

# Newell-Whiehead方程的精确解和解析近似解

胡协奎

上海理工大学理学院, 上海  
Email: 2556847786@qq.com

收稿日期: 2021年5月21日; 录用日期: 2021年6月9日; 发布日期: 2021年6月24日

## 摘要

本文采用求解的平面动力系统方法研究Newell-Whiehead方程  $u_{xx} - u_t + u - u^3 = 0$  的精确解孤立波解和振荡解的解析近似解。文中对该方程有界行波解对应的平面动力系统做了详细的定性分析, 并结合平面动力系统的理论知识作出了全局相图, 依据全局相图, 得到了该方程有界行波解的个数和大致性态方面的结论; 并运用适当的方法求出了该方程在波速为  $c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  时的两个精确扭状孤立波解, 进一步求出了在波速较小时 ( $0 < c < 2$ ) 该方程振荡解的解析近似解。

## 关键词

Newell-Whiehead方程, 精确解, 解析近似解, 动力系统方法

# Exact and Approximate Analytical Solutions of Newell-Whiehead Equation

Xiekui Hu

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai  
Email: 2556847786@qq.com

Received: May 21<sup>st</sup>, 2021; accepted: Jun. 9<sup>th</sup>, 2021; published: Jun. 24<sup>th</sup>, 2021

## Abstract

In this paper, the exact solitary wave solution and the analytical approximate solution of the Newell-Whiehead equation  $u_{xx} - u_t + u - u^3 = 0$  are studied by the plane dynamic system method for solving. In this paper, a detailed qualitative analysis of the plane dynamic system corresponding to the bounded traveling wave solution of the equation is made, and combined with the plane. The

theoretical knowledge of the dynamic system has made a global phase diagram. According to the global phase diagram, the conclusions on the number of bounded traveling wave solutions and the approximate behavior of the equation are obtained. Using appropriate methods, the two exact twisted solitary wave solutions of the equation at wave speed  $c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  are obtained, and the analytical approximate solution of the oscillatory solution of the equation when the wave speed ( $0 < c < 2$ ) is small, is further obtained.

## Keywords

Newell-Whiehead Equation, Exact Solution, Approximate Analytical Solution, Dynamical System Method

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

1937年, Kolmogorov, Petrovsky, Piskunov 在文献[1]中提出一个反应扩散模型

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(u), f\text{-nonlinear}, f(0) = 0, & (1.1a) \\ u(x, 0) = \phi(x), x \in R^1, & (1.1b) \end{cases}$$

用于描述生物种群中的繁殖问题和基因遗传, 该模型(1.1)是一个经典的一维反应扩散模型, 该模型(1.1a)不仅适用于生物学, 在统计学和金融学中也有相应的应用[2]。在物理学中, 该模型(1.1a)可用于描述非均匀介质中的传播现象[3]。在生物学中, 该模型(1.1a)用于描述有利基因的遗传[1]和种群生物的生长及迁移[4] [5]以及种群的入侵和灭绝[6]。近年来, 在流行病学和病毒学中, 该模型(1.1a)可以模拟乙型肝炎病毒(HBV)感染模型[7]等。

当  $f(u) = u - u^3$  时, (1.1a)被称为 Newell-Whiehead 方程

$$u_{xx} - u_t + u - u^3 = 0, \quad (1.2)$$

该方程(1.2)被广泛研究且得到了众多结论[8] [9] [10] [11], 对于(1.2)的精确解和近似解在文献[8] [9] [10] [11]中已经得出, 但是对于其振荡行波解的解析近似解, 始终没有被求出, 本文的目的就是要求出方程(1.2)的精确行波解和振荡解的解析近似解。

当前求解方程(1.1)、(1.2)的主要方法有: 摄动方法[12] [13]、Lyapunov 人工小参数法[14]、Adomian 分解法(ADM) [15] [16]、 $\delta$  展开法[17]、同伦分析方法(HAM) [18]、V 变量迭代法(VIM) [19]等, 上述方法运用于求解反应扩散方程的近似解方面都具有自身的优势和特点, 但无一例外都是采用近似逼近的方法, 没有得出其振荡解的解析近似解的具体表达式, 我们将采用求解的平面动力系统的理论和方法[20] [21]来研究方程(1.2)的振荡解的解析近似解。

求解的平面动力系统理论和方法的核心思想是: 通过行波变换, 将非线性偏微分方程转化为与之等价的一个平面动力系统, 再通过定性分析研究这个平面动力系统的全局相图中的奇点类型和轨线性质, 进而确定系统的解的性态和数量。最后通过合适的方法, 得出非线性偏微分方程的精确行波解和解析近似解。

## 2. 定性分析和全局相图

### 2.1. 定性分析与全局相图

对方程(1.2)做行波变换  $u(x,t) = u(\xi) = u(x-ct)$  ( $\xi = x-ct$ ,  $c$  为波速), 可知  $u(\xi)$  满足

$$u'' + cu' + u - u^3 = 0. \quad (2.1)$$

(2.1)式中令  $x = u(\xi)$ ,  $y = u'(\xi)$ , 方程(2.1)等价于平面动力系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\xi} = y = P(x, y), \\ \frac{dy}{d\xi} = -cy + (x^3 - x) = Q(x, y). \end{cases} \quad (2.2)$$

依据平面动力系统的理论知识[20] [21]可知, 平面动力系统(2.2)有 3 个有限远奇点  $P_i(x_i, 0)$ , ( $i=1,2,3$ ), 分别为  $P_1(-1,0)$ ,  $P_2(0,0)$ ,  $P_3(1,0)$ , 系统(2.2)在  $P_i$  处的 Jacobi 矩阵为

$$J(x_i, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3x_i^2 - 1 & -c \end{bmatrix}, i=1,2,3.$$

在 3 个奇点处的 Jacobi 矩阵行列式分别为

$$\det[J(x_1, 0)] = -2 < 0, \det[J(x_2, 0)] = 1 > 0, \det[J(x_3, 0)] = -2 < 0,$$

所以  $P_1, P_3$  为鞍点。在  $P_2$  处的特征方程为  $\lambda^2 + c\lambda - 3x^2 + 1 = 0$ , 其判别式为  $\Delta = c^2 - 4$ 。由平面动力系统的理论可知, 当  $\Delta \geq 0$ , 即  $c \geq 2$ ,  $P_2$  为稳定结点; 当  $\Delta < 0$ , 即  $0 < c < 2$ ,  $P_2$  为稳定焦点。

接下来, 通过上述有限远奇点分析结合无限远奇点分析作出平面动力系统(2.2)的平面相图。我们对系统(2.2)做 Poincaré 变换, 易知在  $y$  轴正负两个方向上有一对无穷远奇点  $A_1, A_2$ , 并且 Poincaré 圆周也为轨线。  $A_1, A_2$  周围各存在一个抛物型区域。做出平面相图如下图 1 和图 2。

由平面动力系统的理论和方法[20] [21]可得如下定理成立。

**定理 2.1:** 除了奇点  $P_i$  ( $i=1,2,3$ ) 和轨线  $L(P_i, P_j)$  ( $i, j=1,2,3$ ) 外, 系统轨线都是无界的, 且这些轨线上点的  $x, y$  坐标值也是无界的( $L(P, Q)$  是一条连接  $P$  和  $Q$  的轨线)。

**定理 2.2:** 当波速满足  $0 < c < 2$  时, 系统(2.2)有两条鞍 - 焦轨线, 分别为图 1 中  $L(P_1, P_2)$  和  $L(P_3, P_2)$ , 此时方程(1.2)有两个振荡行波解, 当波速满足  $c \geq 2$  时, 系统(2.2)有两条鞍结轨线, 分别为图 2 中  $L(P_1, P_2)$  和  $L(P_3, P_2)$ , 此时方程(1.2)有两个单调行波解, 一个单调递增, 一个单调递减。

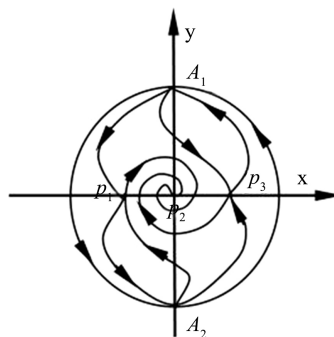


Figure 1.  $0 < c < 2$

图 1.  $0 < c < 2$

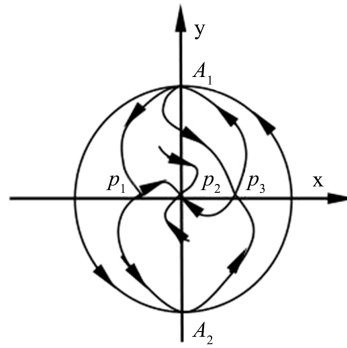


Figure 2.  $c \geq 2$   
图 2.  $c \geq 2$

### 2.2. 振荡行波解的衰减性

由于方程(1.2)振荡行波解的共同特点是对应相图中的鞍 - 焦轨线, 故本段我们以图 1 中鞍 - 焦轨线  $L(P_1, P_2)$  为例来说明这种振荡行波解的衰减性。

**定理 2.3:** 当  $0 < c < 2$  时, 方程(1.2)对应于轨线  $L(P_1, P_2)$  的振荡行波解  $u(\xi)$  存在  $\hat{\xi}_1$ , 在  $\hat{\xi}_1$  处取最大值, 解在  $\hat{\xi}_1$  的左侧具有单调递增性, 而在其右侧不仅具有振荡性且具有衰减性。即在  $\xi$  轴上存在无穷多个极大值点  $\hat{\xi}_i$  ( $i=1, 2, \dots, +\infty$ ) 和极小值点  $\check{\xi}_i$  ( $i=1, 2, \dots, +\infty$ ), 使得

$$\begin{cases} -\infty < \dots < \check{\xi}_n < \hat{\xi}_n < \check{\xi}_{n-1} < \hat{\xi}_{n-1} < \dots < \check{\xi}_1 < \hat{\xi}_1 < +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\xi}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \check{\xi}_n = +\infty, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} u(-\infty) < u(\check{\xi}_1) < \dots < u(\check{\xi}_n) < \dots < u(+\infty) < \dots < u(\hat{\xi}_n) < \dots < u(\hat{\xi}_1), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u(\hat{\xi}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(\check{\xi}_n) = u(+\infty), \end{cases} \quad (2.4)$$

和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{\xi}_n - \hat{\xi}_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\check{\xi}_n - \check{\xi}_{n+1}) = \frac{4\pi}{\sqrt{8-c^2}}. \quad (2.5)$$

### 3. 方程(1.2)的精确解和振荡行波解的解析近似解

由第二部分的定性分析和全局相图可知, 当  $0 < c < 2$  时, 方程(1.2)存在两个振荡行波解; 当  $c \geq 2$  时, 方程(1.2)有单调递增扭状行波解和单调递减的扭状行波解。我们首先来求解方程(1.2)的精确解扭状行波解。

#### 3.1. 方程(1.2)的精确扭状行波解

本段我们用假设待定法和分离变量法来求解方程(1.2)的精确扭状行波解, 分别求出图 2 中轨线  $L(P_1, P_2)$  和轨线  $L(P_3, P_2)$  的精确扭状行波解, 由第二部分可知, 平面动力系统的奇点为:  $P_1(-1, 0)$ ,  $P_2(0, 0)$ ,  $P_3(1, 0)$ 。假设轨线  $L(P_1, P_2)$  和轨线  $L(P_3, P_2)$  在向量场中呈抛物线形式

$$y = A_i(x - x_i)x, \quad (i=1, 3), \quad (3.1)$$

其中  $A_i$  为待定常数。系统(2.2)进一步可表示为

$$y \frac{dy}{dx} = -cy + (x+1)x(x-1), \quad (3.2)$$

将(3.1)代入(3.2)我们可以得出

$$A_i^2(x-x_i)(2x-x_i) = -cA_i(x-x_i) + (x+1)(x-1). \quad (i=1,3) \quad (3.3)$$

由此, 根据(3.3)式结合两项式相等则同次幂系数相等的原理, 可得如下的定理。

**定理 3.1** 1) 当  $x_i = x_1$  时, 可解得  $A_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ , 此时平面动力系统(2.2)所对应的平面相图 2

中的轨线  $L(P_1, P_2)$  可表示为  $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)x$ , 在此波速下方程(1.2)有精确的单调递增扭状行波解。

2) 当  $x_i = x_3$  时, 可解得  $A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ , 此时平面动力系统(2.2)所对应的平面相图 2 中的轨线

$L(P_3, P_2)$  可表示为  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)x$ , 在此波速下方程(1.2)有精确的单调递减扭状行波解。

接下来我们用分离变量法来反解出方程(1.2)的精确扭状行波解。首先来求解图 2 中轨线  $L(P_1, P_2)$  所对的扭状解。当  $c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  时, 图 2 中轨线  $L(P_1, P_2)$  可表示为

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)x, \quad (3.4)$$

由于  $y = u'(\xi) = \frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{dx}{d\xi}$ , 带入(3.4)然后分离变量再积分即可求出方程(1.2)的精确扭状解如下

$$u_1(\xi) = \frac{1}{2} \tanh \left[ \frac{\sqrt{2}}{4}(\xi - \xi_0) \right] - \frac{1}{2}.$$

同理, 当  $c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  时, 图(2)中轨线  $L(P_3, P_2)$  可表示为

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)x$$

由于  $y = u'(\xi) = \frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{dx}{d\xi}$ , 带入(3.4)然后分离变量再积分即可求出方程(1.3)的精确扭状行波解为

$$u_2(\xi) = -\frac{1}{2} \tanh \left[ \frac{\sqrt{2}}{4}(\xi - \xi_0) \right] + \frac{1}{2}.$$

### 3.2. 方程(1.2)的振荡行波解的解析近似解

由平面动力系统理论[20] [21]可知, 方程(1.2)的振荡行波解可以看做是由异宿轨在小反应速度影响下破裂, 由鞍-鞍轨线转变为鞍-焦轨线的。在本段我们来求出平面动力系统的全局相图 1 中轨线  $L(P_3, P_2)$  所对应的振荡行波解的解析近似解。鞍-焦轨线  $L(P_3, P_2)$  可以看做是鞍-鞍轨线  $L(P_3, P_1)$  破裂得到的, 我们首先求出轨线  $L(P_3, P_1)$  所对的扭状行波解的精确解。

首先, 我们采用和 3.1 中相同的办法, 把轨线  $L(P_3, P_1)$  采用如下形式表出:

$$y = B(x-1)(x+1),$$

与全局相图 2 中轨线  $L(P_3, P_2)$  所对应的扭状行波解类似, 我们可得  $B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以轨线  $L(P_3, P_1)$  可表示为

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)(x+1), \tag{3.5}$$

由于  $y = u'(\xi) = \frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{dx}{d\xi}$ ，带入(3.5)然后分离变量再积分即可求出方程(1.2)的精确扭状解如下

$$u_3(\xi) = -\tanh\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\xi - \xi_0)\right]. \tag{3.6}$$

接下来我们求其解析近似解，我们注意到据动力系统中旋转向量场理论[20] [21]，图 1 中鞍 - 焦轨线  $L(P_3, P_2)$ ，是在反应速度满足  $0 < c < 2$  的情形下由异宿轨  $L(P_3, P_1)$  破裂形成的。 $L(P_3, P_2)$  对应的振荡解的非振荡部分可用(3.6)式近似表示，即

$$u_\varepsilon(\xi) \approx u_3(\xi) = -\tanh\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\xi - \xi_0)\right], \quad \xi \in (-\infty, \xi_0). \tag{3.7}$$

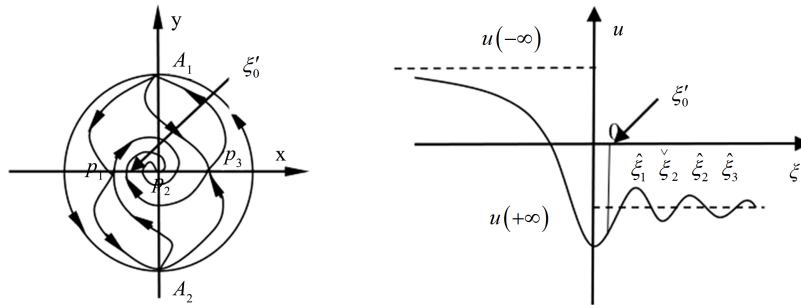
鞍 - 焦轨线  $L(P_3, P_2)$  的振荡部分可用如下形式表示，

$$u_\varepsilon(\xi) = e^{\alpha(\xi - \xi_0)}(m \cos(\omega(\xi - \xi_0)) - n \sin(\omega(\xi - \xi_0))) + d, \quad \xi \in (\xi_0, +\infty), \tag{3.8}$$

其中  $\alpha, m, n, \omega, d$  为待定常数。将(3.8)式代入方程(1.2)，略去  $e^{\alpha(\xi - \xi_0)}$  的高阶无穷小量后，可得如下的式子

$$\begin{cases} \omega^2 = \alpha^2 + c\alpha - 3d^2 + 1, \\ \alpha = -\frac{c}{2}, \\ -d^3 + d = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

我们的目的是构造整个鞍 - 焦轨线  $L(P_3, P_2)$  对应的振荡行波解的解析近似解，振荡的部分和非振荡的部分需光滑对接，需要满足对接条件。首先当  $\xi \rightarrow +\infty$  时，由于  $L(P_3, P_2)$  趋于  $P_2$ ，故  $d = 0$ 。我们将对接点  $\xi'_0$  选取在  $\xi_0$  右边的一个半径不大的空心领域内的某一点  $\xi'_0 \neq \xi_0$ ，如图 3 所示。



**Figure 3.** Location of docking point  $\xi'_0$   
**图 3.** 对接点  $\xi'_0$  的位置

为获得方程(1.2)的振荡解的解析近似解，(3.6)式和(3.7)式对接点应该满足如下条件

$$\frac{d^i}{d\xi^i} u_\varepsilon(\xi'_0) = \frac{d^i}{d\xi^i} u_3(\xi'_0), \quad i = 0, 1, \tag{3.10}$$

即

$$\begin{aligned}
& e^{\alpha(\xi'_0 - \xi_0)} \left( m \cos(\omega(\xi'_0 - \xi_0)) - n \sin(\omega(\xi'_0 - \xi_0)) \right) = u_3(\xi'_0), \\
& \alpha e^{\alpha(\xi'_0 - \xi_0)} \left( m \cos(\omega(\xi'_0 - \xi_0)) - n \sin(\omega(\xi'_0 - \xi_0)) \right) \\
& - \omega e^{\alpha(\xi'_0 - \xi_0)} \left( m \sin(\omega(\xi'_0 - \xi_0)) + n \cos(\omega(\xi'_0 - \xi_0)) \right) = u'_3(\xi'_0).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

由(3.9)和(3.11)可得

$$\begin{cases} m = e^{-\alpha(\xi'_0 - \xi_0)} \left[ u_3(\xi'_0) \left( \cos(\omega(\xi'_0 - \xi_0)) + \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega(\xi'_0 - \xi_0)) \right) - \frac{1}{\omega} \sin(\omega(\xi'_0 - \xi_0)) u'_3(\xi'_0) \right], & (\xi'_0 \neq \xi_0) \\ n = m \cot(\omega(\xi'_0 - \xi_0)) - \frac{u_3(\xi'_0) e^{-\alpha(\xi'_0 - \xi_0)}}{\sin(\omega(\xi'_0 - \xi_0))}, & (\xi'_0 \neq \xi_0), \\ \alpha = -\frac{c}{2}, \\ \omega = \frac{1}{2} \sqrt{-c^2 + 4}, \end{cases} \tag{3.12}$$

由以上分析可得如下定理。

**定理 3.2:** 当  $0 < c < 2$  时, 方程(1.2)有对应于图 1 中轨线  $L(P_3, P_2)$  的振荡行波解, 它的解析近似解为

$$u(\xi) \approx \begin{cases} -\tanh \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} (\xi - \xi_0) \right], & \xi \in (-\infty, \xi'_0], \\ e^{-\frac{c}{2}\xi} \left( m \cos(\omega(\xi - \xi_0)) - n \sin(\omega(\xi - \xi_0)) \right), & \xi \in (\xi'_0, +\infty), \end{cases} \tag{3.13}$$

(3.13)式中  $m, n, \omega$  分别由(3.12)给出。

## 4. 结论

本文用平面动力系统的理论和方法求出了 Newell-Whiehead 方程的精确孤立波解和振荡行波解的解析近似解。从本文所得结论可以看出, 当波速为  $c \geq 2$  时, Newell-Whiehead 方程有单调的孤立波解, 一个为单调递增的扭状孤立波解、另一个为单调递减的扭状孤立波解, 我们运用假设待定的方法求出了当  $c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  时方程的精确扭状孤立波解。另外, 根据平面动力系统的理论和方法, 我们求出了当波速满足  $0 < c < 2$  时 Newell-Whiehead 方程一个振荡解的解析近似解。本文所研究的方法也可以运用到其他的非线性发展方程的研究。

## 参考文献

- [1] Kolmogorov, A.N., Petrovsky, I.G. and Piskunov, N.S. (1937) A Study of the Diffusion Equation with Increase in the Quantity of Matter, and Its Application to a Biological Problem. *Moscow University Bulletin of Mathematics*, **1**, 1-25.
- [2] Feller, W. (1957) Book Reviews: An Introduction to Probability Theory and Its Application. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **57**, 156-159. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1951-09491-4>
- [3] Berestycki, H. and Hamel, F. (2008) Reaction-Diffusion Equations and Propagation Phenomena. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, Berlin.
- [4] Murray, J.D. (2002) Mathematical Biology. Springer-Verlag, Berlin.
- [5] Neubert, M.G. and Caswell, H. (2000) Demography and Dispersal: Calculation and Sensitivity Analysis of Invasion Speed for Structured Populations. *Ecology*, **81**, 1613-1628. [https://doi.org/10.1890/0012-9658\(2000\)081\[1613:DADCAS\]2.0.CO;2](https://doi.org/10.1890/0012-9658(2000)081[1613:DADCAS]2.0.CO;2)
- [6] El-Hachem, M., McCue, S.W., Jin, W., et al. (2019) Revisiting the Fisher-KPP Equation to Interpret the Spreading-Extinction Dichotomy. *Proceedings of the Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, **475**, Article



- ID: 20190378. <https://doi.org/10.1098/rspa.2019.0378>
- [7] Wang, K. and Wang, W. (2007) Propagation of HBV with Spatial Dependence. *Mathematical Biosciences*, **210**, 78-95. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2007.05.004>
- [8] 胡建兰, 张汉林, 金焕. 几类非线性方程的精确行波解[J]. 北京工业大学学报, 2002, 28(3): 317-319.
- [9] Saravanan, A. and Magesh, N. (2013) A Comparison between the Reduced Differential Transform Method and the Adomian Decomposition Method for the Newell-Whitehead-Segel Equation. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **21**, 259-265. <https://doi.org/10.1016/j.joems.2013.03.004>
- [10] Aswhad, A.A. and Jaddoa, A.F. (2014) The Approximate Solution of Newell Whitehead Segel and Fisher Equations Using the Adomian Decomposition Method. *Al-Mustansiriyah Journal of Science*, **25**, 45-56.
- [11] Malomed, B.A. (1998) Stability and Grain Boundaries in the Dispersive Newell-Whitehead-Segel Equation. *Physica Scripta*, **57**, 115-117. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/57/1/011>
- [12] 谢元喜. 一类非线性偏微分方程的摄动解法[J]. 湖南人文科技学院学报, 2005(5): 15-17.
- [13] Das, S., Gupta, P.K. and Ghosh, P. (2011) An Approximate Solution of Nonlinear Fractional Reaction-Diffusion Equation. *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 4071-4076. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.02.004>
- [14] Lyapunov, A.M. (1992) The General Problem on Stability of Motion [English Translation]. Taylor and Francis, London, 13-40.
- [15] 卢殿臣, 沈芙蓉, 洪宝剑. 基于 adomian 分解法的变系数组合 KdV 方程的近似解[J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2014, 38(2): 9-14.
- [16] Lesnic, D. (2007) The Decomposition Method for Cauchy Reaction-Diffusion Problems. *Applied Mathematics Letters*, **20**, 412-418. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.05.006>
- [17] 何吉欢.  $\delta$ -摄动方法的一点注释[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(6): 558-562.
- [18] Bataineh, A.S., Noorani, M. and Hashim, I. (2008) The Homotopy Analysis Method for Cauchy Reaction-Diffusion Problems. *Physics Letters A*, **372**, 613-618. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.07.069>
- [19] Momani, S. and Abuasad, S. (2006) Application of He's Variational Iteration Method to Helmholtz Equation. *Chaos Solitons & Fractals*, **27**, 1119-1123. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.04.113>
- [20] Nemytskii, V. and Stepanov, V. (1989) Qualitative Theory of Differential Equations. Dover, New York.
- [21] Zhang, Z.F., et al. (1992) Qualitative Theory of Differential Equations. Translations of Mathematical Monographs, Volume 101. American Mathematical Society, Providence.