**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, 2021, 10(7), 2378-2384
Published Online July 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.107249

Hans汉斯

# 完全多部图中4-圈的Anti-Ramsey数

**余　婷，钟康云**

浙江师范大学数学系，浙江 金华
Email: 1342372278@qq.com

收稿日期：2021年6月12日；录用日期：2021年7月1日；发布日期：2021年7月15日

## 摘　要

对于边染色图$G$，若$G$的每一条边都被染不同的颜色，则称$G$为彩虹图。对于给定的图$G$和$H$，使得$G$中不存在任何彩虹子图$H$的最大边染色数，叫做$H$在$G$中的anti-Ramsey数，记作$AR(G,H)$。本文确定了完全多部图中$C_4$的anti-Ramsey数的精确值，研究结论覆盖了完全图和完全分裂图中的相关结果。

## 关键词

**Anti-Ramsey数，彩虹$C_4$，完全多部图**

# Anti-Ramsey Number of 4-Cycle in Complete Multipartite Graphs

**Ting Yu, Kangyun Zhong**

Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: 1342372278@qq.com

Received: Jun. 12th, 2021; accepted: Jul. 1st, 2021; published: Jul. 15th, 2021

## Abstract

**A given edge-colored graph $G$ is called rainbow if all its edges have distinct colors. Given two graphs $G$ and $H$, the maximum colors in an edge-coloring of $G$ without any rainbow $H$ is called the anti-Ramsey number of $H$ in $G$, which is denoted by $AR(G,H)$. In this paper, we determine the anti-Ramsey number of 4-cycle in complete multipartite graphs. The results cover the results in complete and complete split graphs obtained previously.**

## Keywords

**Anti-Ramsey Number, Rainbow $C_4$, Complete Multipartite Graph**

文章引用: 余婷, 钟康云. 完全多部图中 4-圈的 Anti-Ramsey 数[J]. 应用数学进展, 2021, 10(7): 2378-2384.
DOI: 10.12677/aam.2021.107249

## 1. 引言

本文中涉及的图都是有限无向的简单图。对于边染色图 $G$，若 $G$ 的每一条边都被染不同的颜色，则称 $G$ 为彩虹图。对于给定的图 $G$ 和 $H$，使得 $G$ 中不存在任何彩虹子图 $H$ 的最大边染色数，叫做 $H$ 在 $G$ 中的 anti-Ramsey 数，记作 $AR(G,H)$。Anti-Ramsey 数是由 Erdös 等人于上世纪 70 年代首次提出，并且揭示了图的 anti-Ramsey 数与 Turán 数之间密切相关。此外，他们还提出了任意圈在完全图中的 anti-Ramsey 数的猜想，结论如下：

**猜想 1.1.** [1]对任意正整数 $k\ge 3$，都有 $AR(K_n,C_k)=n\left(\frac{k-2}{2}+\frac{1}{k-1}\right)+O(1)$。

早期关于 anti-Ramsey 数的结论主要以完全图为母图，考虑单个图在完全图中的 anti-Ramsey 数，比如说：路，圈，团，匹配等，可以参考[2] [3] [4]，本文主要介绍关于 $C_4$ 的结论。首先，Alon [5]、Jiang & West [6]解决了完全图中 $C_4$ 的 anti-Ramsey 数，得到如下结论：

**定理 1.2.** [5] [6]对任意 $n\ge 4$，都有 $AR(K_n,C_4)=\left\lfloor\frac{4n}{3}\right\rfloor-1$。

Axenovich 等人[7]率先将 anti-Ramsey 数问题推广到完全二部图，他们证明了完全二部图中任意偶圈的 anti-Ramsey 数，涉及 $C_4$ 的结论如下：

**定理 1.3.** [7]对任意正整数 $n_1,n_2$ 都有 $AR(K_{n_1,n_2},C_4)=n_1+n_2-1$。

完全分裂图作为完全多部图的一种特殊情形，短圈 $C_4$ 在完全分裂图中的 anti-Ramsey 数由 Lv 等人[8]证明，结论如下：

**定理 1.4.** [8]对任意 $n+s\ge 4$，以及 $n\ge 2$，都有

$$AR\left(K_n+\overline{K_s},C_4\right)=\begin{cases}n+s+\left\lfloor\frac{n+s}{3}\right\rfloor-1, & \text{如果} n\ge 2s;\\ n+s+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1, & \text{如果} 2\le n\le 2s.\end{cases}$$

为了下文叙述方便，我们先定义本文中常用的一些图论的术语和符号，并给出一些通用的特殊定义及符号。在图 $G$ 中，$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别为 $G$ 的顶点集和边集。此外，$|V(G)|$，$|E(G)|$ 以及 $\omega(G)$ 分别称为顶点数，边数和连通分支数。对于任意点 $v\in V(G)$，与 $v$ 相关联的边的数目叫做 $v$ 在 $G$ 的度，记作 $d_G(v)$。图 $G$ 中，点不交的 $C_3$ 的最大数量记做 $\Gamma(G)$。

若 $G$ 是一个顶点序列为 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 的图，且满足两个顶点是邻接的当且仅当它们在顶点的序列是前后相继的，则称 $G$ 为路，记作 $P_n=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，其中 $v_1$ 和 $v_n$ 分别叫做路 $P_n$ 的起点和终点。而若 $G$ 可由一条路连接起点和终点得到，则称 $G$ 为圈，记作 $C_n=[v_1,v_2,\cdots,v_n]$。此外，令 $\alpha'(G)$ 表示 $G$ 中最大匹配的边数。对于图 $G$ 和 $H$，若满足 $V(H)\subseteq V(G)$ 和 $E(H)\subseteq E(G)$，则称 $H$ 是 $G$ 的一个子图，记作 $H\subseteq G$。如果 $V(H)=V(G)$，则 $H$ 叫做 $G$ 的生成子图。

对于边染色图 $G$，任意 $e\in E(G)$，令 $c(e)$ 表示 $e$ 的颜色。若子图 $H\subseteq G$，则 $c(H)$ 表示子图 $H$ 所有边的颜色集合。任意 $v\in V(G)$，从 $G$ 中删除点 $v$ 而损失的颜色数叫做点 $v$ 的饱和度，记作 $l(v)$，即 $l(v)=|c(G)|-|c(G-v)|$。若与 $v$ 相关联的边 $e$，满足 $c(e)\in c(G)\setminus c(G-v)$，则称 $e$ 为 $v$ 的饱和边。

## 2. 引理

**引理 2.1.** 设 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ 的部集分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_m$，其中 $|X_i|=n_i$，$i=1,2,\cdots,m$ 且 $n_1\ge n_2\ge\cdots\ge n_m\ge 1$。对任意 $m\ge 2$，都有

$$\alpha'\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)=\begin{cases}\left\lfloor\dfrac{n_1+n_2+\cdots+n_m}{2}\right\rfloor, & \text{如果}n_1<n_2+\cdots+n_m;\\ n_2+\cdots+n_m, & \text{如果}n_1\ge n_2+\cdots+n_m.\end{cases}$$

**证明**：设 $M$ 为 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ 的一个最大匹配，使得 $M$ 中尽可能多的包含一个端点属于 $X_i$ 的边。此外，令 $V_1=V\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)\backslash V(M)$。显然，$V_1$ 中的所有点都属于同一个部集，否则与 $M$ 的定义相矛盾。

**断言 1.** 若 $V_1\cap X_1\ne\varnothing$，则对任意边 $e\in M$，它都包含一个属于 $X_1$ 的端点。

**证明**：假设存在一个点 $w$ 和 $M$ 中的一条边 $uv$，使得 $w=V_1\cap X_1$，且 $u,v\notin X_1$。令 $u\in X_i$，$v\in X_j$，$i\ne 1\ne j$。因为 $i\ne 1$，我们有 $uw\in E\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)$。现在我们可以通过增加 $uw$，删除 $uv$ 得到一个新的 $M$，这与 $M$ 的定义相矛盾，断言 1 证明完毕。

**断言 2.** 若 $|V_1|\ge 2$，则 $V_1\subseteq X_i$。

**证明**：注意 $V_1$ 中的所有点都属于同一个部集。假设 $|V_1|\ge 2$ 且 $V_1\subseteq X_i$，$i\ne 1$。令 $u,v\in V_1$。因为 $n_1\ge n_i$，所以必定存在一条边 $xy\in M$，使得 $x\in X_i$，$y\in X_j$，$i\ne j$。又因为 $i\ne 1\ne j$，我们有 $ux,vy\in E\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)$。现在我们可以由 $M$ 通过增加两条边 $ux,vy$，删除一条边 $xy$ 得到一个更大的匹配，这与 $M$ 的定义相矛盾。断言 2 证明完毕。

为了完成证明，下面我们分两种情形进行讨论。

**情形 1.** $V_1\cap X_1\ne\varnothing$。

由断言 1 可知，$M$ 中的所有边都有一个属于 $X_1$ 的端点。因此，$n_1\ge n_2+n_3+\cdots+n_m+1$，并且此时 $\alpha'\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)=n_2+\cdots+n_m$。

**情形 2.** $V_1\cap X_1=\varnothing$。

由断言 2 可知，$|V_1|\le 1$。因此，$n_1\le n_2+\cdots+n_m$，并且此时 $\alpha'\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)=\left\lfloor\dfrac{n_1+\cdots+n_m}{2}\right\rfloor$。显然，当 $n_1=n_2+\cdots+n_m$ 时，$\alpha'\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)=\left\lfloor\dfrac{n_1+\cdots+n_m}{2}\right\rfloor=n_2+\cdots+n_m$

引理 2.1 证明完毕。

由引理 2.1，我们得到如下推论。

**推论 2.2.** 设 $n=\sum_{i=1}^{n}n_i$，完全多部图 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ 存在完美匹配当且仅当 $n_1=n_2+\cdots+n_m$，或者 $n_1<n_2+\cdots+n_m$ 且 $n$ 为偶数。

**引理 2.3.** 对任意 $m\ge 3$，都有

$$\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)=\begin{cases}n_3+\cdots+n_m, & \text{如果}n_2\ge n_3+\cdots+n_m;\\ \left\lfloor\dfrac{n_2+\cdots+n_m}{2}\right\rfloor, & \text{如果}n_2<n_3+\cdots+n_m\text{且}n_1>\left\lfloor\dfrac{n_2+\cdots+n_m}{2}\right\rfloor;\\ \left\lfloor\dfrac{n_1+\cdots+n_m}{3}\right\rfloor, & \text{如果}n_2<n_3+\cdots+n_m\text{且}n_1\le\left\lfloor\dfrac{n_2+\cdots+n_m}{2}\right\rfloor.\end{cases}$$

**证明**：设 $\Gamma$ 为 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ 中包含最大数目点不交的 $C_3$ 的集合，使得 $\Gamma$ 中尽可能多的包含一个顶点属于 $X_1$ 的 $C_3$。换言之，在保证数目最大的前提下我们优先挑选那些有一个顶点属于 $X_1$ 的 $C_3$。令

$V_1 = V\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)\backslash V(\Gamma)$。显然，$V_1$ 中的有点至多属于两个部集，否则与 $\Gamma$ 的定义相矛盾。令 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$，$n^* = n_2 + \cdots + n_m$。

**断言 3.** 若 $V_1 \cap X_1 \neq \varnothing$，则对任意 $C_3 \in \Gamma$，它都包含一个属于 $X_i$ 的顶点。

**证明：** 假设存在一个点 $s$，以及 $\Gamma$ 中的一个 $C_3 = [u,v,w]$，使得 $s \in V_1 \cap X_1$ 且 $u,v,w \notin X_1$。令 $u \in X_i,\ v \in X_j,\ w \in X_z,\ i \neq j \neq z \neq 1$。现在我们可以由 $\Gamma$ 通过增加 $[u,v,s]$，删除 $[u,v,w]$ 来得到一个新的 $\Gamma$，这与 $\Gamma$ 的定义相矛盾。

断言 3 证明完毕。

**断言 4.** 若 $|V_1| \geq 3$，则 $V_1 \cap X_1 \neq \varnothing$。

**证明：** 注意 $V_1$ 中的所有点属于至多两个部集。假设 $|V_1| \geq 3$ 且 $V_1 \cap X_1 \neq \varnothing$。如果 $V_1$ 中的所有点属于同一个部集，不失一般性，我们假设 $V_1 \subseteq X_i,\ s_1,s_2,s_3 \in X_i \cap V_1$，其中 $i \neq 1$。因为 $n_1 \geq n_i$，所以 $\Gamma$ 中必定存在两个点不交的 $C_3$，不妨设为 $[u_1,v_1,w_1]$ 和 $[u_2,v_2,w_2]$，使得 $u_1,u_2 \in X_1,\ v_1,v_2,w_1,w_2 \notin X_i$。现在我们可以由 $\Gamma$ 通过增加 $[s_1,v_1,w_1]$，$[s_2,u_2,w_2]$，以及 $[s_3,u_1,v_2]$，删除 $[u_1,v_1,w_1]$ 和 $[u_2,v_2,w_2]$ 得到一个更大的点不交的 $C_3$ 的集合，这与 $\Gamma$ 的定义相矛盾。

因此，$V_1$ 中的所有点恰恰属于两个部集，不失一般性，假设 $|X_i \cap V_1| \geq 2,\ |X_j \cap V_1| \geq 1$ 以及 $s_1,s_2 \in X_i \cap V_1,\ s_3 \in X_j \cap V_1,\ i \neq 1 \neq j$。因为 $n_1 \geq n_i$，所以 $\Gamma$ 中必定存在一个 $C_3$，不妨设为 $[u_1,v_1,w_1]$，使得 $u_1 \in X_1,\ v_1,w_1 \notin X_i$。现在我们可以由 $\Gamma$ 通过增加 $[u_1,v_1,w_1]$ 和 $[s_2,s_3,u_1]$，删除 $[u_1,v_1,w_1]$ 得到一个更大的点不交的 $C_3$ 的集合，这与 $\Gamma$ 的定义相矛盾。断言 4 证明完毕。

为了完成证明，下面我们分三种情形进行讨论。

**情形 1.** $V_1 \subseteq X_1$。

由断言 3 可知，对任意 $C_3 \in \Gamma$，它都包含一个属于 $X_1$ 的端点。因此，$n_1 > \left\lfloor \dfrac{n_2+\cdots+n_m}{2} \right\rfloor$。另一方面，$K_{n_2,n_3,\cdots,n_m}$ 中必定存在一个完美匹配。由推论 2.2，我们有 $n_2 = n_3 + \cdots + n_m$ 或者 $n_2 < n_3 + \cdots + n_m$ 且 $n^*$ 为偶数。显然，此时 $\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right) = \alpha'\left(K_{n_2,n_3,\cdots,n_m}\right) = \dfrac{n_2+\cdots+n_m}{2}$。

**情形 2.** $V_1 \not\subset X_1$ 且 $V_1 \cap X_1 \neq \varnothing$。

由断言 3 可知，对任意 $C_3 \in \Gamma$，它都包含一个属于 $X_1$ 的端点。另一方面，因为 $V_1 \not\subset X_1$，所以 $K_{n_2,n_3,\cdots,n_m}$ 中不存在完美匹配。由推论 2.2，我们有 $n_2 \geq n_3 + \cdots + n_m + 1$ 或者 $n_2 < n_3 + \cdots + n_m$ 且 $n^*$ 为奇数。当 $n_2 \geq n_3 + \cdots + n_m + 1$ 时，$\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right) = \alpha'\left(K_{n_2,n_3,\cdots,n_m}\right) = n_3 + \cdots + n_m$。此外，当 $n_2 < n_3 + \cdots + n_m$ 且 $n^*$ 为奇数时，$\alpha'\left(K_{n_2,n_3,\cdots,n_m}\right) = \left\lfloor \dfrac{n_2+\cdots+n_m}{2} \right\rfloor$ 所以 $n_1 > \left\lfloor \dfrac{n_2+\cdots+n_m}{2} \right\rfloor$。显然，此时 $\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right) = \alpha'\left(K_{n_2,n_3,\cdots,n_m}\right) = \left\lfloor \dfrac{n_2+\cdots+n_m}{2} \right\rfloor$。

**情形 3.** $V_1 \cap X_1 = \varnothing$。

由断言 4 可知，$|V_1| \leq 2$。因为 $V_1 \cap X_1 = \varnothing$，所以 $n_1 \leq \left\lfloor \dfrac{n_2+n_3+\cdots+n_m}{2} \right\rfloor$ 且 $n_2 \leq n_3 + \cdots + n_m$。显然，此时 $\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right) = \left\lfloor \dfrac{n_1+\cdots+n_m}{3} \right\rfloor$。引理 2.3 证明完毕。

## 3. 主要结果

基于以上引理，下面开始证明我们的主要结论。

**构造 3.1**. 设 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\ (m\ge 3)$ 的部集分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_m$，其中 $|X_i|=n_i$，$i=1,2,\cdots,m$，且 $n_1\ge n_2\ge\cdots\ge n_m$。此外，令 $\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)=t$，此时我们给出 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ 的一种边染色 $c$，具体染色方法如下：

首先，在 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ 中尽可能多的取出点不交的 $C_3$，不妨分别设为 $T_1,T_2,\cdots,T_t$，令 $\{T_{t+1},T_{t+2},T_{n-2t}\}$ 表示由剩下的点构成的集合。然后，将 $T_1,T_2,\cdots,T_t$ 中的所有边都染不同的颜色。最后，对任意 $1\le i,j\le n-2t$，若 $i<j$，则将 $T_i$ 和 $T_j$ 之间的所有边都染新颜色 $i$。

不难发现，由构造 3.1 给出的 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ 的边染色 $c$ 中不包含任何彩虹子图 $C_4$，并且 $c$ 中恰恰使用了 $\sum_{i=1}^m n_i+\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)-1$ 种颜色。因此，构造 3.1 表明 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ 中 $C_4$ 的 anti-Ramsey 数不小于 $\sum_{i=1}^m n_i+\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)-1$，即

$$AR\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m},C_4\right)\ge\sum_{i=1}^m n_i+\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)-1.$$

**定理 3.2**. 对任意 $m\ge 3$，都有 $AR\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m},C_4\right)=\sum_{i=1}^m n_i+\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)-1$。

**证明**：由构造 3.1 我们已经证明 $AR\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m},C_4\right)\ge\sum_{i=1}^m n_i+\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)-1$，因此这里我们只需继续证明 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ 中 $C_4$ 的 anti-Ramsey 数不大于 $\sum_{i=1}^m n_i+\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)-1$，即

$$AR\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m},C_4\right)\le\sum_{i=1}^m n_i+\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)-1.$$

设 $n=n_1+n_2+\cdots+n_m$，对 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ 的顶点数 $n$ 用归纳法。由引理 1.2 可知，上界对 $n=m$ 成立。令 $n\ge m+1$，并假设上界对顶点数小于 $n$ 也成立。

假设存在一个恰恰使用了 $n+\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)$ 种颜色的 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ 的边染色，使得 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ 中不包含任何彩虹子图 $C_4$。显然，对任意点 $v\in V\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)$，都有 $\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}-v\right)\le\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)$。注意 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ 不包含任何彩虹子图 $C_4$。因此，$K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}-v$ 中也不包含任何彩虹子图 $C_4$。根据归纳假设可知，$\left|c\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}-v\right)\right|\le AR\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}-v,C_4\right)\le n+\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)-2$。

因此，对任意点 $v\in V\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)$，都有

$$\begin{aligned}l(v)&=\left|c\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)\right|-\left|c\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}-v\right)\right|\\&\ge n+\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)-\left(n+\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)-2\right)\\&=2\end{aligned}\tag{1}$$

为了完成证明，需要引入下面这些断言。

**断言 5**. 对任意点 $v\in V\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)$，若 $vx,vy$ 是 $v$ 的两条不同颜色的饱和边，则 $x$ 和 $y$ 必定属于不同的部集。

**证明**：假设存在一个点 $v\in V\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)$，$vx$ 和 $vy$ 是 $v$ 的两条颜色不同的饱和边，使得 $x,y$ 属于同一个部集。不失一般性，我们假设 $v\in X_p,\ x,y\in X_q,\ 1\le p\ne q\le m$。由不等式(1)可知，至少存在 $x$ 的一条饱和边，不妨设为 $xz$，使得 $c(xz)\ne c(vx)$。令 $z\in X_r,\ 1\le r\ne q\le m$。因为 $vy$ 是 $v$ 的一条饱和边，所以 $c(xz)\ne c(vy)$。

如果 $r\ne p$ 则 $v,x,y,z$ 为属于三个不同部集的四个点，其中 $x,y\in X_p$。现在我们考虑边 $yz$ 的颜色。不难发现，因为 $xz$ 是 $x$ 的一条饱和边，可知 $c(yz)\ne c(xz)$。此外，因为 $vx$ 和 $vy$ 是 $v$ 的两条不同颜色的饱和边，我们有 $c(vx)\ne c(yz)\ne c(vy)$。因此，此时存在一个彩虹子图 $C_4=[v,x,z,w]$，矛盾。所以 $r=p$，此

时 $v,x,y,z$ 为属于两个不同部集的四个点，其中 $x,y\in X_q,\ v,z\in X_p$。同理可得，$c(yz)\notin\{c(vx),c(vy),c(xz)\}$。因此，此时同样存在一个彩虹子图 $C_4=[v,x,z,y]$，矛盾。断言 5 证明完毕。

**断言 6.** 对任意点 $v\in V\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)$，都有 $l(v)=2$。

**证明：** 由不等式(1)可知，对任意点 $v\in V\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)$，都有 $l(v)\ge 2$。因此，我们只需证明上界 $l(v)\le 2$。假设存在一个点 $v\in V\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)$，使得 $l(v)\ge 3$。不失一般性，设 $v\in X_p,\ 1\le p\le m$。由断言 5 可知，存在至少 $v$ 的三条颜色不同的饱和边，不妨设为 $vx,vy,vz$，使得 $x\in X_q,\ y\in X_r$，以及 $z\in X_s,\ 1\le p\ne q\ne r\ne s\le m$。根据不等式(1)可知，至少存在 $x$ 的一条饱和边，不妨设为 $xw$，使得 $c(xw)\ne c(vx)$。令 $w\in X_h$。因为 $vx,vy,vz$ 是 $v$ 的三条颜色不同的饱和边，我们有 $c(xw)\notin\{c(vx),c(vy),c(vz)\}$。如果 $h\notin\{p,r,s\}$，则 $v,x,y,w$ 为属于不同部集的四个点。现在我们考虑 $yw$ 的颜色。因为 $xw$ 是 $x$ 的一条饱和边，可知 $c(yw)\ne c(xw)$。此外，因为 $vx,vy$ 是 $v$ 的两条颜色不同的饱和边，我们有 $c(vx)\ne c(yw)\ne c(vy)$。因此，此时存在一个彩虹子图 $C_4=[v,x,w,y]$，矛盾。

因此，$h\in\{p,r,s\}$，由 $X_r$ 和 $X_r$ 的对称性，我们只考虑 $h=p$ 或者 $h=r$ 这两种情形。如果 $h=p$，则 $v,x,y,w$ 为属于三个不同部集的四个点，其中 $v,w\in X_p$。同理可得，$c(yw)\notin\{c(vx),c(vy),c(xw)\}$。因此，此时存在一个彩虹子图 $C_4=[v,x,w,y]$，矛盾。所以 $h=r$，则 $v,x,y,w$ 为属于不同部集的四个点。同理可得 $c(zw)\notin\{c(vx),c(vz),c(xw)\}$。因此，此时同样存在一个彩虹子图 $C_4=[v,x,w,y]$，矛盾。断言 6 证明完毕。

**断言 7.** 对任意两个点 $u,v\in V\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)$，若 $uv$ 是 $u$ 的饱和边，则 $uv$ 也是 $v$ 的饱和边。

**证明：** 假设存在两个点 $u,v\in V\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)$，使得 $uv$ 是 $u$ 的饱和边，但 $uv$ 不是 $v$ 的饱和边。令 $u\in X_p,\ v\in X_q$。由断言 5 和断言 6 可知，存在 $u$ 的一条饱和边，不妨设为 $ux$，使得 $c(ux)\ne c(uv)$，其中 $x\in X_r,\ 1\le r\ne q\le m$。根据断言 6，我们有 $l(v)=2$，所以存在 $v$ 的两条颜色不同的饱和边，不妨设为 $vy,vz$。因为 $ux$ 是 $u$ 的饱和边，可知 $c(vy)\ne c(ux)\ne c(vz)$。同时，根据假设可知，$c(vy)\ne c(uv)\ne c(vz)$。如果 $y\notin X_r$，则我们考虑边 $xy$ 的颜色。因为 $vy$ 是 $v$ 的饱和边，可知 $c(xy)\ne c(vy)$。此外，因为 $uv$ 和 $ux$ 是 $v$ 的两条颜色不同的饱和边，我们有 $c(uv)\ne c(xy)\ne c(ux)$。因此，此时存在一个彩虹子图 $C_4=[u,v,y,x]$，矛盾。所以 $y\in X_r$。同理可得，$z\in X_r$，这与断言 5 相矛盾。断言 7 证明完毕。

**断言 8.** 若 $xy$ 既为 $x$ 的饱和边，又为 $y$ 的饱和边，则颜色 $c(xy)$ 只用于染边 $xy$。

**证明：** 由饱和边的定义，因为 $xy$ 为 $x$ 的饱和边，所以颜色 $c(xy)$ 只用于染与 $x$ 相关联的边。同理，因为 $xy$ 为 $y$ 的饱和边，所以颜色 $c(xy)$ 只用于染与 $y$ 相关联的边。因此，颜色 $c(xy)$ 只用于染边 $xy$。断言 8 证明完毕。

令 $G$ 为 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}$ 的一个生成子图，使得若 $uv\in E(G)$，则 $uv$ 是 $u$ 的饱和边，或者 $uv$ 是 $v$ 的饱和边。此外，设 $G_i$ 为 $G$ 任意一个连通分支，其中 $i\in\{1,2,\cdots,\omega(G)\}$。由断言 7 和断言 8 可知，对任意 $e\in E(G)$，$c(e)$ 只用于染边 $e$。又由断言 6 可得，对任意点 $v\in V(G)$，都有 $d_G(v)=2$，所以 $G$ 是一个 2-正则图。因此，对任意 $i\in\{1,2,\cdots,\omega(G)\}$，$G_i$ 为圈。令 $|V(G_i)|=n_i$，不妨设 $G_i=\left[v_1,v_2,\cdots,v_{n_i}\right]$。

**断言 9.** 对任意 $v_j,v_{j+3}\in V(G_i)$，都有 $v_j,v_{j+3}$ 属于同一部集。

**证明：** 显然，$n_i\ge 3$。假设存在 $v_j,v_{j+3}\in V(G_i)$，使得 $v_j,v_{j+3}$ 属于不同部集。现在我们考虑边 $v_jv_{j+3}$ 的颜色。注意对任意 $e\in E(G)$，$c(e)$ 只用于染边 $e$。所以 $c(v_jv_{j+1}),c(v_{j+1}v_{j+2})$ 以及 $c(v_{j+2\,j+3})$ 分别只用于染边 $v_jv_{j+1},v_{j+1}v_{j+2},v_{j+2}v_{j+3}$，因此，$c(v_jv_{j+3})\notin\{c(v_jv_{j+1}),c(v_{j+1}v_{j+2}),c(v_{j+2}v_{j+3})\}$。显然，此时存在一个彩虹子

图 $C_4=\left[v_j,v_{j+1},v_{j+2},v_{j+3}\right]$，矛盾。断言 9 证明完毕。

由断言 9 可知，$n=0(\bmod 3)$ 且 $\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)=\frac{n}{3}$。根据归纳假设可知，对任意点 $v\in V\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)$，都有

$$\left|c\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}-v\right)\right|\le AR\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}-v,C_4\right)=n+\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)-3.$$

因此，对任意点 $v\in V\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)$，都有

$$\begin{aligned} l(v)&=\left|c\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)\right|-\left|c\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}-v\right)\right| \\ &\ge n+\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)-\left(n+\Gamma\left(K_{n_1,n_2,\cdots,n_m}\right)-3\right) \\ &=3 \end{aligned}$$

这与断言 6 矛盾。

综上所述，定理 3.2 证明完毕。

## 参考文献


[1] Erdös, P., Simonovits, M. and Sós, V.T. (1975) Anti-Ramsey Theorems, Infinite Finite Sets, Vol. II. *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai*, **10**, 633-643.

[2] Fujita, S., Magnant, C. and Ozeki, K. (2010) Rainbow Generalizations of Ramsey Theory: A Survey. *Graphs and Combinatorics*, **26**, 1-30. https://doi.org/10.1007/s00373-010-0891-3

[3] Fujita, S., Magnant, C. and Ozeki, K. (2014) Rainbow Generalizations of Ramsey Theory—A Dynamic Survey. *Theory and Applications of Graphs*, Article 1. https://doi.org/10.20429/tag.2014.000101

[4] Kano, M. and Li, X.L. (2008) Monochromatic and Heterochromatic Subgraphs in Edge-Colored Graphs—A Survey. *Graphs and Combinatorics*, **24**, 237-263. https://doi.org/10.1007/s00373-008-0789-5

[5] Alon, N. (1983) On a Conjecture of Erdös, Simonovits and Sós Concerning Anti-Ramsey Theorems. *Journal of Graph Theory*, **1**, 91-94. https://doi.org/10.1002/jgt.3190070112

[6] Jiang, T. and West, D.B. (2003) On the Erdös -Simonovits-Sós Conjecture on the Anti-Ramsey Number of a Cycle. *Combinatorics, Probability and Computing*, **12**, 585-598. https://doi.org/10.1017/S096354830300590X

[7] Axenovich, M., Jiang, T. and Kündgen, A. (2004) Bipartite Anti-Ramsey Numbers of Cycles. *Journal of Graph Theory*, **47**, 9-28. https://doi.org/10.1002/jgt.20012

[8] Lv, B.H., Ye, K.C. and Wang, H.P. (2018) Rainbow Numbers for Small Cycles. *Journal of Mathematics and Computer Science*, **8**, 297-303.