

一类(2 + 1)维KdV方程的精确解及动力学性态

王卓玛, 贵桑拉吉, 娘毛先

中央民族大学理学院, 北京
Email: 1273769255@qq.com

收稿日期: 2021年5月15日; 录用日期: 2021年6月1日; 发布日期: 2021年6月16日

摘要

本文利用指数函数法构造广义二维变系数KdV方程新精确解, 并使用Mathematica软件描绘解的图像, 分析解的性态。获取KdV型方程新的精确解, 观察各个参数对波的影响, 分析各个因素对水波传播状态的影响程度, 为浅水背景下水波的传播问题提供一定参考。

关键词

指数函数法, 齐次平衡法, 二维变系数KdV型方程, Mathematica软件, 孤立波模型

Dynamical Behaviors and Solutions of a Class of (2 + 1)-Dimensional KdV Equations

Zhuoma Wang, Sanglaji Gui, Maoxian Niang

School of Science, Minzu University of China, Beijing
Email: 1273769255@qq.com

Received: May 15th, 2021; accepted: Jun. 1st, 2021; published: Jun. 16th, 2021

Abstract

In this thesis, new exact solutions to generalized two dimensional KdV equation with variable coefficients were constructed with exp-function method and homogeneous balance method, and graphic representation of the solutions was obtained and properties of the solutions were analyzed with Mathematica software. With new exact solutions to KdV equations obtained, the influence of each parameter on waves was observed and the degree to which each factor influences the propagation state of water waves was analyzed, which provided certain reference to problems

regarding the propagation of water waves under shallow-water background.

Keywords

Exp-Function Method, Homogeneous Balance Method, Two Dimensional KdV Equation with Variable Coefficients, Mathematica Software, Solitary Wave Model

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在 1834 年, 英国著名科学家、造船工程师 Russell 在运河河道中观察到水波运行的奇特现象, 这种奇特的现象后来被称为孤立子现象。Russell 的发现导致了 Korteweg 和他的学生 G. de Vries 在 1895 年导出著名的 KdV 方程, KdV 方程作为一类重要的浅水波方程, 涵盖了浅水波传播问题中的许多重要物理性质。

水波一般可定义为水中质点的往复性运动, 是自然界中广泛存在的一种物理现象, 波浪作为重要的物理现象和海洋、海岸工程中主要动力因素之一, 一直受到广泛关注, 对波浪复杂现象的正确描述和呈现也一直是学者研究的重点。

研究发现, 常系数非线性方程只能近似地反映实际物质运动变化规律, 而变系数非线性方程却能更加准确地描述物质的属性, 因此研究变系数非线性方程的精确解显得十分重要, 人们可以利用这些解来研究解的稳定性和波的运动规律, 而且新的精确解可以帮助人们发现新的非线性现象及其规律, 进而推动相关领域的发展。近年来, 人们已经发现了一些有效的求解方法, 如变分法、截断展开法、分离变量法[1]、齐次平衡法[2]、Backlund 变换法、函数展开法、Jacobi 椭圆函数法[3]等。

本文将利用指数函数法构造出广义二维变系数 KdV 方程[4]的精确解, 对于广义二维变系数 KdV 方程

$$[u_t + 6uu_x + u_{xxx}]_x + a(t)u_x + b(t)u_{yy} + F_{xx}(x, y, t) = 0.$$

本文研究当参数 $a(t)=0$, $b(t)=2$, $F_{xx}(x, y, t)=0$ 时的情形, 则上述方程变为

$$[u_t + 6uu_x + u_{xxx}]_x + 2u_{yy} = 0. \quad (1)$$

我们得到了方程(1)的精确解, 并简单研究了解的演化性态。本文的内容安排如下: 第二节简单介绍了指数函数方法的主要思想, 然后利用这种方法研究了方程(1)的精确解构造问题, 得到了 3 组精确解, 并画出它们的演化图像。最后一节对本文的内容进行了简单的总结。

2. 方程求解

2.1. 方法概述

以下面的非线性偏微分方程:

$$P(u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0. \quad (2)$$

为例, 给出指数函数法的主要方法步骤, 具体细节可参考[5] [6] [7]:

1) 假设非线性偏微分方程(2)的解为 $u(x, t, y) = U(\eta)$, 其中 $\eta = kx + t + y$ 将, 则偏微分方程(2)转化为

非线性常微分方程:

$$Q(U', U'', U''', \dots) = 0.$$

2) 假设方程(2)具有以下形式的解

$$U(\eta) = \frac{\sum_{n=-d}^c a_n \exp(n\eta)}{\sum_{m=-q}^p b_m \exp(m\eta)},$$

其中 c 和 p, q 和 d 之间的关系可以通过平衡给定待解非线性偏微分方程(2)的最高阶导数项和最高次非线性项来确定。

3) 通过平衡指数函数的幂次得到关于 a_n, b_m 超定代数方程[8]来确定, 求解代数方程组即可得到(2)精确解。

2.2. 方程(1)的精确解

本节利用上面的指数函数方法构造出方程(1)的几组精确解, 并研究了它们的性态。具体的实施步骤如下:

第一步: 假设非线性偏微分方程(1)的解为 $u(x, t, y) = U(\eta)$, 其中 $\eta = kx + t + y$, 将偏微分方程转化为常微分方程:

$$6(kU')^2 + (k+2)U'' + 6k^2UU'' + k^4U^{(4)} = 0. \quad (3)$$

其中 $U', U'', U^{(4)}$ 分别表示 $U(\eta)$ 的一阶导数、二阶导和四阶导数。

第二步: 假设方程(1)具有以下形式的解

$$U(\eta) = \frac{\sum_{n=-d}^c a_n \exp(n\eta)}{\sum_{m=-q}^p b_m \exp(m\eta)}. \quad (4)$$

为了确定 c 和 p, q 和 d 之间的关系, 联立方程(3)和(4), 之后平衡 UU'' 和 $U^{(4)}$ 的最高次数:

$$2c\eta + 3d\eta = c\eta + 4d\eta.$$

解得 $c = p$;

同理, 平衡 UU'' 和 $U^{(4)}$ 的最低次数:

$$-3p\eta - 2q\eta = -4p\eta - q\eta$$

解得 $d = q$ 。

令 $c = p = 1, d = q = 1$, 代入方程(4)得到方程:

$$U(\eta) = \frac{a_{-1} + e^\eta (a_0 + e^\eta a_1)}{b_{-1} + e^\eta (b_0 + e^\eta b_1)}. \quad (5)$$

第三步: 将方程(5)代入常微分方程(3)中, 之后令分子中所含 e^η 项的系数等于零, 得到关于待定系数 $a_i, b_i (i = -1, 0, 1)$ 的代数方程组, 得出精确解。

2.3. 图像分析

本节我们利用上面的方法使用 Mathematica 软件[9]得到如下三组精确解, 并描绘了它们的图像:

1)

得到精确解:

$$U_1 = -\frac{k^4 + k + 2}{6k^2} + \frac{4k^2 b_{-1} b_0 e^{kx+t+y}}{(2b_{-1} + b_0 e^{kx+t+y})^2},$$

特别地, 取 $k = 2, b_0 = 2, b_{-1} = 3$ 时, 将精确解简化为:

$$U_1 = -\frac{5}{6} + \frac{96e^{2x+t+y}}{(6 + 2e^{2x+t+y})^2}.$$

当 $x \in (-10, 10), y \in (-10, 10)$, 画出以下图像。

由图 1~3 的演化过程可以看出波峰随着时间 t 取值的不同而产生位移。

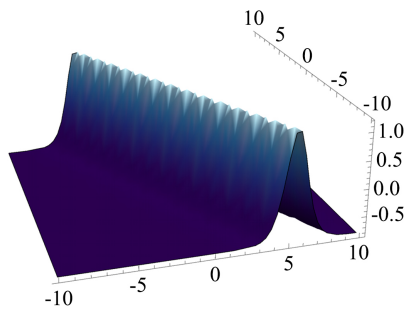


Figure 1. When $t = 0$

图 1. $t = 0$

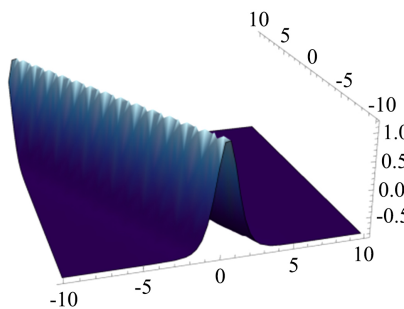


Figure 2. When $t = 10$

图 2. $t = 10$

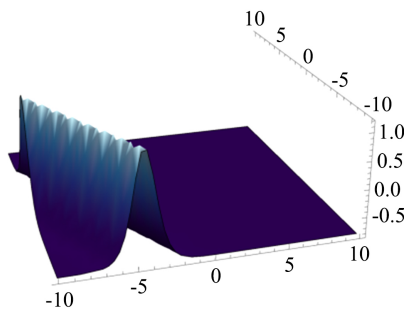


Figure 3. When $t = 20$

图 3. $t = 20$

2)

将方程(5)中的待定系数 $a_1=1$ ，得到精确解

$$U_2 = -\frac{(k^4 + k + 2)\left(144k^4 e^{2kx+2t+2y} + 24k^2(5k^4 - k - 2)b_0 e^{kx+t+y} + (k^4 + k + 2)^2 b_0^2\right)}{6(-12k^3 e^{kx+t+y} + k(k^4 + k + 2)b_0)^2},$$

特别地，取 $k=2, b_0=1$ 时，将精确解简化为：

$$U_2 = -\frac{10(400 + 7296e^{t+2x+y} + 2304e^{2(t+2x+y)})}{3(40 - 96e^{t+2x+y})^2}.$$

当 $x \in (-10, 10), y \in (-50, 50)$ 时，画出图像。

由图 4~6 的演化过程可以看出在此精确解的形状随时间 t 的取值不同而产生位移。

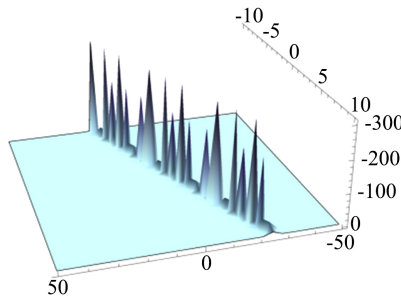


Figure 4. When $t = 5$

图 4. $t = 5$

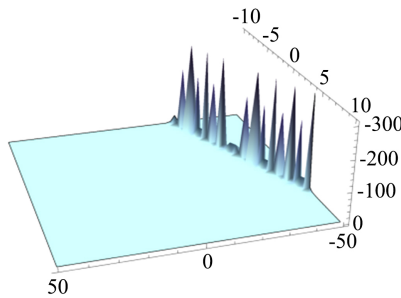


Figure 5. When $t = 40$

图 5. $t = 40$

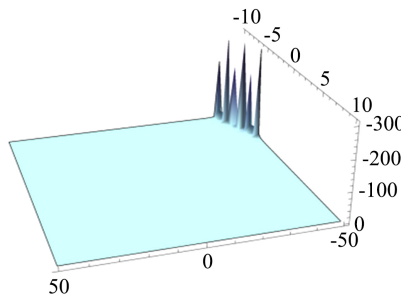


Figure 6. When $t = 60$

图 6. $t = 60$

3)

将方程(5)中的待定系数 $a_{-1} = 1$ ，得到精确解

$$U_3 = -\frac{(k^4 + k + 2)\left(144k^4 + b_0 e^{kx+t+y}\left(24k^2(5k^4 - k - 2) + e^{kx+t+y}(k^4 + k + 2)^2 b_0\right)\right)}{6(-12k^3 + k(k^4 + k + 2)b_0 e^{kx+t+y})^2},$$

取 $k = 2$ ， $b_0 = 1$ ，则精确解简化为：

$$U_3 = -\frac{10\left(2304 + e^{t+2x+y}\left(7296 + 400e^{t+2x+y}\right)\right)}{3(-96 + 40e^{t+2x+y})^2}.$$

当 $x \in (-10, 10)$ ， $y \in (-50, 50)$ 时，画出图像：

由图 7~9 的演化过程可以看出在此精确解的形状随时间 t 的取值不同而产生位移。同时，由图像可以看出此精确解存在奇异点，以 $t = 1$ 为例，通过分析简化的精确解 U_3 可以看出当 $-96 + 40e^{1+2x+y} = 0$ 时存在奇异点，解得 $y = -2x + \ln \frac{12}{5} - 1$ ，即 x, y 满足关系式 $y \neq -2x + \ln \frac{12}{5} - 1$ 的区域上 U_3 是连续的。特别地，当 $x \in (1, 20)$ ， $y \in (0, 1)$ 时，解的图像如图 10 所示。

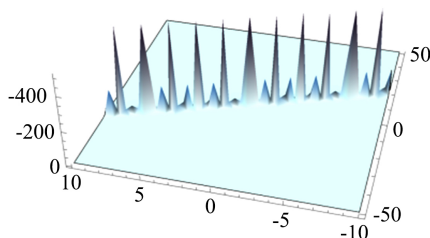


Figure 7. When $t = 1$
图 7. $t = 1$

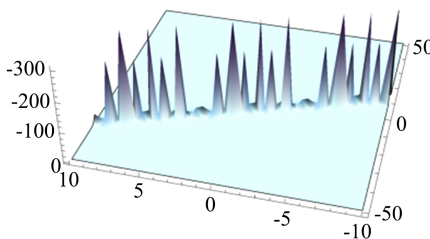


Figure 8. When $t = 10$
图 8. $t = 10$

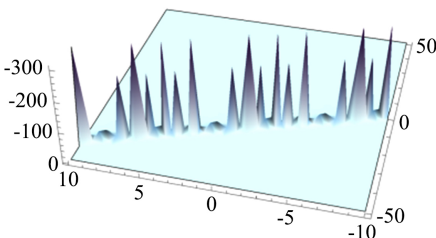


Figure 9. When $t = 20$
图 9. $t = 20$

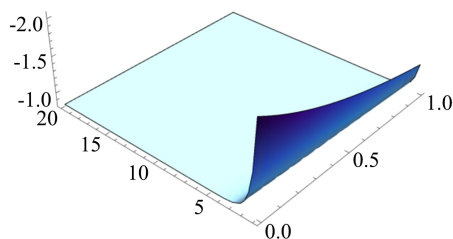


Figure 10. When $t = 1$

图 10. $t = 1$

3. 结论

本文利用指数函数方法深入系统地分析了一类(2 + 1)维 KdV 型方程的精确解, 并利用 Mathematica 软件描绘解的图像, 精确地刻画了解的性态, 由此分析不同因素对方程的影响程度, 从而促进该方程在物理学等领域中的应用。

致 谢

感谢中央民族大学本科生研究训练计划(URTP)——BEIJ2020110001 和中央民族大学本科教学创新项目(CX2008)的支持, 感谢张智勇导师的指导。

参考文献

- [1] 余招贤. 分离变量法的适用条件[J]. 科教文汇, 2017(33): 36-37.
- [2] Wang, M.L., Zhou, Y.B. and Li, Z.B. (1999) Application of a Homogeneous Balance Method to EXACT solution of Nonlinear Equations in Mathematical Physics. *Physics Letters A*, **216**, 67-75.
[https://doi.org/10.1016/0375-9601\(96\)00283-6](https://doi.org/10.1016/0375-9601(96)00283-6)
- [3] 郭玉翠. 非线性偏微分方程引论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008: 211-215, 105-122, 216-221, 243.
- [4] 张佳梅, 等. 一个广义变系数 KdV 方程新的精确解[J]. 应用数学进展, 2013, 2(1): 42-47.
<http://dx.doi.org/10.12677/AAM.2013.21006>
- [5] He, J.H. and Wu, X.H. (2006) Exp-Function Method for Nonlinear Wave Equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, **30**, 700-708. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.03.020>
- [6] Wu, X.H. and He, J.H. (2007) Solitary Solutions Periodic Solutions and Compacton-Like Solutions Using the Exp-Function Method. *Computers & Mathematics with Applications*, **54**, 966-986.
<https://doi.org/10.1016/j.camwa.2006.12.041>
- [7] 胡恒春, 王利金, 刘磊. KdV-Burgers-Kuramoto 方程另一类指数函数求法及新的精确解[J]. 上海理工大学学报, 2013, 35(2): 131-134.
- [8] 向欢. 一类非线性超定方程组数值解法的研究[J]. 数学理论与应用, 2017, 37(3): 17-25.
- [9] 李国, 蒋彦, 杨东升, 梁宏军. Mathematica 软件函数图形绘制及特性分析中的应用[J]. 现代电子技术, 2006, 29(22): 59-60+66.