

指数保费准则下带模糊厌恶的最优投资策略

李娜*, 王伟

天津师范大学, 数学科学学院, 天津

Email: *18332679381@163.com

收稿日期: 2021年5月15日; 录用日期: 2021年6月1日; 发布日期: 2021年6月17日

摘要

研究保险公司具有模糊厌恶情形下的最优投资问题。在近似扩散风险模型中, 金融市场同时存在无风险投资和风险投资。考虑到金融市场具有复杂性的特点以及保险公司对自己的业务熟悉, 假设金融市场模型存在模糊性而保险公司模型不存在模糊性, 其中保险公司的保费收入通过指数保费原则计算。在最大化保险公司终端财富的期望效用值的目标下, 根据动态规划原理方法给出了对应最优控制问题的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程以及目标值函数, 求出了值函数的解析解以及相应的最优投资策略的表达式。最后给出了数值算例阐述不同参数对最优投资策略值的影响。

关键词

模糊厌恶, 指数保费原则, Hamilton-Jacobi-Bellman 方程, 投资, 最优策略

Optimal Investment Strategy with Ambiguity Aversion under the Exponential Premium Principle

Na Li*, Wei Wang

School of Mathematical Sciences, Tianjin Normal University, Tianjin

Email: *18332679381@163.com

Received: May 15th, 2021; accepted: Jun. 1st, 2021; published: Jun. 17th, 2021

*通讯作者。

Abstract

The problem of optimal investment in the case of insurance companies with ambiguity aversion is studied. In the approximate diffusion risk model, there are risk-free investments and risky investments in the financial market. Considering the complexity of the financial market and the familiarity of the insurance company with its own business, it is assumed that there is ambiguity in the financial market model and no ambiguity in the insurance company model, where the premium income of the insurance company is calculated by the exponential premium principle. Under the objective of maximizing the expected utility value of the insurance company's terminal wealth, the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation and the objective value function corresponding to the optimal control problem are given according to the dynamic programming principle approach, and the analytical solutions of the value function and the expressions of the corresponding optimal investment strategies are derived. Finally, numerical examples are given to illustrate the effect of different parameters on the value of the optimal investment strategy.

Keywords

Ambiguity Aversion, Exponential Premium Principle, Hamilton-Jacobi-Bellman Equation, Investment, Optimal Strategy

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来, 最优控制问题在保险精算领域中越来越受到重视。在经典 Cramér-Lundberg 风险模型下, 保险公司的保费收入大多使用常数或期望值保费原则来计算, 然而实际中保费收入不一定呈线性关系, 所以指数保费计算准则在数学和实践方面占有越来越重要的地位。Chen [1]在指数保费原则下, 分别计算出有界分红和无界分红两种情况下的最优分红和再保险问题的解析解。在此基础上, Chen [2]将此问题推广到风险厌恶系数不同的两类再保险人的情况中。Yao [3]也在 Chen [1]的基础上计算出加入注资后的最优策略问题的解。投资则是保险公司为增加其财富的常见手段之一, 不同情形下的最优投资问题被广泛研究。例如, Brachetta [4]在随机环境中, 给出了扩散近似模型下的最优投资与再保险策略。Zhou [5]在扩散近似模型下研究服从非齐次复合泊松过程的最优投资和保费控制问题。在实际情况中, 由于金融市场的风险性和复杂性的特点, 保险公司对金融市场的认识可能存在模糊。Chen [6]在跳-扩散模型中, 研究了再保险人是风险厌恶时保险公司的最优投资和再保险策略问题。Sun [7]在模型中考虑了模糊性, 给出稳健最优投资和再保险策略, 其中保险人和再保险人的保费均由方差保费准则计算。Chen [8]在经典风险模型中加入扩散扰动并采用指数保费原则, 计算出再保险公司具有风险厌恶时的最优投资和比例再保险问题的解。Li [9]以最小化破产概率为目标研究了带有模糊性的最优再保险问题。Zou [10]讨论了模糊厌恶下最优分红问题。由于保险公司对金融市场信息的了解可能存在不完整或缺失, 从而导致概率的不确定性, 由此就产生了模糊性, 而规避模糊性的行为即为模糊性厌恶。考虑在模型中加入对金融市场的模糊厌恶更加贴合实际。Liu [11]将保险公司保费收入和风险投资资产视为动态变化的过程, 研究了带有模糊厌恶的最优投资和最优保费控制问题。在 Liu [11]的启发下, 本文中保险公司的保费收入由指数保费原

则计算, 投资策略被视为一个动态变化过程且金融市场存在模糊性。运用动态规划原理给出最优控制问题的 HJB 方程, 并求得 HJB 方程的解以及相应的最优投资策略的表达式。

2. 模型建立

2.1. 保险市场的盈余模型

定义在完备的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中, Cramér-Lundberg 风险模型下保险公司的盈余过程可以表示为

$$R(t) = x + pt - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

其中 $x > 0$ 表示保险公司的初始盈余, $p > 0$ 表示单位时间内的保费收入, Y_i 表示保险公司第 i 次的索赔额大小, 假设 $\{Y_i\}_{i \geq 0}$ 是独立同分布的随机变量序列, 其一阶矩和二阶矩分别是 $\mathbb{E}Y_i = \mu_1 < \infty$, $\mathbb{E}Y_i^2 = \sigma^2 < \infty$, 其中 \mathbb{E} 表示求随机变量的期望。 $M_Y(r) = \mathbb{E}(e^{rY})$ 为 Y 的矩量母函数, 通常假设 Cramér-Lundberg 条件成立, 即存在 $0 < r_\infty \leq \infty$ 使得 $M_Y(r) < \infty$ 且 $\lim_{r \rightarrow r_\infty} M_Y(r) = +\infty$ 。 N_t 是服从强度为 λ ($\lambda > 0$) 的 Poisson 过程, 表示到 t 时刻之前的索赔次数。假设 $\{N_t\}$ 与 $\{Y_i\}_{i \geq 0}$ 是两个相互独立的随机过程。

假设保险公司采取指数保费准则, 即风险 Y 对应的保费为

$$\Pi_a(Y) = \frac{1}{a} \ln \mathbb{E}(e^{aY}),$$

其中 $a > 0$ 表示风险厌恶系数。进一步假设保险公司存在固定的交易费用 $c > 0$, 并将盈余过程用漂移系数和扩散系数相等的扩散过程近似逼近, 则保险公司的盈余过程表示为

$$dR(t) = \left[\frac{\lambda}{a} (M_Y(a) - 1) - \lambda \mu_1 - c \right] dt + \sqrt{\lambda} \sigma dB_1(t), \quad R(0) = x. \quad (1)$$

其中 $B_1(t)$ 为标准布朗运动。

2.2. 金融市场的资产模型

假设金融市场存在无风险资产和风险资产, 其中无风险资产投资的利率为 $r > 0$, 其价格过程表示为

$$dP_0(t) = rP_0(t)dt.$$

风险资产市场的价格过程表示为

$$dP_1(t) = \alpha P_1(t)dt + \beta P_1(t)dB_2(t),$$

其中 $\alpha > 0$ 和 $\beta > 0$ 为常值, $B_2(t)$ 是一个标准布朗运动。假设满足条件 $\alpha - r > 0$ 以避免平凡情况。令 ρ 表示保险市场和金融市场的相关性, 即 $Cov(B_1(t), B_2(t)) = \rho t$, 其中 Cov 表示求协方差。为方便计算, 令 $B_2(t) = a_1 B_1(t) + a_2 B_3(t)$, 其中 $B_1(t)$ 和 $B_3(t)$ 是相互独立的标准布朗运动。由以上关系可确定系数 $a_1 = \rho$, $a_2 = \sqrt{1 - \rho^2}$ 。故

$$dB_2(t) = \rho dB_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dB_3(t).$$

保险公司可以控制其投资在风险市场上的资产, 令 π_t 表示在时刻 t 时保险公司投资在风险资产上的资金。结合(1)式, 将投资策略加入到盈余过程后变为

$$dR^\pi(t) = \left[rR^\pi(t) + \frac{\lambda}{a} (M_Y(a) - 1) - \lambda \mu_1 - c + \pi_t (\alpha - r) \right] dt + (\sqrt{\lambda} \sigma + \beta \rho \pi_t) dB_1(t) + \beta \sqrt{1 - \rho^2} \pi_t dB_3(t), \quad R^\pi(0) = x. \quad (2)$$

保险公司的目标是最大化终端财富的期望效用, 即目标函数表示为

$$V^\pi(x) = \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}^P \left[U \left(R^\pi(T) \right) \middle| R^\pi(t) = x \right], \quad (3)$$

其中 $\mathbb{E}^P[\cdot]$ 表示在概率测度 P 下求期望, $U(\cdot)$ 表示效用函数, π 为可行策略, Π 表示所有可行策略的集合。

2.3. 金融市场的模糊性假设

为求解(3)式, 保险公司需要一个很强的假设, 即要准确地知道概率测度 P 。但由于保险公司不能保证概率测度 P 的准确性, 所以考虑用其他的概率测度来表示, 即替代模型。本文仅考虑金融市场存在模糊性, 并假设保险公司的盈余过程(1)是准确的。记 \mathcal{Q} 表示所有满足条件的替代模型集合。参考 Klebaner [12], 由布朗运动的 Girsamov 定理, 可知在 $0 \leq t \leq T$ 以及 $Q \in \mathcal{Q}$ 时, 概率测度 P 下的标准布朗运动 $B_3(t)$ 的 Radon-Nikodym 导数满足

$$\frac{dQ}{dP}(B_3[0, T]) = \exp \left\{ \int_0^T m(s) dB_3(s) - \frac{1}{2} \int_0^T m(s)^2 ds \right\},$$

其中等号右边为域流 \mathcal{F}_t 生成的 P -鞅, $m(t)$ 是一个适应过程且满足 Novikov 条件, 即

$$\mathbb{E}^P \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T (m(s))^2 ds \right) \right] < \infty.$$

由 Girsamov 定理可知在概率测度 P 下的标准布朗运动 $B_3(t)$ 满足

$$dB_3(t) = m(t)dt + dB_3^Q(t), \quad (4)$$

其中 $B_3^Q(t)$ 为概率测度 Q 下的标准布朗运动, 以上变换消除了布朗运动的漂移项, 更加便于后续计算。

本文用相对熵来描述替代模型和参考模型之间的差异, 根据 Liu [11], 得到 P 和 Q 之间的相对熵大小表示为

$$\begin{aligned} H(Q \| P) &= \mathbb{E}^Q \left[\ln \frac{dQ}{dP} \right] = \mathbb{E}^Q \left\{ \int_0^T m(s) dB_3(s) - \frac{1}{2} \int_0^T (m(s))^2 ds \right\} \\ &= \mathbb{E}^Q \left\{ \int_0^T m(s) dB_3^Q(s) + \frac{1}{2} \int_0^T (m(s))^2 ds \right\} \\ &= \int_0^T \frac{1}{2} (m(s))^2 ds, \end{aligned}$$

上式中最后一个等号成立是因为 $B_3^Q(t)$ 为标准的布朗运动, 所以均值为零。记 $Z(t) = \frac{1}{2} (m(t))^2$, 则 $Z(t)$ 可以表示成相对熵 $H(Q \| P)$ 的值。

假设保险公司采用替代模型而拒绝参考模型时会产生惩罚, 记 ξ 表示对参考模型 P 的信任程度, ξ 越大表示保险公司更相信参考模型, 此时使用替代模型将会受到更大的惩罚。本文考虑 $0 < \xi < \infty$ 的情形, 即保险公司对参考模型既不是一无所知(当 $\xi \rightarrow 0$ 时)也不是非常有信心(当 $\xi \rightarrow \infty$ 时)。令 $\phi(\cdot)$ 表示一个量级转换函数, 其将惩罚的量级转换成和值函数 $V(t, x)$ 为同一量级, 从而衡量惩罚的大小。

在最大化终端财富的期望效用的目标下, 在最优可行策略 π_t^* 下的值函数可以表示为

$$V(t, x) = \sup_{\pi \in \Pi} \inf_{m \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}_{t,x}^Q \left[\int_t^T \xi \phi \left(V(s, R^\pi(s)) \right) Z(s) ds + U \left(R^\pi(T) \right) \middle| R^\pi(t) = x \right], \quad (5)$$

其中 \inf 表示保险公司寻求模糊程度最小的稳健策略。 \sup 表示在稳健的概率测度下最大化终端财富的期

望效用值。

3. 求解值函数及最优策略

指数效用函数为

$$U(x) = -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma x), \quad (6)$$

其中 $\gamma > 0$ 。将(4)式代入(2)式中, 整理得到在概率测度 Q 下的财富过程

$$\begin{aligned} dR^\pi(t) = & \left[rR^\pi(t) + \frac{\lambda}{a}(M_Y(a)-1) - \lambda\mu_1 - c + \pi_t(\alpha - r) + \sqrt{1-\rho^2}\beta\pi_t m \right] dt \\ & + (\sqrt{\lambda}\sigma + \beta\rho\pi_t) dB_1(t) + \beta\sqrt{1-\rho^2}\pi_t dB_3^Q(t), \quad R^\pi(0) = x. \end{aligned} \quad (7)$$

定义无穷小微分算子

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\pi f(t, x) = & f_t(t, x) + \left[rx + \frac{\lambda}{a}(M_Y(a)-1) - \lambda\mu_1 - c + \pi_t(\alpha - r) + \sqrt{1-\rho^2}\beta\pi_t m \right] f_x(t, x) \\ & + \frac{1}{2} \left[\beta^2 \pi_t^2 + \lambda\sigma^2 + 2\sqrt{\lambda}\sigma\rho\beta\pi_t \right] f_{xx}(t, x). \end{aligned}$$

其中 f_t, f_x, f_{xx} 分别表示函数 $f(t, x)$ 对 t 求一阶偏导, 对 x 求一阶和二阶偏导。

定义 1 对于任意策略 π , 若满足:

- 1) $\pi = \{\pi_t, 0 \leq t \leq T\}$ 可料且 $\mathbb{E}^Q \left[\int_0^T \pi_s^2 ds \right] < \infty$, $T < \infty$, $Q \in \mathcal{Q}$;
- 2) 随机微分方程(7)有唯一强解。

则称其为可行策略, 并用 Π 表示所有可行策略的集合。

参考 Fleming [13] 的 1.1.4 和 1.1.5 节, 利用动态规划原理可以得到以下 HJB 方程

$$\sup_{\pi \in \Pi} \inf_{m \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathcal{L}^\pi V(t, x) + \frac{1}{2} \xi m^2 \phi(V(t, x)) \right\} = 0. \quad (8)$$

边界条件为 $V(t, x) = U(x)$ 。

定理 1 (5)式中的值函数 $V(t, x)$ 关于 x 是一个单调递增的、二次连续可微的凹函数。

证明 参见 Zhou [5] 定理 3.1 的证明过程。

注 1 不失一般性, 本文为使值函数和最优策略的表达式得到更简明的呈现, 故将效用函数用(6)的形式表示。若使用二次效用函数(quadratic utility function)或对数指数函数(logarithmic utility function)则会产生更难的计算问题。

注 2 对一般的风险资产 w , 若有 $V(\mathbb{E}(w)) \geq \mathbb{E}(V(w))$, 则称该投资者为风险厌恶型的。即定理一中的值函数是风险厌恶型的。

$$\text{记符号 } M = -\frac{\lambda}{a}(M_Y(a)-1) + \lambda\mu_1 + c, \quad N = 1 + \frac{1-\rho^2}{\xi}, \quad L = \frac{(\alpha - r)}{\beta}, \quad \psi = M + \frac{L\sqrt{\lambda}\sigma\rho}{N},$$

$$K(t) = \exp[r(T-t)].$$

定理 2 对于最优控制问题(3), 令 $\phi(V(t, x)) = -V(t, x)$ 且保险公司采用指数效用函数(6)。那么最优投资策略为

$$\pi_t^* = \frac{L}{\beta N \gamma K(t)} - \frac{\sqrt{\lambda}\sigma\rho}{\beta N}, \quad t < T.$$

以及对应的值函数表达式为

$$V(t, x) = -\frac{1}{\gamma} \exp\left\{-\gamma\left\{\exp[r(T-t)][x-e(t)]+h(t)\right\}\right\}, t < T.$$

其中

$$h(t) = \frac{L^2}{2\gamma N}(T-t) - \psi\{(rt+1-T)K(t)-(rT+1-T)\} - \frac{1}{4r}\lambda\sigma^2\left(1-\frac{\rho^2}{N}\right)\gamma[1-K^2(t)],$$

$$e(t) = \left(M + \frac{L\sqrt{\lambda}\sigma\rho}{N}\right)(T-t).$$

证明 为求得 HJB 方程(8)的显式解, 首先假设 $V(t, x) < 0$, 并取罚金函数 $\phi(V(t, x)) = -V(t, x) > 0$, 将无穷小微分算子和罚金函数代入(8)式得

$$\sup_{\pi \in \Pi} \inf_{m \in \mathcal{Q}} \left\{ V_t(t, x) + \left(rx + \frac{\lambda}{a}(M_Y(a)-1) - \lambda\mu_1 - c + \pi_t(\alpha-r) + \sqrt{1-\rho^2}\beta\pi_t m \right) V_x(t, x) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\beta^2\pi_t^2 + \lambda\sigma^2 + 2\sqrt{\lambda}\sigma\rho\beta\pi_t)V_{xx}(t, x) - \frac{1}{2}\xi m^2 V(t, x) \right\} = 0. \tag{9}$$

假设 m^* 使(9)式等号左侧取得最小值, 对(9)中 m 求一阶导数并令其等于 0, 得到

$$m^* = \frac{\sqrt{1-\rho^2}\beta\pi_t}{\xi V(t, x)} V_x(t, x). \tag{10}$$

再将(10)代回到(9)式中, 则有

$$\sup_{\pi \in \Pi} \left\{ V_t(t, x) + \left[rx + \frac{\lambda}{a}(M_Y(a)-1) - \lambda\mu_1 - c + \pi_t(\alpha-r) \right] V_x(t, x) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\beta^2\pi_t^2 + \lambda\sigma^2 + 2\sqrt{\lambda}\sigma\rho\beta\pi_t)V_{xx}(t, x) + \frac{(1-\rho^2)\beta^2\pi_t^2}{2\xi V(t, x)}(V_x(t, x))^2 \right\} = 0. \tag{11}$$

根据边界条件 $V(T, x) = U(x)$, 猜测值函数表达式的具体形式为

$$V(t, x) = -\frac{1}{\gamma} \exp\left\{-\gamma\left\{\exp[r(T-t)][x-e(t)]+h(t)\right\}\right\}. \tag{12}$$

其中 $e(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 均是关于 t 的函数。由 $V(T, x) = U(x)$, 令 $e(T) = h(T) = 0$ 。可以计算出

$$V_t(t, x) = V(t, x) \left\{ -\gamma \left[-\exp[r(T-t)][r(x-e(t)) + e'(t)] + h'(t) \right] \right\}, \tag{13}$$

$$V_x(t, x) = -V(t, x) \gamma \exp[r(T-t)], \tag{14}$$

$$V_{xx}(t, x) = V(t, x) \gamma^2 \exp[2r(T-t)]. \tag{15}$$

将(13)~(15)式代入(11)中, 再同时除以 $V(t, x) < 0$, 整理可得

$$\inf_{\pi \in \Pi} \left\{ -\gamma h'(t) + \frac{1}{2} \left[\beta^2\pi_t^2 \left(1 + \frac{1-\rho^2}{\xi} \right) + \lambda\sigma^2 + 2\sqrt{\lambda}\sigma\rho\beta\pi_t \right] \gamma^2 \exp[2r(T-t)] \right. \\ \left. + \left(e'(t) - re(t) - \frac{\lambda}{a}(M_Y(a)-1) + \lambda\mu_1 + c - \pi_t(\alpha-r) \right) \gamma \exp[r(T-t)] \right\} = 0. \tag{16}$$

根据极小值的一阶条件, 对(16)中的 π_t 求一阶导数, 并令其等于 0, 有

$$\pi_t^* = \frac{\alpha - r}{\beta^2 \left(1 + \frac{1 - \rho^2}{\xi}\right) \gamma \exp[r(T-t)]} - \frac{\sqrt{\lambda} \sigma \rho}{\beta \left(1 + \frac{1 - \rho^2}{\xi}\right)}. \quad (17)$$

再将(17)代回到(16)中, 得到

$$\begin{aligned} & \left(e'(t) - re(t) + \lambda \mu_1 + c - \frac{\lambda}{a} (M_Y(a) - 1) + \frac{(\alpha - \gamma) \sqrt{\lambda} \sigma \rho}{\beta \left(1 + \frac{1 - \rho^2}{\xi}\right)} \right) \gamma \exp\{r(T-t)\} \\ & + \frac{1}{2} \frac{(\xi + 1)(1 - \rho^2)}{\xi + 1 + \rho^2} \lambda \sigma^2 \gamma^2 \exp\{2r(T-t)\} - \gamma h'(t) - \frac{(\alpha - \gamma)^2}{2\beta^2 \left(1 + \frac{1 - \rho^2}{\xi}\right)} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

当以下两个等式成立时, 有(18)式成立,

$$\begin{aligned} -h'(t) - \frac{(\alpha - \gamma)^2}{2\gamma\beta^2 \left(1 + \frac{1 - \rho^2}{\xi}\right)} - re(t) \exp\{r(T-t)\} + \frac{1}{2} \frac{(\xi + 1)(1 - \rho^2)}{\xi + 1 + \rho^2} \lambda \sigma^2 \gamma \exp\{2r(T-t)\} &= 0, \\ e'(t) - \frac{\lambda}{a} (M_Y(a) - 1) + \lambda \mu_1 + c + \frac{(\alpha - \gamma) \sqrt{\lambda} \sigma \rho}{\beta \left(1 + \frac{1 - \rho^2}{\xi}\right)} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

将 $e(T) = h(T) = 0$ 代入(19)式, 得到

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{(\alpha - \gamma)^2}{2\gamma\beta^2 \left(1 + \frac{1 - \rho^2}{\xi}\right)} (T-t) - \int_t^T \left[\frac{1}{2} \frac{(\xi + 1)(1 - \rho^2)}{\xi + 1 + \rho^2} \lambda \sigma^2 \gamma K^2(s) - re(s) K(s) \right] ds \\ &= \frac{L^2}{2\gamma N} (T-t) - \psi \{ (rt + 1 - T) K(t) - (rT + 1 - T) \} - \frac{1}{4r} \lambda \sigma^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{N}\right) \gamma [1 - K^2(t)], \\ e(t) &= \left(-\frac{\lambda}{a} (M_Y(a) - 1) + \lambda \mu_1 + c + \frac{(\alpha - \gamma) \sqrt{\lambda} \sigma \rho}{\beta \left(1 + \frac{1 - \rho^2}{\xi}\right)} \right) (T-t) \\ &= \left(M + \frac{L\sqrt{\lambda} \sigma \rho}{N} \right) (T-t). \end{aligned} \quad (20)$$

证毕。

4. 数值算例

本节给出两种情况下的数值算例, 分别讨论参数 ξ 和 ρ 对最优投资策略 π_t^* 的影响, 设置参数 $r = 0.04$, $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.2$, $\mu_1 = 0.1$, $\lambda = 0.04$, $\sigma = 0.15$, $\gamma = 1.5$, $T = 100$ 。

4.1. 信任程度对最优投资策略的影响

本节阐述了保险公司对参考模型的信任程度对最优策略的影响。如图 1 所示, 当保险市场和金融市

场呈负相关(即 $\rho < 0$)时, 固定 $\rho = -0.7$ 并取 ξ 依次为 0.2, 1, 10, 1000, 保险公司对参考模型的信任程度 ξ 越大对应的最优投资策略值则越大, 并且影响程度随时间增加而增大。当保险和金融市场相互独立(即 $\rho = 0$)时, 开始时都采用相同的投资策略, 随后 ξ 越大对应的投资策略值越大。当保险市场和金融市场正相关(即 $\rho > 0$)时, 固定 $\rho = 0.3$ 并取 ξ 依次为 0.2, 1, 10, 1000, 开始时信任程度小对应更大的投资策略值, 但在一段时间之后变为信任程度大对应更大的投资策略值, 且影响程度随时间的推移而增大。此外通过观察 $\rho = 0.3$ 和 $\rho = 0.5$ 的图像可以看出, 当盈余较小时, ρ 越大对投资策略的影响更加明显。

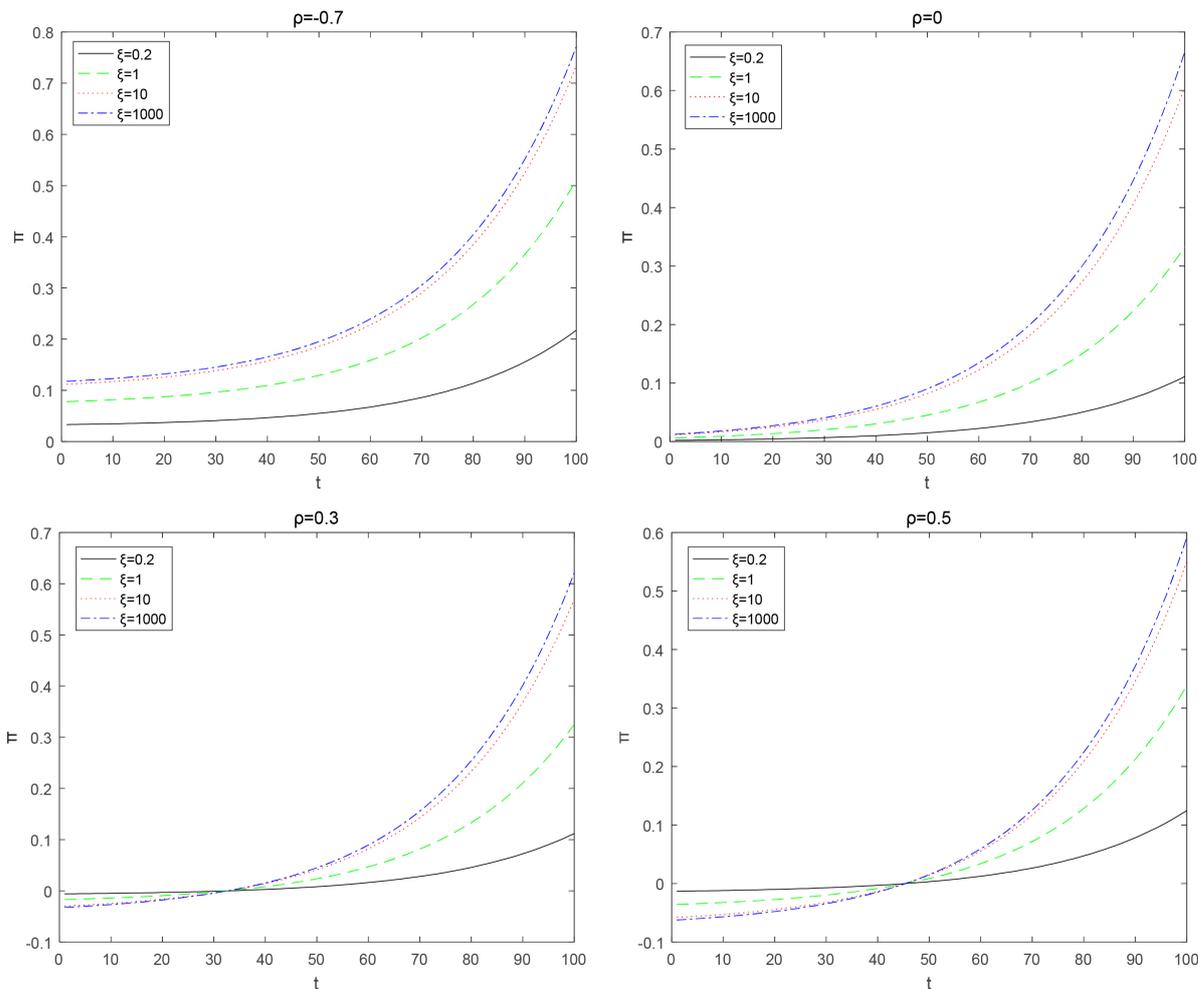


Figure 1. Curve: the impact of parameters ξ on investment strategies when $\rho = -0.7, 0, 0.3, 0.5$

图 1. $\rho = -0.7, 0, 0.3, 0.5$ 时, 信任程度 ξ 对投资策略 π_t^* 的影响

4.2. 相关系数对最优投资策略的影响

本节描述了保险市场和金融市场的相关系数对最优投资策略的影响。如图 2 所示, 取 $\xi = 1000$, ρ 分别取 $-0.7, 0, 0.3, 0.5$ 。无论 ρ 取何值, 对最优投资的影响趋势是相同的, 即不同 ρ 值对应的投资策略的值都随时间增加而增大, 开始时 ρ 对投资策略的影响非常小, 但在一段时间之后影响程度陡然增加。且当 ξ 不变时, ρ 的值越大对应更小的投资策略值, 但是随着时间的增加, 最终的最优投资策略趋于一致。

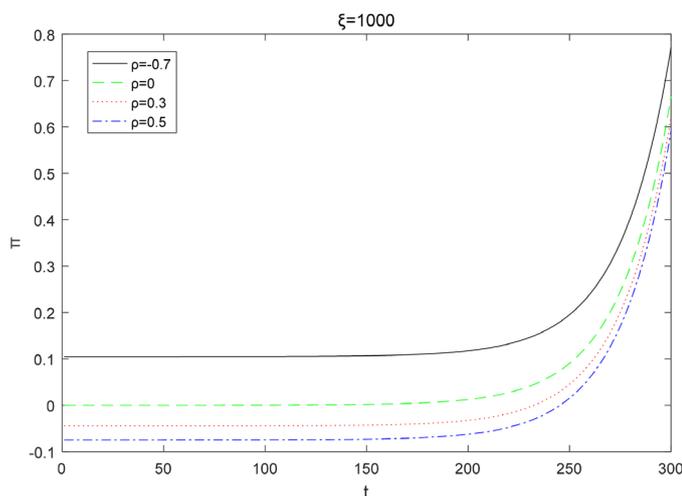


Figure 2. Curve: the impact of parameters ρ on investment strategies when $\zeta = 1000$

图 2. $\zeta = 1000$ 时, 相关系数 ρ 对投资策略 π_t 的影响

5. 结论

本文研究了扩散近似模型下带有模糊厌恶的最优投资策略问题, 并考虑到金融市场可能存在模糊性。保险公司的保费采用的指数保费原则计算, 因此会产生一个非线性随机控制问题。投资则是保险公司为了增加其财富采取的方式, 故目标函数旨在最大化保险公司终端财富的期望效用值。本文使用指数效用函数并给定惩罚函数的具体形式, 从而求出最优控制问题和最优投资策略的表达式。最后给出数值算例阐述了最优投资策略会受到金融市场和保险市场的相关程度以及保险公司对参考模型的信任程度大小的影响。

致 谢

本文作者衷心感谢审稿人的意见和建议。

基金项目

本文受到国家自然科学基金(批准号: 11401436)和天津市高等学校科技发展计划项目(批准号: JW1714)的资助。

参考文献

- [1] Chen, M., Peng, X. and Guo, J. (2013) Optimal Dividend Problem with a Nonlinear Regular-Singular Stochastic Control. *Insurance Mathematics & Economics*, **52**, 448-456. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.02.010>
- [2] Chen, M. and Yuen, K. (2016) Optimal Dividend and Reinsurance in the Presence of Two Reinsurers. *Journal of Applied Probability*, **53**, 554-571. <https://doi.org/10.1017/jpr.2016.20>
- [3] Yao, D., Wang, R. and Xu, L. (2016) Optimal Impulse Control for Dividend and Capital Injection with Proportional Reinsurance and Exponential Premium Principle. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46**, 2519-2541. <https://doi.org/10.1080/03610926.2014.901374>
- [4] Brachetta, M. and Schmidli, H. (2020) Optimal Reinsurance and Investment in a Diffusion Model. *Decisions in Economics and Finance*, **43**, 341-361. <https://doi.org/10.1007/s10203-019-00265-8>
- [5] Zhou, M., Yuen, K.C. and Yin, C.C. (2017) Optimal Investment and Premium Control in a Nonlinear Diffusion Model. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **33**, 945-958. <https://doi.org/10.1007/s10255-017-0709-7>
- [6] Chen, Z. and Yang, P. (2020) Robust Optimal Reinsurance-Investment Strategy with Price Jumps and Correlated Claims. *Insurance: Mathematics and Economics*, **92**, 27-46. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.03.001>

- [7] Sun, Z., Zheng, X. and Xin, Z. (2016) Robust Optimal Investment and Reinsurance of an Insurer under Variance Premium Principle and Default Risk. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **446**, 1666-1686. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.09.053>
- [8] 陈密, 郭军义. 指数保费准则下的最优投资和比例再保险[J]. 数学物理学报, 2014, 34(5): 1161-1172.
- [9] Li, D. and Young, V.R. (2019) Optimal Reinsurance to Minimize the Discounted Probability of Ruin under Ambiguity. *Insurance: Mathematics and Economics*, **87**, 143-152. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2019.04.009>
- [10] Zou, Z. (2020) Optimal Dividend-Distribution Strategy under Ambiguity Aversion. *Operations Research Letters*, **48**, 435-440. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2020.05.004>
- [11] 刘兵, 周明. 模糊厌恶下的最优投资与最优保费策略[J]. 系统工程理论与实践, 2020, 40(7): 1707-1720.
- [12] Klebaner, F.C. (2008) *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. College of Insurance, New York.
- [13] Fleming, W.H. and Soner, H.M. (2006) *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. New York, Springer.