

具有潜伏效应的登革热动力学模型稳定性分析

何才琼, 周 瑶

重庆理工大学, 重庆

Email: hecaiqiong_girl@163.com, 1451141487@qq.com

收稿日期: 2021年6月19日; 录用日期: 2021年7月11日; 发布日期: 2021年7月23日

摘 要

登革热是一种严重危害人类健康的传染病。考虑登革热的传播在人群中具有潜伏期, 并将蚊虫分为幼虫和成虫两阶段, 建立传染病模型, 再研究其动力学行为。通过引入原系统的极限系统, 得到了系统是一致持久的, 进一步, 利用单调系统相关理论证明了其地方病平衡点在 $R_0 > 1$ 时是全局渐近稳定的。

关键词

传染病模型, 基本再生数, 单调系统, 稳定性

Stability Analysis of Dengue Thermokinetic Model with Latent Effect

Caiqiong He, Yao Zhou

Chongqing University of Technology, Chongqing

Email: hecaiqiong_girl@163.com, 1451141487@qq.com

Received: Jun. 19th, 2021; accepted: Jul. 11th, 2021; published: Jul. 23rd, 2021

Abstract

Dengue fever is a kind of infectious disease which seriously harms human health. Considering that dengue fever has incubation period in the population, the mosquito is divided into two stages: larva and adult. The infectious disease model is established and its dynamic behavior is studied. By introducing the limit system of the original system, we get that the system is consistent and persistent. Furthermore, the local disease equilibrium point is globally asymptotically stable when $R_0 > 1$ using the theory of monotone system.

Keywords

Infectious Disease Model, Basic Regeneration Number, Monotone System, Stability

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

登革热是由登革热病毒引起的一种急性传染病。这种疾病自出现起在全球广泛流行, 2014 年世界卫生组织(WHO)称其为“全球蔓延最快的虫媒传染病”。在登革热的传播过程中, 蚊虫通过叮咬患者而吸入携带登革病毒的血液, 然后再叮咬易感人类, 登革病毒经过两者的血液交换后使人患病。此外, 人类感染病毒之后, 并不会立马表现出相应的症状, 而是会经过一段 3~8 天的潜伏期, 潜伏期内的个体一般不具有传染性。鉴于此, 文献[1] [2]提出了人类感染病毒之后具有潜伏期的传染病模型, 并分析了模型的平衡点的全局渐近行为。另外, 科学试验证明自然界主要存在四种登革病毒血清型(DENV-1,2,3,4), 人类感染其中某一种血清型病毒并被治愈之后会获得对这种血清型的终生免疫能力, 而对另外三种仅会产生短暂的免疫[2] [3] [4]。Abidemi 等[3] [4]基于这一事实, 认为人类感染某一特定登革病毒之后, 仍然有感染其它三种登革病毒的可能性, 从而建立了人类分两阶段(感染某型登革病毒被治愈后又再次感染其它型登革病毒)感染病毒的传播动力学模型。虽然治疗登革病毒感染的特异性药物仍然有待于进一步的研究[5], 但是已有不少学者通过引入疫苗有效作用于人群之后建立了具有疫苗控制的传染病模型[3] [4] [5] [6], 结果显示, 疫苗对于登革热的控制产生了很好的效果。而在涉及到蚊虫的发育阶段建模时, 学者们主要是考虑蚊虫由幼虫经过类似于 Logistic 生长抑制作用之后才发育为成虫, 从而将蚊虫分为三类(幼虫、易感成虫和感染成虫)来建立模型[5] [6] [7] [8]。

虽然上述文献在建模时考虑因素较为全面, 但是这也导致传染病模型的地方病平衡点的全局稳定性证明变得异常困难, 许多作者都没能给出理论证明, 只能通过数值模拟作为辅助证明[3] [7]。为便于分析, 本文只考虑人类感染 1 种血清型病毒, 因而不会发生交叉感染。借鉴文献[2]的建模思路之后, 我们引入了一个人类和幼虫都以常数输入进行增殖的简单系统, 借助于单调系统的相关理论对系统平衡点作了更为详细和全面的分析, 得到了关于平衡点稳定性比较完整的结果, 最后结合数值模拟加以佐证。

2. 模型建立

大量科学事实证明登革热病毒在感染人群之后, 人群会进入到 3~8 天的疾病潜伏期, 随后, 进入感染阶段。因此, 借鉴文献[1] [2]的思路, 将人群划分为以下四个仓室是比较合适的:

$S_h(t)$: 易感者类(t 时刻能被登革热病毒感染的人类数量);

$E_h(t)$: 潜伏者类(t 时刻被登革热病毒感染, 但还不具备将病毒传染给其他人和蚊虫的能力的人类数量);

$I_h(t)$: 染病者类(t 时刻被登革热病毒感染且能将病毒传染给其他人和蚊虫的人类数量);

$R_h(t)$: 移除者类(t 时刻从感染登革热病毒中治愈或获得该病毒免疫能力的人类数量)。

另一方面, 考虑到蚊虫的生长分为幼虫和成虫两个主要阶段, 再结合其生命周期较短, 一旦染病将终生不能治愈的特点, 根据文献[5] [6] [7] [8]可将蚊虫分为如下三类:

- $A_m(t)$: 幼虫类(t 时刻的幼虫数量);
- $S_m(t)$: 易感成虫类(t 时刻能被登革热病毒感染的成虫数量);
- $I_m(t)$: 感染成虫类(t 时刻感染登革热病毒的成虫数量)。

为了更好地理解登革热传播过程, 在建立传染病微分方程系统之前, 我们先给出系统中参数需要满足的一些假设条件和相应解释如下:

- 1) 所有人类和媒介(蚊虫)的新生个体仍为易感者类($S_h(t)$ 和 $S_m(t)$), 即不发生垂直传播;
- 2) 每个种群在 t 时刻时的个体总数量分别为所划分的各仓室的个体数量之和, 即 $N_h(t) = N_h = S_h(t) + E_h(t) + I_h(t) + R_h(t)$ 和 $N_m(t) = S_m(t) + I_m(t)$;
- 3) 人群和蚊虫分别以常数输入率 A 和 C 进行增殖;
- 4) 蚊虫在单位时间内平均叮咬人的次数恒定, 设为 B ;
- 5) 不考虑人群和蚊虫的因病致死。

由此, 我们可以得到登革热病毒在两个种群中的传播流程如下图 1。

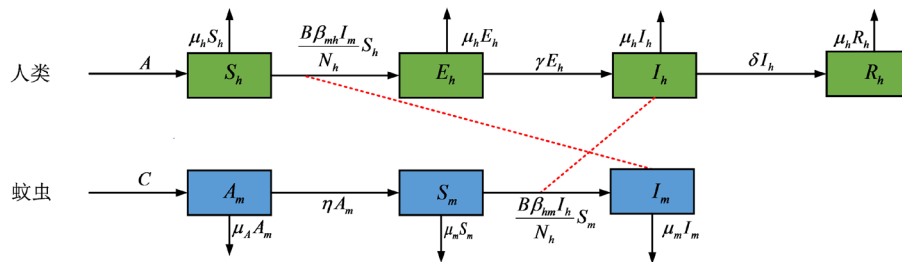


Figure 1. Flow chart of transmission of dengue virus
图 1. 登革病毒的传播流程图

根据以上病毒传播流程框图和相应假设, 建立登革热传染病的模型如下

$$\begin{cases}
 S'_h = A - \frac{B\beta_{mh}I_m}{N_h}S_h - \mu_h S_h \\
 E'_h = \frac{B\beta_{mh}I_m}{N_h}S_h - \gamma E_h - \mu_h E_h \\
 I'_h = \gamma E_h - \mu_h I_h - \delta I_h \\
 R'_h = \delta I_h - \mu_h R_h \\
 A'_m = C - \eta A_m - \mu_A A_m \\
 S'_m = \eta A_m - \mu_m S_m - B\beta_{hm} \frac{I_h}{N_h} S_m \\
 I'_m = B\beta_{hm} \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m
 \end{cases} \tag{1}$$

模型涉及到的参数及其具体意义见表 1, 考虑到生物学意义, 我们假设模型中所有参数的值均为非负。

3. 模型分析

本节主要讨论系统(4.1)的可行域以及在可行域内其平衡点的存在唯一性, 再根据无病平衡点并结合下一代矩阵思想[9]定义了系统的基本再生数。

Table 1. Model (1) Parameters and their interpretation**表 1.** 模型(1)参数及其解释

参数	描述
A	人类常数输入率
B	蚊虫单位时间内平均叮咬人群的次数
β_{mh}	蚊虫叮咬导致病毒从蚊虫传播到人类的概率
μ_h	人类死亡率
γ	潜伏者类到患病者类的转移率
δ	患病者类到移除者类的移除率
C	蚊虫常数输入率
η	幼虫成熟率
μ_A	幼虫死亡率
μ_m	成虫死亡率
β_{hm}	蚊虫叮咬导致病毒从人类传播到蚊虫的概率

3.1. 正不变性和解的有界性

定理 1 R_+^7 是系统(4.1)的正不变集。

证明: 根据文献[2], 将系统(4.1)写成如下形式

$$X' = M(X)X + F$$

上式中 $X = (S_h, E_h, I_h, R_h, A_m, S_m, I_m)^T$,

$$M(X) = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & -\gamma - \mu_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_h - \delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\mu_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta - \mu_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & m_{66} & 0 \\ 0 & 0 & m_{73} & 0 & 0 & 0 & -\mu_m \end{bmatrix}$$

其中

$$m_{11} = -\frac{B\beta_{mh}I_m}{N_h} - \mu_h, m_{21} = \frac{B\beta_{mh}I_m}{N_h}, m_{66} = -\frac{B\beta_{hm}I_h}{N_h} - \mu_m, m_{73} = \frac{B\beta_{hm}S_m}{N_h}$$

以及

$$F = (A, 0, 0, 0, C, 0, 0)^T$$

显然, 矩阵 $M(X)$ 的非对角线元素均为非负, 为一个 Metzler 矩阵[10], 由于 $F \geq 0$, 故系统(4.1)在 R_+^7 中是正不变的, 即从 R_+^7 的正象限中某个初值出发的任意轨线永远停留在 R_+^7 中, 即证。

定理 2 若 $(S_h(0), E_h(0), I_h(0), R_h(0), A_m(0), S_m(0), I_m(0)) \in R_+^7$, 则系统(4.1)的解最终一致有界。

证明: 首先, 设 $(S_h(t), E_h(t), I_h(t), R_h(t), A_m(t), S_m(t), I_m(t))$ 为系统(4.1)的解, 进一步, 定义 $L_1(t) = S_h(t) + E_h(t) + I_h(t) + R_h(t)$, 由系统(4.1)前 4 个方程相加可得

$$L_1'(t) = A - \mu_h L_1(t)$$

易证

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} L(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = \frac{A}{\mu_h} := M_1$$

此时, 存在 $t_1 > 0$, 使得当 $t > t_1$ 时, $S_h(t) \leq M_1, E_h(t) \leq M_1, I_h(t) \leq M_1, R_h(t) \leq M_1$ 。
再由系统(4.1)第 5 个方程和比较定理可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} A_m(t) \leq \frac{C}{\eta + \mu_A} := M_2$$

此时, 存在 $t_2 > 0$, 使得当 $t > t_2$ 时, $A_m(t) \leq M_2$ 。

同理定义 $L_2(t) = S_m(t) + E_m(t) + I_m(t)$, 将系统(4.1)后 2 个方程相加可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} L_2(t) \leq \frac{C\eta}{(\eta + \mu_A)\mu_m} := M_3$$

此时, 存在 $t_3 > 0$, 使得当 $t > t_3$ 时, $S_m(t) \leq M_3, I_m(t) \leq M_3$ 。

综上, 令 $T = \max\{t_1, t_2, t_3\}$ 及 $M = \max\{M_1, M_2, M_3\}$, 在 $t > T$ 时, 有

$$(S_h(t), E_h(t), I_h(t), R_h(t), A_m(t), S_m(t), I_m(t)) \leq (M, M, M, M, M, M, M)$$

从而系统(4.1)最终一致有界, 即证。

$$\text{定义 } \Sigma = \left\{ (S_h, E_h, I_h, R_h, A_m, S_m, I_m) \in \mathbb{R}_+^7 \mid S_h + E_h + I_h + R_h \leq \frac{A}{\mu_h}, A_m \leq \frac{C}{\eta + \mu_A}, S_m + I_m \leq \frac{C\eta}{(\eta + \mu_A)\mu_m} \right\}$$

则由定理 1 和 2 知 Σ 关于系统(4.1)是正不变的。

为证明地方病平衡点的存在性, 需要引入基本再生数的概念。

3.2. 基本再生数

基本再生数是疾病动力学系统中一个重要的阈值参数, 它表示向一个完全为易感者的群体中引入一个患病个体之后在其平均患病期内导致易感者受到感染的数量, 该参数反映了这种疾病的传播能力, 对我们进行疾病防治控制有着很大的参考意义。关于系统(4.1)的基本再生数, 我们得到如下结果

$$\text{定理 3 系统(4.1)的基本再生数为 } R_0 = \sqrt{\frac{C\beta_{hm}\beta_{mh}\eta_A\mu_h\gamma B^2}{A(\gamma + \mu_h)(\delta + \mu_h)(\eta_A + \mu_A)\mu_m^2}}$$

证明: 根据文献[9]中的下一代生成矩阵的方法, 基本再生数为 $\rho(FV^{-1})$, 其中 FV^{-1} 为下一代生成矩阵, $\rho(M)$ 表示矩阵 M 的谱半径。因此, 我们可以构造系统的下一代生成矩阵。首先得到系统(4.1)的只包含患病仓室的子系统为:

$$\begin{cases} E_h' = \frac{B\beta_{mh}I_m}{N_h} S_h - \gamma E_h - \mu_h E_h \\ I_h' = \gamma E_h - \mu_h I_h - \delta I_h \\ I_m' = B\beta_{hm} \frac{I_h}{N_h} S_m - \mu_m I_m \end{cases} \quad (2)$$

系统(4.2)可写为: $\dot{x}_i = f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x)$, 其中 $x = (E_h, I_h, I_m)^T$, $\mathcal{F}_i(x)$ 表示染病仓室 i 的新患病感染率, $\mathcal{V}_i(x)$ 表示染病仓室 i 中剩余的其它转移项(如出生率、死亡率、治愈率等), 于是, 有

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} \frac{B\beta_{mh}I_m S_h}{N_h} \\ 0 \\ \frac{B\beta_{hm}I_h S_m}{N_h} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}(x) = \begin{pmatrix} \gamma E_h + \mu_h E_h \\ \delta I_h + \mu_h I_h - \gamma E_h \\ \mu_m I_m \end{pmatrix}$$

易知系统(4.1)总有唯一无病平衡点 $E_1^0 = \left(\frac{A}{\mu_h}, 0, 0, 0, \frac{C}{\eta + \mu_A}, \frac{C\eta}{\mu_m(\eta + \mu_A)}, 0 \right)$ 。因此, 根据文献[9], 我们

可以分别计算出矩阵 F 与 V

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B\beta_{mh} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{CB\beta_{hm}\eta_A\mu_h}{A\mu_m(\eta_A + \mu_A)} & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \gamma + \mu_h & 0 & 0 \\ -\gamma & \delta + \mu_h & 0 \\ 0 & 0 & \mu_m \end{bmatrix}$$

得到

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma + \mu_h} & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{(\gamma + \mu_h)(\delta + \mu_h)} & \frac{1}{\delta + \mu_h} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu_m} \end{bmatrix}$$

因此

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{B\beta_{mh}}{\mu_m} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{CB\beta_{hm}\eta_A\mu_h\gamma}{A\mu_m(\eta_A + \mu_A)(\gamma + \mu_h)(\delta + \mu_h)} & \frac{CB\beta_{hm}\eta_A\mu_h}{A\mu_m(\eta_A + \mu_A)(\delta + \mu_h)} & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵 FV^{-1} 的所有特征值中模长最大的特征值的模就是它的谱半径 $\rho(FV^{-1})$, 也是我们所求的基本再生数 R_0 , 易得

$$R_0 = \sqrt{\frac{C\beta_{hm}\beta_{mh}\eta_A\mu_h\gamma B^2}{A(\gamma + \mu_h)(\delta + \mu_h)(\eta_A + \mu_A)\mu_m^2}}$$

3.3. 平衡点的存在唯一性

令系统(4.1)中所有等式右边等于 0, 可解得系统存在两个平衡点, 一个无病平衡点 E_1^0 和一个地方病平衡点 E_2^* , 它们都是存在且唯一。

定理 4 系统(4.1)在 Σ 中有唯一无病平衡点 $E_1^0 = \left(\frac{A}{\mu_h}, 0, 0, 0, \frac{C}{\eta + \mu_A}, \frac{C\eta}{\mu_m(\eta + \mu_A)}, 0 \right)$ 和 1 个地方病平衡

点 $E_2^* = (S_h^*, E_h^*, I_h^*, R_h^*, A_m^*, S_m^*, I_m^*)$ 。

借助于前面定义的基本再生数, 接下来, 我们给出定理 4 的证明过程如下。

证明: 无病平衡点的存在唯一性是显然的, 下面证明地方病平衡点的存在唯一性。令系统(4.1)的等式右边等于 0, 可得到如下结果:

$$\begin{aligned} S_h^* &= \frac{((\gamma + \mu_h)(\delta + \mu_h)\mu_m + B\mu_h\gamma\beta_{hm})\mu_m A^2(\eta + \mu_A)}{B\gamma\beta_{hm}\mu_h^2(A(\eta + \mu_A)\mu_m + \eta CB\beta_{mh})} \\ E_h^* &= -\frac{A(\mu_m^2(\gamma + \mu_h)(\delta + \mu_h)(\eta + \mu_A)A - B^2C\beta_{hm}\beta_{mh}\eta\gamma\mu_h)}{\beta_{hm}B\gamma(\gamma + \mu_h)\mu_h(A(\eta + \mu_A)\mu_m + \eta CB\beta_{mh})} \\ I_h^* &= -\frac{A(\mu_m^2(\gamma + \mu_h)(\delta + \mu_h)(\eta + \mu_A)A - B^2C\beta_{hm}\beta_{mh}\eta\gamma\mu_h)}{B(\delta + \mu_h)\beta_{hm}(\gamma + \mu_h)\mu_h(A(\eta + \mu_A)\mu_m + \eta CB\beta_{mh})} \\ R_h^* &= -\frac{\delta A(\mu_m^2(\gamma + \mu_h)(\delta + \mu_h)(\eta + \mu_A)A - B^2C\beta_{hm}\beta_{mh}\eta\gamma\mu_h)}{B(\delta + \mu_h)\beta_{hm}(\gamma + \mu_h)\mu_h^2(A(\eta + \mu_A)\mu_m + \eta CB\beta_{mh})} \\ A_m^* &= \frac{C}{\eta + \mu_A} \\ S_m^* &= \frac{(\delta + \mu_h)(\gamma + \mu_h)(A(\eta + \mu_A)\mu_m + \eta CB\beta_{mh})}{B(\mu_h^2\mu_m + ((\delta + \gamma)\mu_m + \beta_{hm}B\gamma)\mu_h + \gamma\delta\mu_m)\beta_{mh}(\eta + \mu_A)} \\ I_m^* &= \frac{-\mu_m^2(\gamma + \mu_h)(\delta + \mu_h)(\eta + \mu_A)A + B^2C\beta_{hm}\beta_{mh}\eta\gamma\mu_h}{B((\gamma + \mu_h)(\delta + \mu_h)\mu_m + B\mu_h\gamma\beta_{hm})\beta_{mh}\mu_m(\eta + \mu_A)} \end{aligned}$$

显然, S_h^*, A_m^*, S_m^* 的值恒为正, 只需证明 $E_h^*, I_h^*, R_h^*, I_m^*$ 的值也为正数即可。结合基本再生数, 上述结果可化简为如下形式:

$$\begin{aligned} E_h^* &= \frac{(\gamma + \mu_h)(\delta + \mu_h)(\eta + \mu_A)A^2\mu_m^2(R_0^2 - 1)}{\beta_{hm}B\gamma(\gamma + \mu_h)\mu_h(A(\eta + \mu_A)\mu_m + \eta CB\beta_{mh})} \\ I_h^* &= \frac{(\gamma + \mu_h)(\delta + \mu_h)(\eta + \mu_A)A^2\mu_m^2(R_0^2 - 1)}{B(\delta + \mu_h)\beta_{hm}(\gamma + \mu_h)\mu_h(A(\eta + \mu_A)\mu_m + \eta CB\beta_{mh})} \\ R_h^* &= \frac{\delta(\gamma + \mu_h)(\delta + \mu_h)(\eta + \mu_A)A^2\mu_m^2(R_0^2 - 1)}{B(\delta + \mu_h)\beta_{hm}(\gamma + \mu_h)\mu_h(A(\eta + \mu_A)\mu_m + \eta CB\beta_{mh})} \\ I_m^* &= \frac{(\gamma + \mu_h)(\delta + \mu_h)(\eta + \mu_A)A^2\mu_m^2(R_0^2 - 1)}{AB((\gamma + \mu_h)(\delta + \mu_h)\mu_m + B\mu_h\gamma\beta_{hm})\beta_{mh}\mu_m(\eta + \mu_A)} \end{aligned}$$

因此, 当且仅当 $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点存在且唯一。

4. 平衡点的全局稳定性

研究平衡点的稳定性有助于我们了解疾病的发展趋势, 从而采取合适的策略对其传播过程进行控制。本章我们将运用极限系统的相关理论来研究系统平衡点的稳定性。

由前面定理 1 和 2 的证明可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时

$$N_h(t) \rightarrow \frac{A}{\mu_h} := N_h^0, A_m \rightarrow \frac{C}{\eta + \mu_A}, N_m \rightarrow \frac{C\eta}{(\eta + \mu_A)\mu_m} := N_m^0$$

考虑系统(4.1)的极限系统如下

$$\begin{cases} S'_h = A - \frac{B\beta_{mh}I_m}{N_h^0}S_h - \mu_h S_h \\ E'_h = \frac{B\beta_{mh}I_m}{N_h^0}S_h - \gamma E_h - \mu_h E_h \\ I'_h = \gamma E_h - \mu_h I_h - \delta I_h \\ R'_h = \delta I_h - \mu_h R_h \\ S'_m = \frac{C\eta}{\eta + \mu_A} - \mu_m S_m - B\beta_{hm} \frac{I_h}{N_h^0} S_m \\ I'_m = B\beta_{hm} \frac{I_h}{N_h^0} S_m - \mu_m I_m \end{cases} \quad (3)$$

类似文献[11]的做法, 假设

$$(A1) \quad S_h + E_h + I_h + R_h = N_h^0 = \frac{A}{\mu_h}, \quad S_m + I_m = N_m^0 = \frac{C\eta}{(\eta + \mu_A)\mu_m}$$

由于 R_h 和其他项独立, 只分析如下系统即可

$$\begin{cases} S'_h = A - \frac{B\beta_{mh}I_m}{N_h^0}S_h - \mu_h S_h \\ E'_h = \frac{B\beta_{mh}I_m}{N_h^0}S_h - \gamma E_h - \mu_h E_h \\ I'_h = \gamma E_h - \mu_h I_h - \delta I_h \\ S'_m = \frac{C\eta}{\eta + \mu_A} - \mu_m S_m - B\beta_{hm} \frac{I_h}{N_h^0} S_m \\ I'_m = B\beta_{hm} \frac{I_h}{N_h^0} S_m - \mu_m I_m \end{cases} \quad (4)$$

于是, 可定义系统(4.4)的可行域为

$$\Omega = \left\{ (S_h(t), E_h(t), I_h(t), S_m(t), I_m(t)) \in \mathbb{R}_+^5 \mid S_h(t) + E_h(t) + I_h(t) \leq \frac{A}{\mu_h}, S_m(t) + I_m(t) \leq \frac{C\eta}{(\eta + \mu_A)\mu_m} \right\}$$

类似定理 1 和 2 的证明, 显然系统(4.4)在 Ω 内是正不变的。系统(4.4)的无病平衡点和地方病平衡点分别为 $E_1^0 = \left(\frac{A}{\mu_h}, 0, 0, \frac{C\eta}{(\eta + \mu_A)\mu_m}, 0 \right)$ 和 $E_2^* = (S_h^*, E_h^*, I_h^*, S_m^*, I_m^*)$, 具体证明过程可参考定理 4。

根据文献[12]可知, 在满足某些条件的前提下, 常微分系统的极限系统的平衡点的动力学行为与该系统平衡点的动力学行为是一致的。借助这些性质, 我们可以对比较复杂的系统做稳定性分析。

4.1. 无病平衡点的全局稳定性

在比较复杂的动力学模型中, 直接通过构造李雅普诺夫函数来证明其无病平衡点的全局稳定性并不是太容易, 我们可以借鉴文献[13][14]中提出的一种等价的方法来证明无病平衡点的全局稳定性。

引理 1 [13][14]: 考虑如下形式的传染病系统

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = F(X_1, X_2) \\ \frac{dX_2}{dt} = G(X_1, X_2), G(X_1, 0) = 0 \end{cases}$$

其中, $X_1 \in \mathbb{R}^m$ 和 $X_2 \in \mathbb{R}^n$ 分别表示无病系统和患病系统(相对于原系统来说), $X_0 = (X_1^E, 0)$ 表示原系统的无病平衡点。若满足如下两个条件:

(C₁): 对 $\frac{dX_1}{dt} = F(X_1, 0)$, X_1^E 全局渐近稳定;

(C₂): $G(X_1, X_2) = MX_2 - \hat{G}(X_1, X_2), \hat{G}(X_1, X_2) \geq 0, (X_1, X_2) \in \Omega$, 雅可比矩阵 $M = \frac{\partial G}{\partial X_2}(X_1^E, 0)$ 的所

有非对角线元素都非负, Ω 为原系统的可行域。

则当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 $X_0 = (X_1^E, 0)$ 全局渐近稳定。

定理 5 当 $R_0 < 1$ 时, 系统(4.4)的无病平衡点在 Ω 内全局渐近稳定。

证明: 我们只需要验证系统(4.4)是否满足引理 1 的条件即可。此处有

$$X_0 = (X_1^E, 0) = E_1^0 = \left(\frac{A}{\mu_h}, 0, 0, \frac{C\eta}{(\eta + \mu_A)\mu_m}, 0 \right)$$

条件 C₁ 显然成立, 下面证明条件 C₂ 也成立。简单计算, 有

$$M = \begin{bmatrix} -\gamma - \mu_h & 0 & B\beta_{mh} \frac{S_h^0}{N_h^0} \\ \gamma & -\delta - \mu_h & 0 \\ 0 & B\beta_{hm} \frac{S_m^0}{N_h^0} & -\mu_m \end{bmatrix}$$

进一步计算, 得到

$$\hat{G}(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} \hat{G}_1(X_1, X_2) \\ \hat{G}_2(X_1, X_2) \\ \hat{G}_3(X_1, X_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\beta_{mh} I_m \frac{S_h^0}{N_h^0} \left(1 - \frac{S_h}{S_h^0} \right) \\ 0 \\ B\beta_{hm} I_h \frac{S_m^0}{N_h^0} \left(1 - \frac{S_m}{S_m^0} \right) \end{pmatrix}$$

由于 $S_h \leq S_h^0, S_m \leq S_m^0$, 显然 $\hat{G}(X_1, X_2) \geq 0$, 于是系统(4.4)的无病平衡点在 Ω 内全局渐近稳定。

4.2. 地方病平衡点的全局稳定性

本节我们将运用单调系统的一些基本结论来证明平衡点的全局稳定性。

引理 2 [15]: 令 $X = \mathbb{R}^n (Int \mathbb{R}^n, [p, q])$, 若以下条件满足

- 1) 当 $t > 0$ 时, 系统(2.7)的解 $x(t)$ 在 X 中存在紧的闭包;
- 2) 系统(2.7)最多只有 1 个平衡点。

则系统(2.7)的平衡点是全局渐近稳定的。

4.2.1. 合作系统

命题 1 系统(4.4)在条件(A1)下为合作系统。

证明: 由条件(A1)知, $I_m = N_m^0 - S_m$, $I_h = N_h^0 - S_h - E_h - R_h$, 分别代入系统(4.4)中的第一、第四个方程, 再对其求雅可比矩阵, 得到如下结果:

$$J = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \frac{B\beta_{mh}S_h}{N_h^0} & 0 \\ \frac{B\beta_{mh}I_m}{N_h^0} & * & 0 & 0 & \frac{B\beta_{mh}S_h}{N_h^0} \\ 0 & \gamma & * & 0 & 0 \\ \frac{B\beta_{mh}S_m}{N_h^0} & \frac{B\beta_{mh}S_m}{N_h^0} & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B\beta_{mh}S_m}{N_h^0} & \frac{B\beta_{mh}I_h}{N_h^0} & * \end{bmatrix}$$

根据文献[16], 显然 J 满足合作系统的定义, 故系统(4.4)为合作系统。

4.2.2. 系统(4.4)的一致持久性

证明地方病平衡点的稳定性, 可首先证明系统的持久性, 再利用合作系统的相关结论, 予以实现。

定理 6 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(4.4)在 Ω 内一致持久, 即存在 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 > 0$ 使得系统(4.3)的任意解 $(S_h, E_h, I_h, S_m, I_m)$ 满足

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S_h(t) \geq c_1, \liminf_{t \rightarrow \infty} E_h(t) \geq c_2, \liminf_{t \rightarrow \infty} I_h(t) \geq c_3, \liminf_{t \rightarrow \infty} S_m(t) \geq c_4, \liminf_{t \rightarrow \infty} I_m(t) \geq c_5$$

证明: 根据文献[17] [18] [19]相关知识, 定义 $X = \Omega, X_1 = \text{int } \Omega, X_2 = \partial \Omega$, 由定理 2 可知, 系统(4.1)的解最终一致有界, 则系统(4.4)的一致持久性证明等价于证明 $E_1^0 = \left(\frac{A}{\mu_h}, 0, 0, \frac{C\eta}{(\eta + \mu_A)\mu_m}, 0 \right)$ 在集合 X_1 内弱排斥。首先假设存在满足初始条件 $(S_h(0), E_h(0), I_h(0), S_m(0), I_m(0))$ 的正解 $(S_h(t), E_h(t), I_h(t), S_m(t), I_m(t))$, 使得当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有

$$(S_h(t), E_h(t), I_h(t), S_m(t), I_m(t)) \rightarrow E_1^0$$

即 t 充分大时, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 满足

$$S_h(t) > \frac{A}{\mu_h} - \varepsilon, E_h(t) < \varepsilon, I_h(t) < \varepsilon, S_m > \frac{C\eta}{(\eta + \mu_A)\mu_m} - \varepsilon, I_m < \varepsilon$$

将其代入系统(4.4)得到

$$\begin{cases} E_h' > \frac{B\beta_{mh}}{A/\mu_h} \left(\frac{A}{\mu_h} - \varepsilon \right) I_m - \gamma E_h - \mu_h E_h \\ I_h' = \gamma E_h - \mu_h I_h - \delta I_h \\ I_m' > \frac{B\beta_{hm}}{A/\mu_h} \left(\frac{C\eta}{(\eta + \mu_A)\mu_m} - \varepsilon \right) I_h - \mu_m I_m \end{cases}$$

进一步地, 考虑如下辅助系统

$$\begin{cases} \bar{E}'_h = \frac{B\beta_{mh}}{A/\mu_h} \left(\frac{A}{\mu_h} - \varepsilon \right) \bar{I}_m - \gamma \bar{E}_h - \mu_h \bar{E}_h \\ \bar{I}'_h = \gamma \bar{E}_h - \mu_h \bar{I}_h - \delta \bar{I}_h \\ \bar{I}'_m = \frac{B\beta_{hm}}{A/\mu_h} \left(\frac{C\eta}{(\eta + \mu_A)\mu_m} - \varepsilon \right) \bar{I}_h - \mu_m \bar{I}_m \end{cases} \quad (5)$$

将系统(4.5)改写为如下形式

$$U' = WU$$

其中 $U = (\bar{E}_h, \bar{I}_h, \bar{I}_m)^T$, 得到

$$W = \begin{bmatrix} -\gamma - \mu_h & 0 & \frac{B\beta_{mh}}{A/\mu_h} \left(\frac{A}{\mu_h} - \varepsilon \right) \\ \gamma & -\mu_h - \delta & 0 \\ 0 & \frac{B\beta_{hm}}{A/\mu_h} \left(\frac{C\eta}{(\eta + \mu_A)\mu_m} - \varepsilon \right) & -\mu_m \end{bmatrix}$$

定义

$$R_0^\varepsilon = \sqrt{\frac{\mu_h (\eta C - \varepsilon \mu_m (\eta + \mu_A)) \beta_{hm} \beta_{mh} B^2 \gamma (A - \varepsilon \mu_h)}{(\delta + \mu_h)(\gamma + \mu_h)(\eta + \mu_A) \mu_m^2 A^2}}$$

设矩阵 W 所对应的特征值方程的特征值为 $\omega_i (i=1,2,3)$, 根据特征值和特征方程系数之间的关系, 显然有

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = -a < 0, \quad \omega_1 \omega_2 \omega_3 = -b$$

其中

$$a = (\gamma + \mu_h) + (\mu_h + \delta) + \mu_m, \quad b = (\gamma + \mu_h)(\delta + \mu_h)\mu_m \left(1 - (R_0^\varepsilon)^2 \right)$$

由于 ε 是充分小的正数, 则当 ε 取得足够小的时候, 满足 $R_0 > 1$ 时, 必有 $R_0^\varepsilon > 1$. 所以当 $R_0 > 1$ 时, 有 $\omega_1 \omega_2 \omega_3 = -b > 0$, 同时, 特征值 $\omega_i (i=1,2,3)$ 中必有一个为正数, 另外两个具有负实部. 现假设 ω_1 是正的特征值, $\omega_i (i=2,3)$ 是具有负实部的特征值, 记 ω_1 对应的特征向量为 $v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T$, 其中

$$v_{11} = \frac{B\beta_{mh}(A/\mu_h - \varepsilon)(\omega_1 + \mu_h + \delta)\mu_h}{A\gamma}, \quad v_{12} = \frac{B\beta_{mh}(A/\mu_h - \varepsilon)}{A/\mu_h}, \quad v_{13} = \frac{(\omega_1 + \mu_h + \gamma)(\omega_1 + \mu_h + \delta)}{\gamma}$$

显然 $v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T$ 为正的向量. 另取充分小的数 l , 使得

$$lv_{11} < E_h(0), \quad lv_{12} < I_h(0), \quad lv_{13} < I_m(0)$$

令 $\bar{E}_h(0) = lv_{11}, \bar{I}_h(0) = lv_{12}, \bar{I}_m(0) = lv_{13}$ 是满足系统(4.5)的初始条件. 易证 $U(t) = l \exp(\omega_1 t) v_1$ 是系统(4.5)满足初始条件 $(\bar{E}_h(0), \bar{I}_h(0), \bar{I}_m(0))^T$ 的一个解. 由于系统(4.5)任意解处的 Jacobian 矩阵为 W , 其所有非对角线元素均为非负数, 故系统(4.5)为拟单调增系统. 根据文献[20]中推论 1.1, 得到当 $t > 0$ 时, 有 $Y(t) > U(t)$, 其中 $Y(t) = (E_h, I_h, I_m)^T$. 再由前面 $\omega_1 > 0, l > 0$ 及 v_1 是正特征向量, 因此当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $U(t) \rightarrow \infty$, 进一步, 得到 $Y(t) \rightarrow \infty$, 由于 $(S_h(t), E_h(t), I_h(t), S_m(t), I_m(t)) \rightarrow E_1^0$, 显然矛盾, 故系统(4.3)是一致持久的, 定理得证.

定理 7 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(4.4)的地方病平衡点在 Ω 内全局渐近稳定.

证明: 根据定理 6 的证明, 系统(4.4)是一致持久的, 从而在其可行域内具有紧的闭包, 又由定理 4 可推出系统(4.4)具有唯一地方病平衡点, 结合命题 1 得到系统(4.4)为其可行域上的合作系统。综上, 系统(4.4)满足引理 2 的所有条件, 其地方病平衡点的全局稳定性得证。

5. 数值模拟

之前的章节中, 本文利用边界流方法, 得到了系统(4.4)的一致持久性, 进一步结合极限系统理论和单调动力系统理论研究了系统(4.4)的全局动力学行为, 得到了系统(4.4)的无病平衡点和地方病平衡点是全局渐近稳定的。为了验证结论的合理性, 本节我们将对前面的理论证明给出合适的数值模拟, 以便于更加清晰的理解登革热的动力学行为。分别取系统(4.4)的参数如下表 2。

Table 2. Parameter values

表 2. 参数取值

参数	A	B	β_{mh}	μ_h	γ	δ	C	η	μ_A	μ_m	β_{mm}
$R_0 < 1$	12000	12	0.005	0.00031	0.00145	0.00042	10	0.00032	0.0037	0.00037	0.005
$R_0 > 1$	12000	12	0.0078	0.00031	0.00145	0.000042	10	0.00032	0.0037	0.00037	0.0078

和五组不同的初值如下表 3。

Table 3. Five different sets of initial values

表 3. 五组不同初值

初值	$S_h(0)$	$E_h(0)$	$I_h(0)$	$S_m(0)$	$I_m(0)$
Initial Value ₁	35900000	10000	1500	1800	300
Initial Value ₂	31500000	21000	3200	1750	280
Initial Value ₃	27000000	32000	5300	1470	250
Initial Value ₄	37070000	40000	7500	1700	200
Initial Value ₅	38000000	59000	9800	1950	100

根据以上参数和初值, 可以得到系统(4.4)中 $R_0 < 1$ 时解曲线如下图 2 所示。

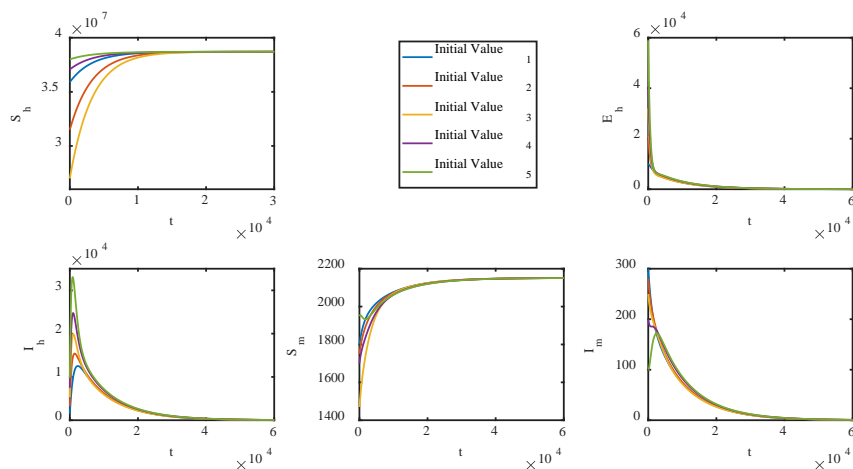


Figure 2. When $R_0 < 1$ solution curve

图 2. $R_0 < 1$ 时解曲线

显然当 t 充分大时, 系统(4.4)的解曲线随着时间的变化最终趋于无病平衡点 E_1^0 , 这和前面定理 5 的结论一致。

$R_0 > 1$ 时系统(4.4)的解曲线如下图 3 所示。

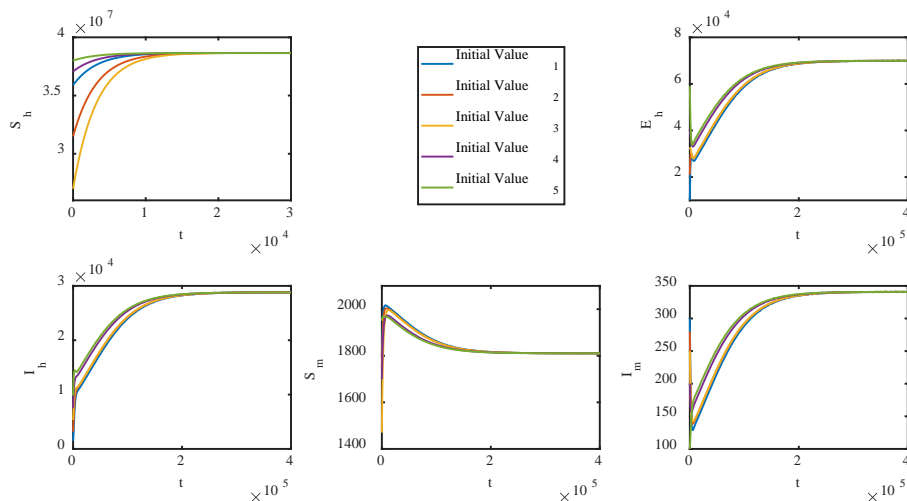


Figure 3. When $R_0 > 1$ solution curve
图 3. $R_0 > 1$ 时解曲线

当 t 充分大时, 系统(4.4)的解曲线随着时间的变化最终趋于地方病平衡点 E_2^* , 这和定理 7 的结论一致。

6. 结束语

本文建立了人类感染登革病毒之后具有潜伏期的传染病模型, 基于下一代矩阵理论构造了系统的基本再生数 R_0 , 并证明了当 $R_0 < 1$ 时, 系统的无病平衡点全局渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, 系统的地方病平衡点全局渐近稳定。最后用一组数值算例对理论结果进一步进行验证。

参考文献

- [1] Srivastav, A.K. and Ghosh, M. (2019) Assessing the Impact of Treatment on the Dynamics of Dengue Fever: A Case Study of India. *Applied Mathematics and Computation*, **362**, Article ID: 124533. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.06.047>
- [2] Rodrigues, H.S., Monteiro, M.T.T., Torres, D.F.M. and Zinober, A. (2012) Dengue Disease, Basic Reproduction Number and Control. *International Journal of Computer Mathematics*, **89**, 334-346. <https://doi.org/10.1080/00207160.2011.554540>
- [3] Abidemi, A., Aziz, M.I.A. and Ahmad, R. (2020) Vaccination and Vector Control Effect on Dengue Virus Transmission Dynamics: Modelling and Simulation. *Chaos, Solitons and Fractals*, **133**, Article ID: 109648. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109648>
- [4] Polwiang, S. (2018) The Effectiveness of Dengue Vaccine and Vector Control: Model Study. *Applied Science and Engineering Progress*, **11**, 225-232. <https://doi.org/10.14416/j.ijast.2018.05.003>
- [5] Sofia, R.H., Monteiro, M.T.T. and Torres, D.F.M. (2014) Vaccination Models and Optimal Control Strategies to Dengue. *Mathematical Biosciences*, **247**, 1-12. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2013.10.006>
- [6] Anne, F., Kurt, C. and Josef, P.H. (2019) Optimal Vaccination and Control Strategies against Dengue. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **42**, 3496-3507. <https://doi.org/10.1002/mma.5594>
- [7] Ningsih, S. and Ribal, A. (2019) An Optimal Integrated Vector Control for Prevention the Transmission of Dengue. *Journal of Physics: Conference Series*, **1245**, Article ID: 012043. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1245/1/012043>

-
- [8] Bustamam, A., Aldil, A.D. and Yuwanda, A. (2018) Understanding Dengue Control for Short- and Long-Term Intervention with a Mathematical Model Approach. *Journal of Applied Mathematics*, **2018**, Article ID: 9674138. <https://doi.org/10.1155/2018/9674138>
- [9] Martcheva, M. (2015) *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. Springer, Boston. <https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7612-3>
- [10] Abate, A., Tiwari, A. and Sastry, S. (2009) Box Invariance in Biologically-Inspired Dynamical Systems. *Automatica*, **45**, 1601-1607. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2009.02.028>
- [11] Castillo-Chavez, C. and Thieme, H. (1994) *Asymptotically Autonomous Epidemic Models*. Mathematical Sciences Institute, Cornell University, Ithaca.
- [12] Yang, W. and Lou, J. (2009) The Dynamics of an Interactional Model of Rabies Transmitted between Human and Dogs. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, **2**, 591-605.
- [13] Zahedi, M.S. and Kargar, N.S. (2017) The Volterra-Lyapunov Matrix Theory for Global Stability Analysis of a Model of the HIV/AIDS. *International Journal of Biomathematics*, **10**, Article ID: 1750002. <https://doi.org/10.1142/S1793524517500024>
- [14] Liao, S. and Wang, J. (2012) Global Stability Analysis of Epidemiological Models Based on Volterra-Lyapunov Stable Matrices. *Chaos, Solitons & Fractals*, **45**, 966-977. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2012.03.009>
- [15] Jiang, J.F. (1994) On the Global Stability of Cooperative Systems. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **26**, 455-458. <https://doi.org/10.1112/blms/26.5.455>
- [16] 吕贵臣, 陆征一. 高维系统稳定性的几何判据[M]. 北京: 科学出版社, 2019.
- [17] 李艳, 王稳地, 周爱蓉, 何楠. 具有隐性感染的登革热模型稳定性分析[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2018, 43(5): 1-5.
- [18] Yang, C.X. and Nie, L. (2017) The Effect of Vector Control Strategy against Dengue Transmission between Mosquitoes and Humans. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **2017**, 1-27. <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2017.1.17>
- [19] Thieme, H.R. (1993) Persistence under Relaxed Point-Dissipativity (with Application to an Endemic Model). *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **24**, 407-435. <https://doi.org/10.1137/0524026>
- [20] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程稳定性与稳定性方法[M]. 第2版, 北京: 科学出版社, 2015.