l)$ 并且对于 $1 \le i \le l-1$，$L'(v_i) = L(v_i)$。通过推论1，P 有一个 $(\mathcal{H}, a)$ -染色ϕ。那么 ϕ 和 ψ 合起来就是图 G 的一个 $(\mathcal{H}, a)$ -染色。

通过定理2，对于 $t \in \{4q-1, 4q, 4q+1, 4q+2\}$，$\mathcal{Q}_t$ 的分数 DP -色数是至多 $2+\frac{1}{q}$。为了说明这个等式成立，我们需要去构造，对于每个正整数 a，一个图属于 $\mathcal{Q}_t$，它不是 $((2+\frac{1}{q})a-1, a)$ -DP-染色。

引理3 假设 a , k 是一个正整数并且假设 ϵ 是一个正实数，使得 ϵa 是一个整数且

$$\epsilon < \begin{cases} \frac{2}{k-1}, & \text{if } k \text{ is odd} \\ \frac{2}{k}, & \text{if } k \text{ is even.} \end{cases}$$

令 $P_k = (v_0, v_1, ..., v_k)$ 是一条路. 令 X_1, X_2 是 a -元集合. 那么路 P_k 存在一个覆盖 $\mathcal{H} = (L, H)$ 且以下条件都要满足：

- $L(v_0) = X_1$，$L(v_l) = X_2$
- $|L(v_i)| = 2a + \epsilon a \ (1 \le i \le k-1)$
- 路 P_k 不是 $(\mathcal{H}, a)$ -染色

证明 令 M_f ($f = 1, 3, 5, ..., 2q-3$), N_g ($g = 2, 4, 6, ..., 2q-2$), Z_h ($h = 1, 3, 5, ..., 2q-1$)是不相交的颜色集，且$|M_f| = |N_g| = a$, $|Z_h| = \epsilon a$.令$\mathcal{H} = (L, H)$是路 P_k 上的一个覆盖，定义如下

- $L(v_0) = X_1$, $L(v_l) = X_2$, $L(v_1) = X_1 \cup M_1 \cup Z_1$.
- $|L(v_{2i+1})| = N_{2i} \cup M_{2i+1} \cup Z_{2i+1}$, $i = 1, 2, 3, ..., q-2$.
- $|L(v_{2j})| = N_{2j} \cup M_{2j-1} \cup Z_{2j-1}$, $j = 1, 2, 3, ..., q-1$.
- 如果$k = 2q$, 那么$L(v_{2q-1}) = X_2 \cup N_{2q-2} \cup Z_{2q-1}$;如果$k = 2q+1$, 那么$L(v_{2q}) = X_2 \cup M_{2q-1} \cup Z_{2q-1}$.

我们应该要证明 P_k 不是 $(\mathcal{H}, a)$ -染色

断言1 对于任意 $j \in \{2, 3, 4, ..., q\}$，如果 ϕ 是路 P_{2j-2}上的一个$(\mathcal{H}, a)$ -染色，那么 $|\phi(v_{2j-2}) \cap N_{2j-2}| \geq a - (j-1)\epsilon a$。

证明 我们接下来对下标 j 进行归纳假设，进而完成这个证明。假设 $j = 2$ 并且 ϕ 是路 P_2 上的一个$(\mathcal{H}, a)$-染色。因为 $\phi(v_0) = X_1$ ，我们可以得到$\phi(v_1) \subseteq M_1 \cup Z_1$。则 $|\phi(v_2) \cap (M_1 \cup Z_1)| \leq \epsilon a$。因此 $|\phi(v_2) \cap N_2| \geq a - \epsilon a$ 。

假设 $j \geq 3$ 并且这个断言对于 $j' < j$ 成立。 ϕ 是路 P_{2j-2} 上的一个 $(\mathcal{H}, a)$ -染色。对路 P_{2j-4} 上染色 ϕ 的限制应用归纳假设，我们可以得到

$$|\phi(v_{2j-4}) \cap N_{2j-4}| \geq a - (j-2)\epsilon a$$

则 $|\phi(v_{2j-3}) \cap N_{2j-4}| \leq (j-2)\epsilon a$ 。由此可推

$$|\phi(v_{2j-3}) \cap (M_{2j-3} \cup Z_{2j-3})| \geq a - (j-2)\epsilon a$$

因此

$$|\phi(v_{2j-2}) \cap (M_{2j-3} \cup Z_{2j-3})| \leq (j-1)\epsilon a$$

从而得到 $|\phi(v_{2j-2}) \cap N_{2j-2}| \geq a - (j-1)\epsilon a$

假设 $k = 2q$ 是一个偶数，并且路 ϕ 是路 P_{2q}的一个$(\mathcal{H}, a)$ -染色。那么 $|\phi(v_{2q-2}) \cap N_{2q-2}| \geq a - (q-1)\epsilon a$ 。因为 $\phi(v_{2q}) = X_2$ ，我们可以得到 $\phi(v_{2q-1}) \subseteq (N_{2q-2} - \phi(v_{2q-2})) \cup Z_{2q-1}$ 。但是 $|(N_{2q-2} - \phi(v_{2q-2})) \cup Z_{2q-1}| \leq (q-1)\epsilon a + \epsilon a = q\epsilon a < a$ ，则点 v_{2q-1} 可染的 a 个颜色与点 v_{2q-2} 染的颜色必定相交，矛盾。

假设 $k = 2q+1$ 是一个奇数，且 ϕ 是路 P_{2q+1} 的一个 $(\mathcal{H}, a)$ -染色。由断言1可知， $|\phi(v_{2q-2}) \cap N_{2q-2}| \geq a - (q-1)\epsilon a$ 。因此 $|\phi(v_{2q-1}) \cap N_{2q-2}| \leq (q-1)\epsilon a$ 。因为 $\phi(v_{2q+1}) = X_2$ 。所以 $\phi(v_{2q}) \subseteq (M_{2q-1} \cup Z_{2q-1}) - \phi(v_{2q-1})$。但是$|(M_{2q-1} \cup Z_{2q-1}) - \phi(v_{2q-1})| \leq a + \epsilon a - (a - (q-1)\epsilon a) = q\epsilon a < a$。由此我们得到点 v_{2q} 可染的 a 个颜色与点 v_{2q-1} 染的颜色必定相交，矛盾。

定理3 假设 q，a 是一个正整数，并且假设 ϵ 是一个正实数，使得 ϵa 是一个整数，且 $\epsilon < \frac{1}{q}$。对于 $k \in \{4q-1, 4q, 4q+1, 4q+2\}$，那么存在一个图 $G \in \mathcal{Q}_t$, 使得 G 不是 $((2+\epsilon)a, a$ -染色。

证明 令 $p = \binom{(2+\epsilon)a}{a}^2$ 。令 G 由围长为 $\lceil \frac{t}{2} \rceil$ 的路并构造得到，两个端点记为 x 和 y ，那么 $G \in \mathcal{Q}_t$ 。

我们应该证明 G 不是 $((2+\epsilon)a, a)$ -染色。令 X 和 Y 是含有 $(2a + \epsilon a)$ 元素的集合，并且令 $L(x) = X$ and $L(y) = Y$ 。那么就有 p 种 $(\mathcal{H}, a)$ -染色方式。每种染色 ϕ 都对应一条围长为 $\lceil \frac{t}{2} \rceil$ 的路。在每条路，定义 $(\mathcal{H}, a)$ 同引理 3 的覆盖， X_1 用 $\phi(x)$ 替代， Y_1 用 $\phi(y)$ 替代。那么由引理 3 可

得，在 x 和 y 上的 $(\mathcal{H}, a)$ -染色不可以延拓整个图 G 的染色。

通过定理 3 ，对于 $k \in \{4q-1, 4q, 4q+1, 4q+2\}$ ，图类 $\mathcal{Q}_t$ 的分数DP-染色数至少是 $2+\frac{1}{q}$ 。结合定理 2 ，则完成了定理 1 的证明。

参考文献

[1] Alon, N., Tuza, Z. and Voigt, M. (1997) Choosability and Fractional Chromatic Numbers. *Discrete Mathematics*, **165-166**, 31-38. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00159-8

[2] Tuza, Z. and Voigt, M. (1996) Every 2-Choosable Graph Is ($2m$, m)-Choosable. *Journal of Graph Theory*, **22**, 245-252. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199607)22:3⟨245::AID-JGT5⟩3.0.CO;2-M

[3] Dvořák, Z., Hu, X. and Sereni, H.-S. (2018) A 4-Choosable Graph That Is Not (8:2)-Choosable. arXiv:1806.03880 (preprint).

[4] Dvořák, Z. and Postle, L. (2018) Correspondence Coloring and Its Application to List-Coloring Planar Graphs without Cycles of Lengths 4 to 8. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **129**, 38-54. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2017.09.001

[5] Bernshteyn, A., Kostochka, A. and Zhu, X. (2020) Fractional DP-Coloring of Sparse Graphs. *Journal of Graph Theory*, **93**, 203-221. https://doi.org/10.1002/jgt.22482

[6] Kaul, H. and Mudrock, J. (2019) A Note on Fractional DP-Coloring of Graphs. arXiv:1904.07697 (preprint).

[7] Li, X.E. and Zhu, X. (2020) The Strong Fractional Choice Number of Series-Parallel Graphs. *Discrete Mathematics*, **343**, Article ID: 111796. https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.111796