Advances in Applied Mathematics 应用数学进展**, 2021, 10(6), 1919-1923**
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.106201

Hans汉斯

n-赋范空间中欧拉差分序列空间的几个性质

赵顺心

天津财经大学珠江学院，天津
Email: 1796295311@qq.com

收稿日期：2021年5月10日；录用日期：2021年5月29日；发布日期：2021年6月11日

摘 要

在这篇文章中，我们主要研究定义在实线性*n*-赋范空间下欧拉序列空间在适当*n*-范数下的完备性，同时得到某些序列空间之间的相互包含关系。

关键词

欧拉矩阵，序列空间，完备性

Some Properties of Euler Difference Sequence Spaces in *n*-Normed Spaces

Shunxin Zhao

Tianjin University of Finance and Economics Pearl River College, Tianjin
Email: 1796295311@qq.com

Received: May 10th, 2021; accepted: May 29th, 2021; published: Jun. 11th, 2021

Abstract

In this paper, we mainly study the completeness of Eulerian sequence spaces defined in real linear *n*-normed spaces under appropriate *n*-norms, and obtain the mutual inclusion relations between some sequence spaces.

Keywords

Euler Matrix, Sequence Space, Completeness

文章引用: 赵顺心. *n*-赋范空间中欧拉差分序列空间的几个性质[J]. 应用数学进展, 2021, 10(6): 1919-1923.
DOI: 10.12677/aam.2021.106201

1. 引言

在本篇文章中，w, l_∞, l_p, c, c_0 分别代表任意数列，有界数列，p-绝对可和数列，收敛数列和收敛到零的数列。这些空间中的元素用 $x=(x_k)$ 来表示，$\theta=(0,0,\cdots)$ 表示零序列。Kizmaz 在文献[1]中定义了序列空间 $c_0(\Delta)$，$c(\Delta)$，$l_\infty(\Delta)$：

$$c_0(\Delta)=\{x=(x_k)\in w:(\Delta x_k)\in c_0\};$$
$$c(\Delta)=\{x=(x_k)\in w:(\Delta x_k)\in c\};$$
$$l_\infty(\Delta)=\{x=(x_k)\in w:(\Delta x_k)\in l_\infty\}.$$

其中 $(\Delta x_k)=(x_k-x_{k-1})$，$k\in N$。Kizmaz 证明得到上面这些差分序列空间是赋范空间，其中范数的定义为 $\|x\|=|x|+\|(\Delta x_k)\|_\infty$。

Et 和 Colak 在文献[2]中推广了序列空间的定义，也就是 $c_0(\Delta^m)$，$c(\Delta^m)$，$l_\infty(\Delta^m)$。通过计算它等价于 $\sum_{v=0}^{m}(-1)^v\binom{m}{v}x_{k+v}$。Tripathy 和 Esi 在文献[3]中推广了序列空间的另一种定义形式，即 $c_0(\Delta_r)$，$c(\Delta_r)$，$l_\infty(\Delta_r)$。Dutta 在文献[4]中定义了差分序列空间 $c_0(\Delta_r^s)$，$c(\Delta_r^s)$，$l_\infty(\Delta_r^s)$ 的相关形式。

在文献[5]中，令 $n\in N$，X 为维数为 d 的实向量空间，且 $n\le d$。定义在 X^n 上的范数形式如果满足下面四条：

1) $\|x_1,x_2,\cdots,x_n\|=0$ 当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性相关的；
2) 对于每个 $(1,2,\cdots,n)$ 的排列 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 有 $\|x_1,x_2,\cdots,x_n\|=\|x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_n}\|$；
3) $\|\alpha x_1,x_2,\cdots,x_n\|=|\alpha|\|x_1,x_2,\cdots,x_n\|$；
4) $\|x+y,x_2,\cdots,x_n\|\le\|x,x_2,\cdots,x_n\|+\|y,x_2,\cdots,x_n\|$.

则称 $(X,\|\cdot,\cdots,\cdot\|)$ 为 n-赋范空间，函数 $\|\cdot,\cdots,\cdot\|$ 为 n-范数。

如果对于 X 中某个序列 (x_k) 来说，对任意的 $u_2,\cdots,u_n\in X$ 有式子

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k-x,u_2,\cdots,u_n\|=0$$

成立，其中 $x\in X$，那么称 (x_k) 收敛于 x。

如果对于 X 中某个序列 (x_k) 来说，对任意的 $u_2,\cdots,u_n\in X$ 有式子

$$\lim_{k,l\to\infty}\|x_k-x_l,u_2,\cdots,u_n\|=0$$

成立，那么称 (x_k) 为 X 中的柯西列。如果对于 X 中任意柯西列都收敛，那么 X 称作完备的 n-赋范空间，任意的一个完备的 n-赋范空间称作 n-巴拿赫空间。

2. 预备工作

在文献[6]中，Zeller 介绍了 BK 空间为复数序列下的巴拿赫空间，并验证得到该范数是连续的，即当 $n\to\infty$ 时，若有 $|x_k^n-x_k|\to 0$ 时，有 $\|x^n-x\|\to 0$。在 1972 年，Powell 和 Shah 在文献[7]中定义了参数为 r 的欧拉矩阵，其中 $E^r=(e_{n,k}^r)$，$0<r<1$。

$$e_{n,k}^{r}=\begin{cases}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}(1-r)^{n-k}r^{k} & 0\le k\le n\\ 0 & k>n\end{cases}$$

在 2006 年，Altay，Basar 和 Mursaleen 在文献[8] [9]中定义了欧拉序列空间 e_0^r， e_c^r， e_∞^r：

$$e_0^r=\left\{x=(x_k)\in w:\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}(1-r)^{n-k}r^{k}x_k=0\right\}$$

$$e_c^r=\left\{x=(x_k)\in w:\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}(1-r)^{n-k}r^{k}x_k\text{ 存在}\right\}$$

$$e_\infty^r=\left\{x=(x_k)\in w:\sup_{n\in N}\left|\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}(1-r)^{n-k}r^{k}x_k\right|<\infty\right\}$$

2006 年，Altay 和 Polat 在文献[10]中定义了差分序列空间 $e_0^r(\nabla)$， $e_c^r(\nabla)$， $e_\infty^r(\nabla)$：

$$e_0^r(\nabla)=\left\{x=(x_k)\in w:(\nabla x_k)\in e_0^r\right\}$$

$$e_c^r(\nabla)=\left\{x=(x_k)\in w:(\nabla x_k)\in e_c^r\right\}$$

$$e_\infty^r(\nabla)=\left\{x=(x_k)\in w:(\nabla x_k)\in e_\infty^r\right\}$$

其中 $(\nabla x_k)=(x_k-x_{k-1})$， $k\in N$。在 2007 年，Polat 和 Basar 在文献[10]中定义了矩阵 $\nabla^{(m)}=\left(\delta_{n,k}^{(m)}\right)$，也就是

$$\delta_{n,k}^{(m)}=\begin{cases}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix}m\\n-k\end{pmatrix} & \max\{0,n-m\}\le k\le n\\ 0 & 0\le k<\max\{0,n-m\}\ k>n\end{cases}$$

因此，Polat 和 Basar 进一步给出了相关序列空间的定义：

$$e_0^r\left(\nabla^{(m)}\right)=\left\{x=(x_k)\in w:\left(\nabla^{(m)}x_k\right)\in e_0^r\right\};$$

$$e_c^r\left(\nabla^{(m)}\right)=\left\{x=(x_k)\in w:\left(\nabla^{(m)}x_k\right)\in e_c^r\right\};$$

$$e_\infty^r\left(\nabla^{(m)}\right)=\left\{x=(x_k)\in w:\left(\nabla^{(m)}x_k\right)\in e_\infty^r\right\}.$$

令 $(X,\|\cdot,\cdots,\cdot\|)$ 为 n-赋范实线性空间， $w(n-X)$ 为实值序列， m 为非负整数且 $1\le p<\infty$，对于任意的 $z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}\in X$ 定义了下面的欧拉序列空间：

$$E_p\left(e_p^r\left(\nabla^{(m)}\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)=\left\{(x_k)\in w(n-X):\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left\|\frac{1}{i}\left|\sum_{k=1}^{i}e_p^r\left(\nabla^m x_k\right)\right|,z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|\right)^p\right\}<\infty$$

$$E_\infty\left(e_\infty^r\left(\nabla^{(m)}\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)=\left\{(x_k)\in w(n-X):\left(\sup_i\left\|\frac{1}{i}\left|\sum_{k=1}^{i}e_\infty^r\left(\nabla^m x_k\right)\right|,z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|\right)\right\}<\infty$$

$$E_c\left(e_c^r\left(\nabla^{(m)}\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)=\left\{(x_k)\in w(n-X):\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left\|\frac{1}{i}\left|\sum_{k=1}^{i}e_c^r\left(\nabla^m x_k\right)\right|,z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|\right)^p\right\}<\infty$$

$$E_0\left(e_0^r\left(\nabla^{(m)}\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)=\left\{(x_k)\in w(n-X):\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left\|\frac{1}{i}\left|\sum_{k=1}^{i}e_0^r\left(\nabla^m x_k\right)\right|,z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|\right)^p\right\}=0$$

3. 结论

定理 3.1 令 X 是 n-巴拿赫空间，那么可以推得 $E\left(e^r\left(\nabla^m\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)$ 也是 n-巴拿赫空间。对于任意的 $z_1,z_2,\cdots,z_n\in X$，$x^1,x^2,\cdots,x^n$ 线性无关，其范数定义形式为 $f(x)=\sum_{k=1}^{m}\left\|e^r x_k,z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|+h\left(e^r\left(\nabla^m x_k\right)\right)$，如果 $x^1,x^2,\cdots,x^n$ 线性相关，那么 $\left\|x^1,x^2,\cdots,x^n\right\|_E^{\nabla^m}=0$。

证明：首先容易证得 $E\left(e^r\left(\nabla^m\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)$ 是一个度量空间，所以我们可以在空间 $E\left(e^r\left(\nabla^m\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)$ 中选柯西列 $\left(e^r x^s\right)_{s=1}^{\infty}$，对于任意的 $s\in N$，都有 $x^s=\left(x_i^s\right)_{i=1}^{\infty}=\left(x_1^s,x_2^s,x_3^s,\cdots\right)$。对于任意给定的 ε，存在 n_0 使得当 $s,t\ge n_0$ 时 $\left\|e^r x^s-e^r x^t,u^2,\cdots,u^n\right\|_E^{\nabla^m}<\varepsilon$，对于任意的 $u^2,\cdots,u^n\in E\left(e^r\left(\nabla^m\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)$，可得 $\sum_{k=1}^{m}\left\|e^r x_k-e^r x_k^t,z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|+h\left(e^r\left(\nabla^m x_k\right)\right)<\varepsilon$，那么也就有

$$\sum_{k=1}^{m}\left\|e^r x_k-e^r x_k^t,z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|<\varepsilon \text{ 和 } h\left(e^r\left(\nabla^m x_k\right)\right)<\varepsilon$$

成立。因此，对于所有的 k，由 $\sum_{k=1}^{m}\left\|e^r x_k-e^r x_k^t,z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|<\varepsilon$ 可得 $\left(e^r x_k^s\right)$ 是 X 中的柯西列，又因为 X 是 n-巴拿赫空间，所以 $\left(e^r x_k^s\right)$ 在 X 中收敛，即 $\lim_{s\to\infty}e^r x_k^s=e^r x_k$。

接下来，由 $h\left(e^r\left(\nabla^m x_k\right)\right)<\varepsilon$ 可知 $e^r\left(\nabla^m x_k\right)$ 是 E 中柯西列，且是完备的，对于所有的 $k\in N$，有 $\lim_{s\to\infty}e^r\left(\nabla^m x_k\right)=y_k$，特别地，当 $k=1$ 时，$\lim_{s\to\infty}e^r\left(\nabla^m x_k\right)=\lim_{s\to\infty}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}(1-r)^{n-v}r^v x_{1+mv}=y_1$，$\lim_{s\to\infty}e^r x_k^s=e^r x_k$，其中 $k=1+mv$，$v=0,1,\cdots,n-1.$

最后，有 $\lim_{s\to\infty}e^r x_{1+mv}^s=e^r x_{1+m}$，也就等价于

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m}\left|e^r x_r^s-e^r x_k^t\right|+h\left(e^r\nabla^m\left(x_k^s-x_k^t\right)\right)<\varepsilon\\ &\Rightarrow\lim_{s\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\left|e^r x_r^s-e^r x_k^t\right|+h\left(e^r\nabla^m\left(x_k^s-x_k^t\right)\right)<\varepsilon\\ &\Rightarrow\sum_{k=1}^{m}\left|e^r x_r^s-e^r x_k^t\right|+h\left(e^r\nabla^m\left(x_k^s-x_k^t\right)\right)\le\varepsilon\end{aligned}$$

其中 $u^2,\cdots,u^n\in E\left(e^r\left(\nabla^m\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)$，$f\left(e^r x^s-e^r x\right)\le\varepsilon$。因此，$\left(e^r x^s-e^r x\right)\in E\left(e^r\left(\nabla^m\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)$。根据 $E\left(e^r\left(\nabla^m\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)$ 是线性空间，可以得出 $e^r x=e^r x^s-\left(e^r x^s-e^r x\right)\in E\left(e^r\left(\nabla^m\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)$。最终证得 $E\left(e^r\left(\nabla^m\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)$ 是完备的 n-赋范空间。

推论 3.2 如果 X 是 n-巴拿赫空间，那 $E_p\left(e_p^r\left(\nabla^m\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)$，$E_c\left(e_c^r\left(\nabla^m\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)$，$E_\infty\left(e_\infty^r\left(\nabla^m\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)$，$E_0\left(e_0^r\left(\nabla^m\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)$ 是 n-BK 空间。

定理 3.3 空间 $E\left(e^r\left(\nabla^{m-1}\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)\subset E\left(e^r\left(\nabla^m\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)$，或者 $E\left(e^r\left(\nabla^i\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)\subset E\left(e^r\left(\nabla^m\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)$，$i=1,2,\cdots,m-1$。其中 $E=E_p,E_c,E_\infty,E_0$。

证明：下面以 $E=E_p$ 为例进行推导，令 $x=\left(x_k\right)\in E_p\left(e_p^r\left(\nabla^{m-1}\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)$. 对于非零的 $z_1,\cdots,z_{n-1}\in X$ 可以得到 $\lim_{i=1}^{\infty}\left(\left\|\frac{1}{i}\left|\sum_{k=1}^{i}e_p^r\left(\nabla^{m-1}x_k\right)\right|,z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|\right)<\infty$，接下来，进一步可以推得

$$\left\|\frac{1}{i}\left|\sum_{k=1}^{i}e_p^r\left(\nabla^m x_k\right)\right|,z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|\le\left\|\frac{1}{i}\left|\sum_{k=1}^{i}e_p^r\left(\nabla^{m-1}x_k\right)\right|,z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|+\left\|\frac{1}{i}\left|\sum_{k=1}^{i}e_p^r\left(\nabla^{m-1}x_{k+1}\right)\right|,z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|.$$

根据不等关系式 $|a+b|^p\le 2^p\left(|a|^p+|b|^p\right)$，其中 $1\le p<\infty$，上面不等式化简：

$$\left(\left\|\frac{1}{i}\left|\sum_{k=1}^{i} e_p^r\left(\nabla^m x_k\right)\right|, z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|\right)^p$$
$$\le 2^p\left(\left\|\frac{1}{i}\left|\sum_{k=1}^{i} e_p^r\left(\nabla^{m-1} x_k\right)\right|, z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|\right)^p+\left(\left\|\frac{1}{i}\left|\sum_{k=1}^{i} e_p^r\left(\nabla^{m-1} x_{k+1}\right)\right|, z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|\right)^p .$$

那么，对于任意得正整数 r，可以得到

$$\sum_{i=1}^{r}\left(\left\|\frac{1}{i}\left|\sum_{k=1}^{i} e_p^r\left(\nabla^m x_k\right)\right|, z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|\right)^p$$
$$\le 2^p\sum_{i=1}^{r}\left(\left\|\frac{1}{i}\left|\sum_{k=1}^{i} e_p^r\left(\nabla^{m-1} x_k\right)\right|, z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|\right)^p+\sum_{i=1}^{r}\left(\left\|\frac{1}{i}\left|\sum_{k=1}^{i} e_p^r\left(\nabla^{m-1} x_{k+1}\right)\right|, z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|\right)^p .$$

最后，令 $r\to\infty$，得到结果 $\sum_{i=1}^{r}\left(\left\|\frac{1}{i}\left|\sum_{k=1}^{i} e_p^r\left(\nabla^m x_k\right)\right|, z_1,\cdots,z_{n-1}\right\|\right)^p<\infty$。也就是说 $E\left(e^r\left(\nabla^{m-1}\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)\subset E\left(e^r\left(\nabla^m\right),\|\cdot,\cdots,\cdot\|\right)$。

参考文献

[1] Kizmaz, H. (1981) On Certain Sequence Spaces. *Canadian Mathematical Bulletin*, **24**, 169-176. https://doi.org/10.4153/CMB-1981-027-5

[2] Et, M. and Colak, R. (1995) On Some Generalized Difference Sequence Spaces. *Soochow Journal Mathematics*, **21**, 377-386.

[3] Tripathy, B.C. and Esi, A. (2006) A New Type of Difference Sequence Spaces. *International Journal of Environmental Science and Technology*, **1**, 11-14.

[4] Dutta, H. (2009) Characterization of Certain Matrix Classes Involving Generalized Difference Spaces. *Applied Sciences*, **11**, 60-67.

[5] Misiak, A. (1989) Orthogonality and Orthonormality in *n*-Inner Product Spaces. *Mathematische Nachrichten*, **143**, 249-261. https://doi.org/10.1002/mana.19891430119

[6] Zeller, K. (1958) Theorie der Limitierungsverfahren. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-52767-8

[7] Powell, R.E. and Shah, S.M. (1972) Summability Theory and Its Applications. Van Nostrand-Reinhold Company, London.

[8] Altay, B., Basar, F. and Mursaleen, M. (2006) On the Euler Sequence Spaces Which Include the Spaces l_p and l_∞ I. *Information Sciences*, **176**, 1450-1462. https://doi.org/10.1016/j.ins.2005.05.008

[9] Mursaleen, M., Basar, F. and Altay, B. (2006) On the Euler Sequence Spaces Which Include the Spaces l_p and l_∞ II. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **65**, 707-717. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.09.038

[10] Altay, B. and Polat, H. (2006) On Some New Euler Difference Sequence Spaces. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **30**, 209-220.