Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(7), 2419-2427**
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.107254

Hans汉斯

Hardy空间上*m*-复对称Toeplitz算子

崔璞玉，王焕然，冯琳颖

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连
Email: cuipuyu1234@163.com

收稿日期：2021年6月19日；录用日期：2021年7月11日；发布日期：2021年7月22日

摘 要

本文分两部分刻画了**Hardy**空间上***m*-**复对称的**Toeplitz**算子的符号特征：**1)** 以解析函数或者余解析函数为符号的**Toeplitz**算子的***m*-**复对称性及其与正规性的关系；**2)** 以较一般函数为符号的**Toeplitz**算子的**2-**复对称性。

关键词

Hardy空间，**Toeplitz**算子，共轭算子，***m*-**复对称

m-Complex Symmetric Toeplitz Operators on the Hardy Space

Puyu Cui, Huanran Wang, Linying Feng

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: cuipuyu1234@163.com

Received: Jun. 19th, 2021; accepted: Jul. 11th, 2021; published: Jul. 22nd, 2021

Abstract

In this paper, the symbolic characteristics of *m*-complex symmetric Toeplitz operators on Hardy space are described in two parts: 1) the *m*-complex symmetry of Toeplitz operators with analytic functions or coanalytic functions as signs and their relations with normality; 2) the 2-complex symmetries of Toeplitz operators with more general functions as symbols.

文章引用: 崔璞玉, 王焕然, 冯琳颖. Hardy 空间上 *m*-复对称 Toeplitz 算子[J]. 应用数学进展, 2021, 10(7): 2419-2427.
DOI: 10.12677/aam.2021.107254

Keywords

Hardy Space, Toeplitz Operators, Conjugate Operator, *m*-Complex Symmetric

1. 引言

近年来，复对称算子引起了国内外一些算子理论方面专家学者的关注，取得了一些重要的结果。关于复对称的 Toeplitz 算子也有一些较好的结果[1] [2] [3] [4]。韩国学者 Ko 和 Lee 将复对称算子的概念推广，提出了 m-复对称算子的概念[3]。特别的，1-复对称算子即为复对称算子。本文研究 Hardy 空间上 Toeplitz 算子的 m-复对称性问题，刻画了分别以解析函数和余解析函数为符号的 m-复对称 Toeplitz 算子的符号函数的函数特征，通过泊松变换等分析技巧对以较一般化函数为符号的 2-复对称 Toeplitz 算子也给出了刻画。

2. 预备知识

本文以 $\mathcal{H}$ 表示复可分 Hilbert 空间，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上所有有界线性算子的集合。记 $\mathbb{D}$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的开单位圆盘，$\mathbb{T}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的单位圆周。记由 $\mathbb{T}$ 上所有关于弧长测度平方可积的函数构成的 Banach 空间为 $L^2(\mathbb{T})$。记由所有有界解析函数构成的空间为 H^∞。

定义 1.1 由 $L^2(\mathbb{T})$ 中所有负幂项 Fourier 系数为零的平方可积的函数构成的闭子空间为 Hardy 空间，记为 H^2。由于其等距同构于所有满足幂级数展开式的系数平方可和的解析函数构成的 Hilbert 空间，故有时也记为

$$H^2=\left\{f:f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\text{且}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty\right\}.$$

$L^2(\mathbb{T})$ 表示 $\mathbb{T}$ 上本性有界可测函数空间。令 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{T})$，称以 φ 为符号的 Toeplitz 算子为

$$T_\varphi f=P_H(\varphi f),\quad f\in H^2,$$

这里 P_H 表示 $L^2(\mathbb{T})$ 到 H^2 的正交投影。

Toeplitz 算子具有如下性质:令 $a,b\in\mathbb{C}$，$\varphi,\psi\in L^\infty(\mathbb{T})$，则

1) $T_{a\varphi+b\psi}=aT_\varphi+bT_\psi$。

2) $T_{\bar{\varphi}}=T_\varphi^*$。

此外，若 φ 是解析的，则

3) $T_\psi T_\varphi=T_{\psi\varphi}$。

4) $T_{\bar{\varphi}}T_\psi=T_{\bar{\varphi}\psi}$。

定理 1.2 [5] Toeplitz 算子 T_φ 是正规的当且仅当存在 $c,d\in\mathbb{C}$，实值函数 $\psi\in L^\infty(\mathbb{T})$，使得

$$\varphi=c\psi+d.$$

Hardy 空间 H^2 的在点 $\lambda\in\mathbb{D}$ 的再生核可表示为

$$K_\lambda(z)=\frac{1}{1-\bar{\lambda}z},$$

正规化为

$$k_\lambda(z)=\frac{\left(1-|\lambda|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1-\bar{\lambda}z},\quad z\in\mathbb{T}.$$

若 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{T})$ 且 φ 在 $\mathbb{D}$ 解析，那么 $T_{\bar{\varphi}}K_\lambda=\overline{\varphi(\lambda)}K_\lambda,(\lambda\in\mathbb{D})$。

定义 1.3 若 $\mathcal{H}$ 上共轭线性算子 $C:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 满足：

1) $\langle Cx,Cy\rangle=\langle y,x\rangle$ 对于所有的 $x,y\in\mathcal{H}$。

2) $C^2=I$。

则称 C 为 $\mathcal{H}$ 上的共轭算子。

定义 1.4 设 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，若存在一个 $\mathcal{H}$ 上的共轭算子 C，使得 $CTC=T^*$，则称 T 是 C-对称的。若 T 关于某个共轭算子 C 是 C-对称的，则称 T 是复对称的。

定义 1.5 设 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{T})$，称 Toeplitz 算子 T_φ 关于共轭算子 C 是 $m(m\geq1)$-复对称的，若满足

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}T^{*j}T^{m-j}=0.$$

文献[6]中提出一类共轭算子 $C_{\mu,\lambda}:H^2\to H^2$

$$C_{\mu,\lambda}f(z)=\mu\overline{f(\lambda\bar{z})},$$

其中 $\mu,\lambda\in\mathbb{T}$， $f(z)\in H^2$。

一般情况下，我们只需考虑特殊的共轭算子，见下面定理

定理 1.6 [6] Hardy 空间上的有界线性算子 T 关于共轭算子 $C_{\mu,\lambda}$ 是复对称的当且仅当 T 关于 $C_{1,\lambda}$ 复对称。

本文主要研究关于共轭算子 C_1 的 m-复对称 Toeplitz 算子，其中 $C_1:H^2\to H^2$ 满足

$$C_1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\hat{f}(n)z^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\overline{\hat{f}(n)}z^n:=f^*(z),$$

这里 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)z^n\in H^2$。易见， C_1 是 H^2 上的共轭算子，且 $C_1K_\lambda(z)=K_{\bar{\lambda}}(z)$。进一步

$$C_1T_{\bar{\alpha}}C_1k_\lambda=C_1T_{\bar{\alpha}}k_{\bar{\lambda}}=C_1\overline{\alpha(\bar{\lambda})}k_{\bar{\lambda}}=\alpha(\bar{\lambda})k_\lambda,(\lambda\in\mathbb{D}).$$

3. Hardy 空间上以解析(余解析)函数为符号的 *m*-复对称 Toeplitz 算子

本部分研究以解析函数或者余解析函数为符号的 Toeplitz 算子的 m-复对称性，得到下面结论。

定理 2.1 对于 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{T})$， T_φ 为 H^2 上关于 C_1 的 m-复对称算子，则下述成立

1) 若 φ 是解析的，则 $\varphi\equiv c$，(c 为常数)。

2) 若 φ 是余解析的，则 $\varphi\equiv c$，(c 为常数)。

证明：不失一般性，我们以 $m=3$ 为例，即证

$$-CT_\varphi^3C+3T_\varphi^*CT_\varphi^2C-3T_\varphi^{*2}CT_\varphi C+T_\varphi^{*3}=0.$$

1) 充分性显然，下证必要性。

若 $T_{\bar{\alpha}}$ 为 3-复对称算子，由 Toeplitz 算子的基本代数性质得

$$\begin{aligned}0&=-C_1T_{\bar{\alpha}}^3C_1+3T_{\bar{\alpha}}^*C_1T_{\bar{\alpha}}^2C_1-3T_{\bar{\alpha}}^{*2}C_1T_{\bar{\alpha}}C_1+T_{\bar{\alpha}}^{*3}\\&=-C_1T_{\bar{\alpha}^3}C_1+3T_{\alpha}C_1T_{\bar{\alpha}^2}C_1-3T_{\alpha^2}C_1T_{\bar{\alpha}}C_1+T_{\alpha^3}.\end{aligned}$$

取 $\lambda\in\mathbb{D}$，由

$$C_1T_{\bar{\alpha}}C_1k_\lambda=\alpha\left(\bar{\lambda}\right)k_\lambda,$$

那么

$$\begin{aligned}0&=\left[-C_1T_{\bar{\alpha}^3}C_1+3T_{\alpha}C_1T_{\bar{\alpha}^2}C_1-3T_{\alpha^2}C_1T_{\bar{\alpha}}C_1+T_{\alpha^3}\right]k_\lambda\\&=-\alpha^3\left(\bar{\lambda}\right)k_\lambda+3T_\alpha\alpha^2\left(\bar{\lambda}\right)k_\lambda-3T_{\alpha^2}\alpha\left(\bar{\lambda}\right)k_\lambda+\alpha^3k_\lambda\\&=-\alpha^3\left(\bar{\lambda}\right)k_\lambda+3\alpha^2\left(\bar{\lambda}\right)\alpha k_\lambda-3\alpha\left(\bar{\lambda}\right)\alpha^2k_\lambda+\alpha^3k_\lambda\\&=\left(\alpha-\alpha\left(\bar{\lambda}\right)\right)^3k_\lambda=0.\end{aligned}$$

因为 $k_\lambda(z)\neq0,\forall z\in\mathbb{D}\setminus\{\lambda\}$，所以 $\alpha(z)=\alpha\left(\bar{\lambda}\right),\forall z\in\mathbb{D}$，即 $\alpha\equiv c$。

2) 下证必要性。往证 $C_1T_\alpha C_1=T_{\alpha^*}$。记 $\{e_j\}_{j=0}^{\infty}=\{z^j\}_{j=0}^{\infty}$ 是 H^2 上的正规正交基

$$\begin{aligned}\left\langle C_1T_\alpha C_1e_j,e_i\right\rangle&=\left\langle C_1e_i,T_\alpha e_j\right\rangle=\left\langle e_i,T_\alpha e_j\right\rangle=\left\langle\bar{\alpha}e_i,e_j\right\rangle\\&=\left\langle\sum_{p=0}^{+\infty}\bar{\alpha}_pz^{i-p},e_j\right\rangle\quad\left(\alpha(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_pz^p\right)\\&=\bar{\alpha}_{i-j},\quad(i\geq j)\end{aligned}$$

因而 $C_1T_\alpha C_1$ 对应的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}\bar{\alpha}_0&0&0&\cdots\\\bar{\alpha}_1&\bar{\alpha}_0&0&\ddots\\\bar{\alpha}_2&\bar{\alpha}_1&\bar{\alpha}_0&\ddots\\\vdots&\bar{\alpha}_2&\bar{\alpha}_1&\ddots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots\end{pmatrix},$$

即为以解析函数 α^* 为符号的 Toeplitz 算子 T_{α^*} 的矩阵表示，进而 $C_1T_\alpha C_1=T_{\alpha^*}$。

由 Toeplitz 算子的基本代数性质得

$$\begin{aligned}&-C_1T_\alpha^3C_1+3T_\alpha^*C_1T_\alpha^2C_1-3T_\alpha^{*2}C_1T_\alpha C_1+T_\alpha^{*3}\\&=-T_{\alpha^{*3}}+3T_{\bar{\alpha}}T_{\alpha^{*2}}-3T_{\bar{\alpha}^2}T_{\alpha^*}+T_{\bar{\alpha}^3}\\&=-T_{\alpha^{*3}}+3T_{\bar{\alpha}\alpha^{*2}}-3T_{\bar{\alpha}^2\alpha^*}+T_{\bar{\alpha}^3}.\end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned}0&=\left\langle\left(-C_1T_\alpha^3C_1+3T_\alpha^*C_1T_\alpha^2C_1-3T_\alpha^{*2}C_1T_\alpha C_1+T_\alpha^{*3}\right)k_\lambda,k_\lambda\right\rangle\\&=\left\langle\left(-T_{\alpha^{*3}}+3T_{\bar{\alpha}\alpha^{*2}}-3T_{\bar{\alpha}^2\alpha^*}+T_{\bar{\alpha}^3}\right)k_\lambda,k_\lambda\right\rangle\\&=-\alpha^{*3}(\lambda)+3\left\langle\left(\bar{\alpha}\alpha^{*2}-\bar{\alpha}^2\alpha^*\right)k_\lambda,k_\lambda\right\rangle+\overline{\alpha^3(\lambda)}.\end{aligned}$$

令 $|\lambda|\to1$，由于 $\bar{\alpha}\alpha^{*2}-\bar{\alpha}^2\alpha^*$ 在 $\mathbb{T}$ 上的径向极限存在，所以

$$-\alpha^{*3}\left(e^{i\theta}\right)+\left(3\bar{\alpha}\alpha^{*2}-3\bar{\alpha}^{2}\alpha^{*}\right)\left(e^{i\theta}\right)+\bar{\alpha}^{3}\left(e^{i\theta}\right)$$
$$=-\left[\alpha^{*}\left(e^{i\theta}\right)-\overline{\alpha\left(e^{i\theta}\right)}\right]^{3}=0,$$

其中 $\lambda=|\lambda|e^{i\theta}$，进而

$$\alpha^{*}\left(e^{i\theta}\right)-\overline{\alpha\left(e^{i\theta}\right)}=0,$$

而 $\alpha^{*}(\lambda)$ 是关于 λ 的解析函数，$\overline{\alpha(\lambda)}$ 是关于 λ 的余解析函数，所以 $\alpha\equiv c$。

推论 2.2 若 $\alpha\in H^{\infty}$，那么下述成立

1) $T_{\bar{\alpha}}$ 为 H^{2} 上关于共轭算子 C_1 的 m-复对称算子 $(m\geq 1)$，当且仅当 $T_{\bar{\alpha}}$ 是正规算子。

2) 若 $\alpha\in H^{\infty}$，T_{α} 为 H^{2} 上关于共轭算子 C_1 的 m-复对称算子 $(m\geq 3)$，当且仅当 T_{α} 是正规算子。

证明：由定理 2.1 直接可得。

4. Hardy 空间上 2-复对称 Toeplitz 算子

本部分首先刻画解析符号和余解析符号的 Toeplitz 算子关于共轭算子 C_1 的 2-复对称性。

若 $\varphi(z)=\overline{\alpha(z)}+\beta(z)$，其中 $\alpha(z),\beta(z)\in H^{\infty}$。那么由 Toeplitz 算子基本性质有

$$T_{\varphi}^{2}=T_{\bar{\alpha}+\beta}T_{\bar{\alpha}+\beta}=T_{\bar{\alpha}}T_{\bar{\alpha}}+T_{\bar{\alpha}}T_{\beta}+T_{\beta}T_{\bar{\alpha}}+T_{\beta}T_{\beta}=T_{\bar{\alpha}^{2}}+T_{\bar{\alpha}\beta}+T_{\beta}T_{\bar{\alpha}}+T_{\beta^{2}}.$$

进一步，

$$T_{\varphi}^{2}k_{\lambda}(z)=T_{\bar{\alpha}^{2}}k_{\lambda}(z)+T_{\bar{\alpha}\beta}k_{\lambda}(z)+T_{\beta}T_{\bar{\alpha}}k_{\lambda}(z)+T_{\beta^{2}}k_{\lambda}(z)$$
$$=\overline{\alpha(\lambda)}^{2}k_{\lambda}(z)+T_{\bar{\alpha}\beta}k_{\lambda}(z)+\overline{\alpha(\lambda)}\beta(z)k_{\lambda}(z)+\beta^{2}(z)k_{\lambda}(z).$$

因此，

$$\left\langle C_1T_{\varphi}^{2}C_1k_{\lambda},k_{\lambda}\right\rangle=\left\langle C_1T_{\varphi}^{2}k_{\bar{\lambda}},k_{\lambda}\right\rangle=\left\langle C_1k_{\lambda},T_{\varphi}^{2}k_{\bar{\lambda}}\right\rangle=\left\langle k_{\bar{\lambda}},T_{\varphi}^{2}k_{\bar{\lambda}}\right\rangle.$$

由再生核的定义，得到

$$\left\langle C_1T_{\varphi}^{2}C_1k_{\lambda},k_{\lambda}\right\rangle=\left\langle k_{\bar{\lambda}},T_{\varphi}^{2}k_{\bar{\lambda}}\right\rangle$$
$$=\left\langle k_{\bar{\lambda}},\overline{\alpha(\bar{\lambda})}^{2}k_{\bar{\lambda}}(z)+T_{\bar{\alpha}\beta}k_{\bar{\lambda}}(z)+\overline{\alpha(\bar{\lambda})}\beta(z)k_{\bar{\lambda}}(z)+\beta^{2}(z)k_{\bar{\lambda}}(z)\right\rangle$$
$$=\alpha^{2}(\bar{\lambda})+\left\langle\bar{\beta}\alpha k_{\bar{\lambda}},k_{\bar{\lambda}}\right\rangle+\alpha(\bar{\lambda})\beta^{*}(\lambda)+\left(\beta^{*}\right)^{2}(\lambda).$$

由定义计算可得

$$\left\langle T_{\varphi}^{*}C_1T_{\varphi}C_1k_{\lambda},k_{\lambda}\right\rangle=\left\langle T_{\varphi}^{*}C_1T_{\varphi}k_{\bar{\lambda}},k_{\lambda}\right\rangle=\left\langle T_{\varphi}^{*}C_1\left(\overline{\alpha(\bar{\lambda})}+\beta\right)k_{\bar{\lambda}},k_{\lambda}\right\rangle$$
$$=\left\langle T_{\varphi}^{*}\left(\alpha(\bar{\lambda})+\beta^{*}\right)k_{\lambda},k_{\lambda}\right\rangle=\left\langle\alpha(\bar{\lambda})k_{\lambda}+\beta^{*}k_{\lambda},\overline{\alpha(\lambda)}k_{\lambda}+\beta k_{\lambda}\right\rangle$$
$$=\alpha(\lambda)\alpha(\bar{\lambda})+\alpha(\bar{\lambda})\overline{\beta(\lambda)}+\alpha(\lambda)\beta^{*}(\lambda)+\left\langle\beta^{*}k_{\lambda},\beta k_{\lambda}\right\rangle.$$

同理可得

$$\left\langle T_{\varphi}^{*2}k_{\lambda},k_{\lambda}\right\rangle=\left\langle\overline{\beta(\lambda)}^{2}k_{\lambda}(z)+T_{\bar{\beta}\alpha}k_{\lambda}(z)+\overline{\beta(\lambda)}\alpha(z)k_{\lambda}(z)+\alpha^{2}(z)k_{\lambda}(z),k_{\lambda}(z)\right\rangle$$
$$=\alpha^{2}(\lambda)+\left\langle\bar{\beta}\alpha k_{\lambda},k_{\lambda}\right\rangle+\alpha(\lambda)\overline{\beta(\lambda)}+\left[\overline{\beta(\lambda)}\right]^{2}.$$

综合上面结果，若 T_φ 为 H^2 上关于 C_1 的 2-复对称算子，那么对于 $\lambda\in\mathbb{D}$，有

$$\begin{aligned}&\left[\alpha^2(\bar\lambda)+\left\langle\bar\beta\alpha k_{\bar\lambda},k_{\bar\lambda}\right\rangle+\alpha(\bar\lambda)\beta^*(\lambda)+\left(\beta^*\right)^2(\lambda)\right]\\&-2\left[\alpha(\lambda)\alpha(\bar\lambda)+\alpha(\bar\lambda)\overline{\beta(\lambda)}+\alpha(\lambda)\beta^*(\lambda)+\left\langle\beta^*k_\lambda,\beta k_\lambda\right\rangle\right]\\&+\left[\overline{\beta(\lambda)}^2+\left\langle\bar\beta\alpha k_\lambda,k_\lambda\right\rangle+\overline{\beta(\lambda)}\alpha(\lambda)+\alpha^2(\lambda)\right]=0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

进一步，若(3.1)式中 $\alpha',\beta'\in H^2$，对(3.1)式两端求 $\partial_{\bar\lambda},\partial_\lambda$ 得

$$\begin{aligned}&\partial_{\bar\lambda}\partial_\lambda\left\langle\bar\beta\alpha k_{\bar\lambda},k_{\bar\lambda}\right\rangle+\alpha'(\bar\lambda)\left(\beta^*\right)'(\lambda)-2\alpha'(\lambda)\alpha'(\bar\lambda)-2\partial_{\bar\lambda}\partial_\lambda\left\langle\beta^*k_\lambda,\beta k_\lambda\right\rangle\\&+\partial_{\bar\lambda}\partial_\lambda\left\langle\bar\beta\alpha k_\lambda,k_\lambda\right\rangle+\alpha'(\lambda)\overline{\beta'(\lambda)}=0.\end{aligned}$$

运用多复变函数常见技巧，令 $\lambda=z,\bar\lambda=w$，有

$$\begin{aligned}&\partial_w\partial_z(1-zw)\left\langle\bar\beta\alpha K_{\bar z},K_w\right\rangle+\alpha'(w)\beta^{*\prime}(z)-2\alpha'(z)\alpha'(w)\\&-2\partial_w\partial_z(1-zw)\left\langle\beta^*K_{\bar w},\beta K_z\right\rangle+\partial_w\partial_z(1-zw)\left\langle\bar\beta\alpha K_{\bar w},K_z\right\rangle+\alpha'(z)\overline{\beta'(\bar w)}=0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

记幂级数展开式为 $\alpha(u)=\sum_{k=0}^{\infty}a_ku^k,\beta(u)=\sum_{k=0}^{\infty}b_ku^k$，那么

$$\alpha(u)K_{\bar z}(u)=\sum_{p=0}^{\infty}a_pu^p\sum_{i=0}^{\infty}z^iu^i=\sum_{p,i=0}^{\infty}a_pz^iu^{p+i}\overset{p+i=k}{=}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}a_{k-i}z^i\right)u^k.$$

在此基础上计算有

$$\begin{aligned}\left\langle\bar\beta\alpha K_{\bar z},K_w\right\rangle=\left\langle\alpha K_{\bar z},\beta K_w\right\rangle&=\left\langle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}a_{k-i}z^i\right)u^k,\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{l}b_{l-j}\bar w^j\right)u^l\right\rangle\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i,j=0}^{k}a_{k-i}\bar b_{k-j}\right)z^iw^j.\end{aligned}$$

进一步求偏导数得

$$\begin{aligned}&\partial_w\partial_z(1-zw)\left\langle\alpha K_{\bar z},\beta K_w\right\rangle=\partial_w\partial_z(1-zw)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i,j=0}^{k}a_{k-i}\bar b_{k-j}\right)z^iw^j\right]\\&=\partial_w(-w)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i,j=0}^{k}a_{k-i}\bar b_{k-j}\right)z^iw^j\right]+\partial_w(1-zw)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{j=0\\i=1}}^{k}a_{k-i}\bar b_{k-j}\right)iz^{i-1}w^j\right]\\&=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i,j=0}^{k}a_{k-i}\bar b_{k-j}\right)z^iw^j-w\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{i=0\\j=1}}^{k}a_{k-i}\bar b_{k-j}\right)z^ijw^{j-1}\\&\quad-z\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{i=1\\j=0}}^{k}a_{k-i}\bar b_{k-j}\right)iz^{i-1}w^j+(1-zw)\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{i,j=1}^{k}a_{k-i}\bar b_{k-j}\right)ijz^{i-1}w^{j-1}.\end{aligned}$$

相同方法有

DOI: 10.12677/aam.2021.107254

$$
\begin{aligned}
&-2\partial_w\partial_z(1-zw)\left\langle \beta^* K_{\overline{w}}, \beta K_z \right\rangle \\
&=2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i,j=0}^{k}\overline{b}_{k-i}\overline{b}_{k-j}\right)w^i z^j+2w\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{i=1\\ j=0}}^{k}\overline{b}_{k-i}\overline{b}_{k-j}\right)iw^{i-1}z^j \\
&\quad+2z\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{i=0\\ j=1}}^{k}\overline{b}_{k-i}\overline{b}_{k-j}\right)w^i jz^{j-1}-2(1-zw)\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{i,j=1}^{k}\overline{b}_{k-i}\overline{b}_{k-j}\right)ijw^{i-1}z^{j-1}
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\partial_w\partial_z(1-zw)\left\langle \overline{\beta}\alpha K_{\overline{w}}, K_z \right\rangle \\
&=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i,j=0}^{k}a_{k-i}\overline{b}_{k-j}\right)w^i z^j-w\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{i=1\\ j=0}}^{k}a_{k-i}\overline{b}_{k-j}\right)iw^{i-1}z^j \\
&\quad-z\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{i=0\\ j=1}}^{k}a_{k-i}\overline{b}_{k-j}\right)w^i jz^{j-1}+(1-zw)\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{i,j=1}^{k}a_{k-i}\overline{b}_{k-j}\right)iw^{i-1}jz^{j-1}.
\end{aligned}
$$

直接计算得

$$\alpha'(w)\beta^{*\prime}(z)=\sum_{i,j=1}^{\infty}ija_i\overline{b}_j w^{i-1}z^{j-1},$$

$$\alpha'(z)\alpha'(w)=\sum_{i,j=1}^{\infty}ija_i a_j z^{i-1}w^{j-1},$$

和

$$\alpha'(z)\overline{\beta'(\overline{w})}=\sum_{i,j=1}^{\infty}a_i\overline{b}_j ijz^{i-1}w^{j-1}.$$

将上述所有结果带入(3.2)式且令 $w=0$，得

$$
\begin{aligned}
0&=-a_0\overline{b}_0+a_1\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\overline{b}_{j+1}z^j-2a_1\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_{j+1}z^j+2\overline{b}_0\overline{b}_0-a_0\overline{b}_0+\overline{b}_1\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_{j+1}z^j \\
&=-2a_0\overline{b}_0+2\overline{b}_0\overline{b}_0+\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\left(a_1\overline{b}_{j+1}-2a_1a_{j+1}+\overline{b}_1a_{j+1}\right)z^j \\
&=2\overline{b}_0\left(\overline{b}_0-a_0\right)+\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\left[a_1\left(\overline{b}_{j+1}-a_{j+1}\right)+a_{j+1}\left(\overline{b}_1-a_1\right)\right]z^j.
\end{aligned}
$$

对比两端 z^j 的系数，所以当 $j=0$ 时，

$$2\overline{b}_0\left(\overline{b}_0-a_0\right)+a_1\left(\overline{b}_1-a_1\right)+a_1\left(\overline{b}_1-a_1\right)=0,$$

整理得

$$\overline{b}_0\left(\overline{b}_0-a_0\right)+a_1\left(\overline{b}_1-a_1\right)=0. \tag{3.3}$$

当 $j\geq 1$ 时

$$a_1\left(\overline{b}_{j+1}-a_{j+1}\right)+a_{j+1}\left(\overline{b}_1-a_1\right)=0. \tag{3.4}$$

综合以上结果得到

定理 3.1 假设 $\varphi(u)=\overline{\alpha(u)}+\beta(u)\in L^{\infty}(\mathbb{T})$，且 $\alpha'(u),\beta'(u)\in H^2$。$T_{\varphi}$ 为 H^2 上关于 C_1 的 2-复对称算子，那么

$$\overline{b_0}\left(\overline{b_0}-a_0\right)+a_1\left(\overline{b_1}-a_1\right)=0$$

且

$$a_1\left(\overline{b_{j+1}}-a_{j+1}\right)+a_{j+1}\left(\overline{b_1}-a_1\right)=0,\quad j\geq 1,$$

其中 $\alpha(u)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k u^k,\beta(u)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k u^k,u\in\mathbb{T}$。

如果对 Toeplitz 算子 T_{φ} 的符号函数做一些限制，可以得出一些整齐的结果。

推论 3.2 假设 $\alpha(u)=au(a\neq 0)$，$\beta(u)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k u^k$，$\varphi(u)=\overline{\alpha(u)}+\beta(u)\in L^{\infty}(\mathbb{T})$，且 $\beta'(u)\in H^2$。T_{φ} 为 H^2 上关于 C_1 的 2-复对称算子，那么

$$\overline{b_0}^2+a\left(\overline{b_1}-a\right)=0 \text{ 且 } b_1\neq 0, b_2=b_3=\cdots=0.$$

推论 3.3 若 $\varphi(u)=\overline{\alpha(u)}+\beta(u)\in L^{\infty}(\mathbb{T})$，$\alpha'(u),\beta'(u)\in H^2$ 且 $\alpha'(0)=0$。如果 T_{φ} 为 H^2 上关于 C_1 的 2-复对称算子，那么

$$\begin{cases}\beta(0)=0\\ \beta'(0)=0\end{cases} \text{或} \begin{cases}\beta(0)=\overline{\alpha(0)}\\ \beta'(0)=0\end{cases} \text{或 } \varphi\equiv\overline{\alpha(0)} \text{ 或 } \varphi\equiv 2\overline{\alpha(0)}=2\beta(0).$$

证明：令 $\alpha(u)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k u^k,\beta(u)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k u^k\,(u\in\mathbb{T})$。由定理 3.1，结合前面(3.3)和(3.4)式有

$$\begin{cases}b_0=0\\ b_1=0\end{cases} \text{或} \begin{cases}b_0=0\\ \alpha\equiv\alpha(0)=a_0\end{cases} \text{或} \begin{cases}b_0=\overline{a}_0\\ b_1=0\end{cases} \text{或} \begin{cases}b_0=\overline{a}_0\\ \alpha\equiv\alpha(0)=a_0\end{cases}$$

当 $\alpha=\alpha(0)$ 时，T_{φ} 为解析 Toeplitz 算子，再运用定理 2.1，$\varphi\equiv c$，(c 为常数)。因此

$$\begin{cases}b_0=0\\ b_1=0\end{cases} \text{或} \begin{cases}b_0=\overline{a}_0\\ b_1=0\end{cases} \text{或 } \varphi\equiv\overline{\alpha(0)}+\beta(0)=\overline{a}_0 \text{ 或 } \varphi\equiv\overline{\alpha(0)}+\beta(0)=2\overline{a}_0=2b_0.$$

如果对 T_{φ} 的符号函数做进一步限制，得到下面一个有意思的结果。

定理 3.4 $\varphi(u)=\overline{\alpha(u)}+\beta(u)\in L^{\infty}(\mathbb{T})$，$\alpha'(u),\beta'(u)\in H^2$ 且 $\alpha'(0)=0,\beta'(0)\neq 0$。如果 T_{φ} 为 H^2 上关于 C_1 的 2-复对称算子，那么 $\varphi\equiv c$，(c 为常数)。

证明：由推论 3.2，$\beta'(0)\neq 0$，那么推论的结果，只能是第三种或第四种情况。无论哪一种情况，都得到 $\varphi\equiv c$，(c 为常数)。

参考文献

[1] Garcia, S.R. and Putinar, M. (2006) Complex Symmetric Operators and Applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, **358**, 1285-1315. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-05-03742-6

[2] Guo, K. and Zhu, S. (2014) A Canonical Decomposition of Complex Symmetric Operators. *Operator Theory*, **72**, 529-547. https://doi.org/10.7900/jot.2013aug15.2007

[3] Ko, E. and Lee, J. (2016) On Complex Symmetric Toeplitz Operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **434**, 20-34. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.09.004

[4] Li, R., Yang, Y. and Lu, Y. (2020) A Class of Complex Symmetric Toeplitz Operators on the Hardy and Bergman

Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **489**, 124173. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124173

[5] Martinez-Avendano, R.A. and Rosenthal, P. (2007) An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space. *Graduate Texts in Mathematics*, **237**, Springer-Verlag, New York.

[6] Kang, D.O., Ko, E. and Lee, J.E. (2019) On Complex Symmetric Block Toeplitz Operators. arXiv: 1904. 04410[math. FA].