

一类(4,3)型Liénard系统的阿贝尔积分零点个数

李成群¹, 郭 慧², 韦敏志^{1*}

¹广西财经学院, 广西 南宁

²广西大学, 广西 南宁

Email: *454742516@qq.com

收稿日期: 2021年6月19日; 录用日期: 2021年7月11日; 发布日期: 2021年7月23日

摘 要

Liénard系统在动力系统理论与应用方面是一个非常重要的非线性震荡器模型, 大量的国内外学者对其进行了广泛而深刻的研究。当扰动项为零时, 系统变为哈密顿系统。关于该系统的阿贝尔积分零点个数研究一直是近年来研究的热点, 大量的研究人员都为此展开了激烈的讨论。本文着重考虑含有扰动项的Liénard系统的阿贝尔积分, 根据阿贝尔积分生成元的切比雪夫理论, 结合多项式符号计算技术证明阿贝尔积分零点个数的上界。

关键词

Liénard系统, 阿贝尔积分, 零点个数, 切比雪夫理论, Sturm定理

The Number of Zeros for Abelian Integral of a Liénard System with (4,3) Type

Chengqun Li¹, Hui Guo², Minzhi Wei^{1*}

¹Guangxi University of Finance and Economics, Nanning Guangxi

²Guangxi University, Nanning Guangxi

Email: *454742516@qq.com

Received: Jun. 19th, 2021; accepted: Jul. 11th, 2021; published: Jul. 23rd, 2021

*通讯作者。

Abstract

The Liénard system is a very important nonlinear oscillator model in dynamic system theory and applications. A large number of domestic and foreign scholars have conducted extensive and in-depth research on it. When the perturbation is zero, the system becomes a Hamiltonian system. The study on the Abel integral zero number of this system has been a hot topic in recent years, there are lot of researchers have launched fierce discussions. This paper focuses on the Abel integral of the Liénard system with a perturbation term. According to the Chebyshev theory of the Abel integral generator and the progressive development formula of the Abel integral, combining with the polynomial symbol calculation technique to prove the upper bound of the number of zero points of the Abel integral.

Keywords

Liénard System, Abelian Integral, The Number of Zeros, Chebyshev Theory, Sturm Theory

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 背景介绍

当扰动项为零时, Liénard 系统变为哈密顿函数系统, 进而研究其极限环分布。在系统过程结构中, 系统正向或者逆向演化趋向的状态周期轨道称作极限环。如果有至少一段其他的轨道与其旋转相交, 那么当且仅当时间趋于正无穷或负无穷时成立。在数学中, 尤其是在动态系统理论里面, 一个二维流形或者二维平面上的极限环表现为相空间里的一个闭合的轨道。

1900 年, 在世界数学家大会上, 德国数学家希尔伯特提出了 23 个著名的数学问题, 其中, 第十六个问题的第二部分是: 平面实 n 次多项式自治系统的极限环最大个数及分布如何?一百多年来, 出现了大量研究这方面的工作。但是, 这个问题是非常难的, 即使对于 $n = 2$ 的情形都还没有被完全解决, 仍然是一个公开问题。这个问题研究进展和部分有效的研究方法可以参见综述性文章。1977 年首次提出研究弱化形式的希尔伯特第十六问题的 V. I. Arnold, 研究了二维扰动系统的阿贝尔积分零点个数。在应用了数值探测和判定函数的方法后, 在多项式的扰动情况下, 可讨论相关的非对称六次哈密顿函数系统, 研究其极限环分布及数量情况[1]。最后结果显示, 该多项式扰动一共含有三个任意的参数, 表明此哈密顿函数系统在无穷区域中最多会出现三个极限环, 然后应用数值探测找出三个极限环的确切位置, 这样对进一步研究希尔伯特的第十六个问题有很重要的意义。而 Liénard 系统的阿贝尔积分零点个数问题的研究也一直是近年来的焦点, 相关研究见[2]-[8]。本文即采用阿贝尔积分生成元的切比雪夫理论, 并且结合阿贝尔积分的渐近展开公式, 运用多项式符号计算技术证明阿贝尔积分零点个数的上界。切比雪夫定理的正式提出, 是 19 世纪俄国数学家切比雪夫在研究统计规律时, 论证了并采用标准差表达了一个定理, 这个公式具有十分深远的意义, 被称作为切比雪夫定理。存在一种基于切比雪夫多项式的数值积分方法, 该数值积分方法是一种重要的数值计算工具, 这样的数值积分在边界元、有限元等数值计算方法中是必不可少的工具, 再用微分法推导运行矩阵, 将问题转化为线性方程组去解决, 从而证明阿贝尔积分零点个数的上界。

2. 阿贝尔积分生成元的切比雪夫理论

设“ $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ ”是定义在开区间 J 上的解析函数,

i) 如果任意的线性组合

$$k_0 f_0(x) + k_1 f_1(x) + \dots + k_{n-1} f_{n-1}(x)$$

在 J 上至多有 $n-1$ 个孤立零点, 那么 $\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)\}$ 称为切比雪夫系统。

ii) 如果对每个 $i=1, 2, \dots, n$, 任意线性组 $k_0 f_0(x) + k_1 f_1(x) + \dots + k_{n-1} f_{n-1}(x)$ 至多有 $i-1$ 个零点, 考虑零点重数, 那么有序函数列 $\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)\}$ 称为完全切比雪夫系统。

iii) 对于任意的 $k=1, 2, \dots, n$, 系统 $\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)\}$ 是在区间 J 上的一个完整的切比雪夫系统当且仅当对任意的 $x \in J$ 时, 朗斯基行列式 $W[f_0, f_1, f_2, \dots, f_{k-1}](x) \neq 0$ 成立。这里的

$$W[f_0, f_1, f_2, \dots, f_{k-1}](x) = \det(f_i^j)_{0 \leq i, j \leq k-1} = \begin{bmatrix} f_0(x) & \dots & f_{k-1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(k-1)}(x) & \dots & f_{k-1}^{(k-1)}(x) \end{bmatrix},$$

其中, $f'(x)$ 和 $f^{(i)}(x)$ 分别表示 $f(x)$ 的一阶导数和 i 阶倒数。

关于系统(1.1)的 Abel 积分零点个数上界, 根据不同特点的系统, 学者们提出了直接法[2]、几何方法[3]、辐角原理[4]等很多有效的方法。本文使用阿贝尔积分生成元的切比雪夫系统判定理论来研究阿贝尔积分零点个数上界, 相关的定义详见参考文献[1]。

3. 一类 Liénard 系统的阿贝尔积分零点个数上限

多项式 Liénard 系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) + \varepsilon f(x)y, \quad (1)$$

其中 $\deg(g(x)) = m$ 和 $\deg(f(x)) = n$, 上述系统成为系统 (m, n) 的 Liénard 系统。

本论文研究类型为(4,3)的 Liénard 系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x(x+3)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) + \varepsilon(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^3)y, \quad (2)$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$, a_0, a_1 和 a_2 是有界实参数, 对应的 Hamiltonian 函数是

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{11}{8}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{4}x^2 = \frac{1}{2}y^2 + A(x), \quad (3)$$

Hamiltonian 函数(1.3)的水平集 $H(x, y)$ (即 $H(x, y) = h$) 在图 $H(x, y)$ 进行了概述。 $H(x, y) = h$ 定义系统(2) $|\varepsilon = 0$ 的闭合轨道族, 用 $\{L_h\}$ 表示。 L_0 是 $h_s = 0$ 的对应轨道, L_1 是 $h_1 = H(1, 0)$ 的对应轨道, L_2 是 $h_2 \in (h_s, h_1)$ 的对应轨道。它陈述了一个基本中心 $(0, 0)$, L_0 定义了一个同宿轨道, 该轨道包含一个通过双曲线鞍点 $(0.5, 0)$, 其中间有一族围绕中心点 $(0, 0)$ 的周期轨道, 见图 1。由于 L_1 与 L_2 平行讨论, L_h 上的 Melnikov 函数为

$$I(h, \delta) = \oint_{L_h} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^3) dx \equiv a_0 I_0(h) + a_1 I_1(h) + a_2 I_2(h) + I_3(h), \quad (4)$$

对于 $h \in (h_1, 0)$, 其中 $\delta = (a_0, a_1, a_2, 1)$ 和 $I_i(h) = \oint_{L_h} x^i y dx, i = 0, 1, 2, 3$ 。我们旨在提供整个平面内受扰动系统极限环环数的完整描述。

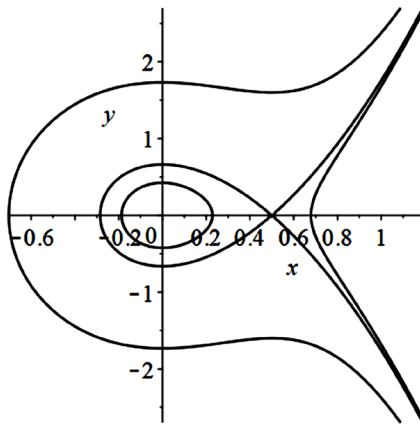


Figure 1. The portrait of system (8) when $\varepsilon = 0$

图 1. 系统(8)中当 $\varepsilon = 0$ 时的相图

引理 2.1 设 $F(x)$ 是关于 x 的一元函数, 并且满足 $\frac{F(x)}{A'(x)}$ 在 $x=0$ 处解析, 对于任意 $k \in N$, 沿着 $\frac{1}{2}y^2 + A(x) = h$ 的每条轨线 L_h , 如下等式成立

$$\oint_{L_h} F(x) y^{k-2} dx = \oint_{L_h} G(x) y^k dx, \quad (5)$$

其中 $G(x) = \frac{1}{k} \left(\frac{F(x)}{A'(x)} \right)' (x)$ 。

阿贝尔积分零点个数的切比雪夫性质的代数判定方法最初的思想来源于文献[5], 后来在文献[8]中得到推广和发展。 $I(h, \delta)$ 的零点最小上限计算如下:

在每条轨道 L_h 上有 $\frac{2A(x) + y^2}{2h} = 1$ 成立, 即

$$I_i(h) = \frac{1}{2h} \oint_{L_h} (2A(x) + y^2) x^i y dx = \frac{1}{2h} \left(\oint_{L_h} 2x^i A(x) y dx + \oint_{L_h} x^i y^3 dx \right), \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (6)$$

令 $k=3$ 和 $F(x) = 2x^i A(x)$, 根据引理 2.1, 可得

$$\oint_{L_h} 2x^i A(x) y dx = \oint_{L_h} G_i(x) y^3 dx, \quad (7)$$

其中,

$$\begin{aligned} G_i(x) &= \frac{1}{3} \left(\frac{2x^i A(x)}{A'(x)} \right)' (x) \\ &= \frac{1}{30} \frac{(16ix^5 + 150ix^4 + 16x^5 + 411ix^3 + 128x^4 + 55ix^2 + 349x^3 - 690ix + 345x^2 + 270i - 570x + 270)x^i}{(x+3)^3(2x-1)^2}, \end{aligned}$$

根据(6)式和(7)式, 以及在每条轨道 L_h 上有 $(2A(x) + y^2)/2h = 1$ 成立, 可得

$$\begin{aligned} I_i(h) &= \frac{1}{2h} \oint_{L_h} (x^i + G_i(x)) y^3 dx = \frac{1}{4h^2} \oint_{L_h} (2A(x) + y^2) (x^i + G_i(x)) y^3 dx \\ &= \frac{1}{4h^2} \oint_{L_h} 2A(x) (x^i + G_i(x)) y^3 dx + \frac{1}{4h^2} \oint_{L_h} (x^i + G_i(x)) y^5 dx, \end{aligned} \quad (8)$$

取 $k=5$ 和 $F(x)=2x^i A(x)(x^i+G_i(x))$, 然后由引理 2.1, 可得

$$\oint_{L_h} 2A(x)(x^i+G_i(x))y^3 dx = \oint_{L_h} H_i(x)y^5 dx, \tag{9}$$

其中, $H_i(x) = \frac{1}{5} \left(\frac{2A(x)(x^i+G_i(x))}{A(x)} \right)' (x) = \frac{x^i h_i(x)}{1500(x+3)^6(2x-1)^4}$,

$$\begin{aligned} h_i(x) = & 256i^2x^{10} + 4800i^2x^9 + 2432ix^{10} + 35652i^2x^8 + 41904ix^9 + 2176x^{10} + 125060i^2x^7 + 286788ix^8 \\ & + 34816x^9 + 163341i^2x^6 + 942994ix^7 + 225528x^8 - 153150i^2x^5 + 1254576ix^6 + 736828x^7 \\ & - 483155i^2x^4 - 609540ix^5 + 1127383x^6 + 146040i^2x^3 - 2774260ix^4 + 117090x^5 + 505800i^2x^2 \\ & + 265620ix^3 - 1715565x^4 - 372600i^2x + 2792250ix^2 - 720660x^3 + 72900i^2 - 1863000ix \\ & + 2415150x^2 + 364500i - 1360800x + 291600. \end{aligned}$$

根据(8)式和(9)式, 以及在每条轨道 L_h 上有 $\frac{2A(x)+y_2}{2h}=1$ 成立, 于是可得到

$$\begin{aligned} I_i(h) &= \frac{1}{4h^2} \oint_{L_h} (x^i+G_i(x)+H_i(x))y^5 dx = \frac{1}{8h^3} \oint_{L_h} (2A(x)+y^2)(x^i+G_i(x)+H_i(x))y^5 dx \\ &= \frac{1}{8h^3} \oint_{L_h} 2A(x)(x^i+G_i(x)+H_i(x))y^5 dx + \frac{1}{8h^3} \oint_{L_h} (x^i+G_i(x)+H_i(x))y^7 dx \end{aligned}$$

令 $k=7$ 和 $F(x)=2A(x)(x^i+G_i(x)+H_i(x))$, 然后由引理 2.1, 可知

$$\oint_{L_h} 2A(x)(x^i+G_i(x)+H_i(x))y^5 dx = \oint_{L_h} J_i(x)y^7 dx,$$

其中, $J_i(x) = \frac{1}{7} \left(\frac{2A(x)(x^i+G_i(x)+H_i(x))}{A(x)} \right)' (x) = \frac{x^i \rho_i(x)}{105000(x+3)^9(2x-1)^6}$,

$$\begin{aligned} \rho_i(x) = & (4096i^3x^{15} + 15200i^3x^{15} + 94208i^2x^{15} + 1395648i^3x^{13} + 2503168i^2x^{14} + 560128ix^{15} \\ & + 9335640i^3x^{12} + 28649792i^2x^{13} + 14089344ix^{14} + 470016x^{15} + 36112788i^3x^{11} \\ & + 181465336i^2x^{12} + 152768320ix^{13} + 11280384x^{14} + 72168390i^3x^{10} + 669531740i^2x^{11} \\ & + 919613680ix^{12} + 117359040x^{13} + 20004591i^3x^9 + 1308526078i^2x^{10} + 3251024160ix^{11} \\ & + 685126464x^{12} - 200762865i^3x^8 + 539364641i^2x^9 + 6239891006ix^{10} + 2396865384x^{11} \\ & - 255940245i^3x^7 - 2807598755i^2x^8 + 3302667053ix^9 + 4782729240x^{10} + 253132885i^3x^6 \\ & - 3940734715i^2x^7 - 10133912955ix^8 + 3661451745x^9 + 453218850i^3x^5 + 2713195035i^2x^6 \\ & - 15842479175ix^7 - 4771724985x^8 - 345604050i^3x^4 + 6055453350i^2x^5 + 7112061455ix^6 \\ & - 10993992825x^7 - 300102300i^3x^3 - 3537724950i^2x^4 + 21557692050i^1x^5 + 430104825x^6 \\ & + 397669500i^3x^2 - 4016247300i^2x^3 - 8867903850ix^4 + 13819922550x^5 - 150903000i^3x \\ & + 4611046500i^2x^2 - 15141276000ix^3 - 258636150x^4 + 19683000i^3 - 1677429000i^2x \\ & + 14933808000ix^2 - 13565264400x^3 + 216513000i^2 - 5183190000ix + 10574874000x^2 \\ & + 669222000i - 3446712000x + 472392000). \end{aligned}$$

根据以上的计算, 可以得到以下结论:

$$8h^3 I_i(h) = \oint_{L_h} f_i(x)y^7 dx = \tilde{I}_i(h),$$

其中 $f_i(x) = x^i+G_i(x)+H_i(x)+J_i(x)$, 显然如果 $\{I_0, I_1, I_2, I_3\}$ 是精度为 k 的切比雪夫系统, 当且

$\{\tilde{I}_0, \tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3\}$ 也是精度为 k 的切比雪夫系统。

下面证明 $\{\tilde{I}_0, \tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3\}$ 也是精度为 k 的切比雪夫系统, 讨论以下:

$$L_i(x) = \left(\frac{f_i}{A'(x)} \right)(x) - \left(\frac{f_i}{A'(x)} \right)(z(x)),$$

这里的 $z(x)$ 是满足 $A(x) = A(z(x))$ 得到:

$$A(x) - A(z) = -\frac{1}{40}(x-z)q(x, z),$$

其中

$$q(x, z) = 8x^4 + 8x^3z + 8x^2z^2 + 8xz^3 + 8z^4 + 55x^3 + 55x^2z + 55xz^2 + 55z^3 + 80x^2 + 80xz + 80z^2 - 90x - 90z,$$

它在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上定义了 $z(x)$, 因此,

$$\frac{d}{dx} L_i(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{f_i}{A'(x)} \right)(x) - \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{f_i}{A'(x)} \right)(z(x)) \right] \times \frac{dz}{dx}, \quad (10)$$

并且 $\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial q(x, z)}{\partial x} / \frac{\partial q(x, z)}{\partial z}$, 取 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 那么 $x_r < z < 0 < x < \frac{1}{2}$ 。

借助符号计算系统 Maple.18, 存在以下引理:

引理 2.2 如下结论成立

- 1) $W[L_1(x)] \neq 0, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$;
- 2) $W[L_1(x), L_2(x)] \neq 0, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$;
- 3) $W[L_1(x), L_2(x), L_0(x)] \neq 0, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$;
- 4) $W[L_1(x), L_2(x), L_0(x), L_3(x)] \neq 0, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 。

上面四个朗斯基行列式皆为关于 (x, z) 的二元函数, 并且 (x, z) 满足 $q(x, z) = 0$, 此时 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $x_r < z(x) < 0$ 。 $x_r \approx -0.28479822167$. 因此, 想要知道上述朗斯基行列式在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上是否存在零点, 我们只用去研究以上的朗斯基行列式和 $q(x, z)$ 是否满足不等式

$$x_r < z < 0 < x < \frac{1}{2}, \quad (11)$$

的公共根 (x, z) 。

证明: 考虑(10), 结合 Maple18 的帮助, 可知

$$W[L_1(x)] = \frac{(x-z)w_1(x, z)}{375(x+3)^8(2x-1)^5(z+3)^8(2z-1)^5},$$

$$W[L_1(x), L_2(x)] = \frac{7(x-z)^3w_2(x, z)}{93750(x+3)^{16}(2x-1)^9(2z-1)^9(z+3)^{16}p(x, z)},$$

$$W[L_1(x), L_2(x), L_0(x)] = \frac{-7w_3(x, z)(x-z)^6}{11718750x^3z^3(z+3)^{23}(2x-1)^{12}(x+3)^{23}(2z-1)^{12}p^3(x, z)},$$

$$W[L_1(x), L_2(x), L_0(x), L_3(x)] = \frac{7w_3(x, z)(x-z)^{10}}{244140625x^4z^4(2x-1)^{15}(x+3)^{30}(2z-1)^{15}(z+3)^{30}p^6(x, z)},$$

其中:

$$p(x, z) = 8x^3 + 16x^2z + 24xz^2 + 32z^3 + 55x^2 + 110xz + 165z^2 + 80x + 160z - 90,$$

并且 $w_1(x, z)$, $w_2(x, z)$, $w_3(x, z)$, $w_4(x, z)$ 是次数分别为 22, 44, 67 和 90 的多项式。接下来, 计算关于 $q(x, z)$ 和 $w_i(x, z)$ 之间关于的 z 的结式, 得出:

$$\begin{aligned} R(q, p, z) = & 262144000x^{12} + 4325376000x^{11} + 26173440000x^{10} + 59611136000x^9 - 18085824000x^8 \\ & - 165144768000x^7 + 373417648000x^6 + 928754880000x^5 - 1082386752000x^4 \\ & - 868739712000x^3 + 3067576560000x^2 - 938856960000x - 528107040000. \end{aligned}$$

根据 Sturm 定理, 我们知道在条件(11)下 $R(q, p, z)$ 没有共同的根。因此, 我们将检查条件(11)下 $w_i(x, z)$ 和 $q(x, z)$ 是否具有共同根。其中 $i = 1, 2, 3, 4$ 。

1) 计算关于 $q(x, z)$ 和 $w_1(x, z)$ 之间的 z 的结果, 即从 $q(x, z) = 0$ 和 $w_1(x, z) = 0$ 中消除得出 $R(q, w_1, z) = 32r_1(x)(2x-1)^4(x+3)^{14}$, 其中 $r_1(x)$ 是关于 x 的次数为 70 的多项式。应用 Sturm 定理可知, 当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $r_1(x) \neq 0(x)$, 所以 $q(x, z)$ 和 $w_1(x, z)$ 没有满足(11)的公共跟。因此, 当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $W[L_1(x)] \neq 0$ 。

2) 同样, 要检查 $q(x, z)$ 和 $w_2(x, z)$ 之间是否存在公共根, 我们用 $w_2(x, z)$ 代替程序中的 $w_1(x, z)$, 我们得到 $R(q, w_2, z) = 15735193600(2x-1)^6(x+3)^{28}r_2(x)$, 其中 $r_2(x)$ 是关于 x 的次数为 142 的多项式。将 Sturm 定理应用于 $r_2(x)$, 存在一个根, 用 x_1 表示, 使得 $r_2(x)$, 即 $x_1 \approx 0.3721618858$ 。

因此, 借助 Maple 18 的程序来找出所有可能的区间对, 我们将检查 $q(x, z)$ 和 $w_2(x, z)$ 是否在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上具有任何公共根:

```
> with(regularchains);
> with(ChainTools);
> with(SemiAlgebraicSetTools);
> sys := [w[2], q];
> R := PolynomialRing([x, z]);
> dec := Triangularize(sys, R);
[regular_chain, regular_chain, regular_chain, regular_chain, regular_chain];
> L := map(Equations, dec, R);
```

三个正则链如下:

$$[[2x-1, 2x-1], [x+3, x+3], [w_3(x, z)], [w_4(z)]]$$

其中 $\dot{w}_3(x, z) = \dot{w}_{31}(z)x + \dot{w}_{32}(z)$, $\dot{w}_{31}(z)$, $\dot{w}_{32}(z)$ 和 $\dot{w}_4(z)$ 是关于 z 的次数分别为 116、117 和 142 的项数较多的多项式。显而易见, 在前两个正则链之间不能找到共同的根满足式子(11)。隔离第三条正则链:

$$\begin{aligned} C &:= \text{Chain}([L[1][2], L[1][1]], \text{Empty}(\mathbf{R}), \mathbf{R}); \\ C &:= \text{regular_chain}; \\ \text{RL} &:= \text{RealRootIsolate}(C, \mathbf{R}, \text{'abserr'} = 1/10^5); \\ \text{RL} &:= [\text{box}, \text{box}, \text{box}, \text{box}, \text{box}, \text{box}]; \\ &\text{map}(\text{BoxValues}, \text{RL}, \mathbf{R}); \\ &\left[x = \left[\frac{92801}{131072}, \frac{46401}{65536} \right], z = \left[\frac{-256281}{2097152}, \frac{-32035}{262144} \right] \right], \\ &\left[x = \left[\frac{70433}{131072}, \frac{35217}{65536} \right], z = \left[\frac{-606009689}{2147483648}, \frac{-2424038755}{8589934592} \right] \right], \\ &\left[x = \left[\frac{-8009}{65536}, \frac{-16017}{131072} \right], z = \left[\frac{417939600990505029819}{590295810358705651712}, \frac{104484900247626257455}{147573952589676412928} \right] \right], \\ &\left[x = \left[\frac{97559}{262144}, \frac{195121}{524288} \right], z = \left[\frac{356772144666988627257}{1180591620717411303424}, \frac{713544289333977254515}{1180591620717411303424} \right] \right], \\ &\left[x = \left[\frac{-9247}{32768}, \frac{-147949}{524288} \right], z = \left[\frac{681188174134222673703000557111}{1267650600228229401496703205376}, \frac{85148521766777834212875069639}{158456325028528675187087900672} \right] \right], \\ &\left[x = \left[\frac{79219}{131072}, \frac{19805}{32768} \right], z = \left[\frac{26817090081239929}{72057594037927936}, \frac{13408545040619965}{36028797018963968} \right] \right]. \end{aligned}$$

这意味着在列出的区间对中分别有 6 对 $w_2(x, z)$ 和 $q(x, z)$ 的公共根。但是, 没有一对满足条件(11)。

可以说, 当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $W[L_1(x), L_2(x)] \neq 0$ 。

3) 接下来, 要检查 $q(x, z)$ 和 $w_3(x, z)$ 之间是否存在公共根, 我们在程序中采用 $w_3(x, z)$ 代替 $w_1(x, z)$, 我们可知

$$R(q, w_2, z) = 644513529856000000(2x-1)^6(x+3)^{40}r_3(x),$$

其中 $r_3(x)$ 是关于 x 的次数为 221 的多项式。将 Sturm 定理应用于 $r_3(x)$, 即存在一个根 x_2 且 $x_2 \approx 0.4557503925$, 使得 $r_3(x) = 0$ 。

因此, 通过借助 Maple 18 来找出所有可能的区间对, 我们将检查 $q(x, z)$ 和 $w_3(x, z)$ 是否在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上具有任何公共根:

```
> with(regularchains);
> with(ChainTools);
> with(SemiAlgebraicSetTools);
> sys := [w[3], q];
> R := PolynomialRing([x, z]);
```



```

> dec := Triangularize(sys, R);
[regular_chain, regular_chain, regular_chain, regular_chain, regular_chain];
> L := map(Equations, dec, R);

```

三个正则链条如下:

$$[[2x-1, 2x-1], [x+3, x+3], [\dot{w}_5(x, z)], [\dot{w}_6(z)]]$$

其中 $\dot{w}_5(x, z) = \dot{w}_{51}(z)x + \dot{w}_{52}(z)$, $\dot{w}_{51}(z)$, $\dot{w}_{52}(z)$ 和 $\dot{w}_6(z)$ 是关于 z 的次数分别为 179、180 和 222 的项数较多的多项式。很明显, 前两个正则链之间没有共同的根满足式子(11)。

接着隔离第三条正则链:

$$\begin{aligned} & \left[x = \left[\frac{1504285}{2097152}, \frac{12034281}{16777216} \right], z = \left[\frac{-11454629}{134217728}, \frac{-2863657}{33554432} \right] \right], \\ & \left[x = \left[\frac{10290531}{16777216}, \frac{2572633}{4194304} \right], z = \left[\frac{-273153939}{1073741824}, \frac{-546307877}{2147483648} \right] \right], \\ & \left[x = \left[\frac{8399297}{16777216}, \frac{4199649}{8388608} \right], z = \left[\frac{-626657967153}{2199023255552}, \frac{-39166122947}{137438953472} \right] \right], \\ & \left[x = \left[\frac{-1431829}{16777216}, \frac{-357957}{4194304} \right], z = \left[\frac{867161277385653054168961}{1208925819614629174706176}, \frac{433580638692826527084481}{604462909807314587353088} \right] \right], \\ & \left[x = \left[\frac{-4268031}{16777216}, \frac{-2134015}{8388608} \right], \right. \\ & \left. z = \left[\frac{194382644416992988769472957787}{316912650057057350374175801344}, \frac{3110122310671887820311567324593}{5070602400912917605986812821504} \right] \right], \\ & \left[x = \left[\frac{3823111}{8388608}, \frac{7646223}{16777216} \right], z = \left[\frac{5233394876667813628159763}{9671406556917033397649408}, \frac{334937272106740072202224833}{618970019642690137449562112} \right] \right], \\ & \left[x = \left[\frac{-4781021}{16777216}, \frac{-1195255}{4194304} \right], z = \left[\frac{46827645818074949140561758967949358884538457399699}{93536104789177786765035829293842113257979682750464}, \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{11706911454518737285140439741987339721134614349925}{23384026197294446691258957323460528314494920687616} \right] \right], \\ & \left[x = \left[\frac{2269623}{4194304}, \frac{9078493}{16777216} \right], z = \left[\frac{282095829405875360480275459}{618970019642690137449562112}, \frac{1128383317623501441921101837}{2475880078570760549798248448} \right] \right]. \end{aligned}$$

从以上计算可知, 在列出的区间对中分别有 8 对 $w_3(x, z)$ 和 $q(x, z)$ 的公共根。但是, 没有一对满足条件(11)。可以说, 当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $W[L_1(x), L_2(x), L_0(x)] \neq 0$ 。

4) 同样, 我们使用相同的程序来查找所有可能的区间对, 这些区间对中可能持有 $w_4(x, z)$ 和 $q(x, z)$ 的共同根, 然后获得以下正则链, 这三个正则链如下:

$$[[2x-1, 2x-1], [x+3, x+3], [\dot{w}_7(x, z)], [\dot{w}_8(z)]]$$

其中 $\dot{w}_7(x, z) = \dot{w}_{71}(z)x + \dot{w}_{72}(z)$, $\dot{w}_{71}(z)$, $\dot{w}_{72}(z)$ 和 $\dot{w}_8(z)$ 是关于 z 的次数分别为 242、242 和 302 的多项式。可以清楚看到, 前四个正则链之间没有共同的根满足式子(11)。隔离第三条正则链:

$$\begin{aligned} & \left[x = \left[\frac{13241}{131072}, \frac{6621}{65536} \right], z = \left[\frac{-6359444295}{68719476736}, \frac{-3179722147}{34359738368} \right] \right], \\ & \left[x = \left[\frac{60815}{131072}, \frac{3801}{8192} \right], z = \left[\frac{-2428370505}{8589934592}, \frac{-303546313}{1073741824} \right] \right], \\ & \left[x = \left[\frac{20811}{65536}, \frac{41623}{131072} \right], z = \left[\frac{807980145392121389417409854365}{1267650600228229401496703205376}, \frac{403990072696060694708704927183}{633825300114114700748351602688} \right] \right], \\ & \left[x = \left[\frac{-18527}{65536}, \frac{-37053}{131072} \right], \right. \\ & \left. z = \left[\frac{315773800563960317213913658034152382665}{680564733841876926926749214863536422912}, \frac{157886900281980158606956829017076191333}{340282366920938463463374607431768211456} \right] \right], \\ & \left[x = \left[\frac{83543}{131072}, \frac{10443}{16384} \right], z = \left[\frac{374901605277749525043}{1180591620717411303424}, \frac{93725401319437381261}{295147905179352825856} \right] \right], \\ & \left[x = \left[\frac{-6065}{65536}, \frac{-12129}{131072} \right], z = \left[\frac{55536975725}{549755813888}, \frac{222147902901}{2199023255552} \right] \right]. \end{aligned}$$

我们可以知道在列出的区间对中分别有 6 对 $w_4(x, z)$ 和 $q(x, z)$ 的公共根。但是, 没有一对满足条件 (11)。可以说, 当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, 可以得到结论 $W[L_1(x), L_2(x), L_0(x), L_3(x)] \neq 0$ 。

$\{\tilde{I}_0, \tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3\}$ 在 $(0, h_s)$ 是扩充的完成的精度为 0 的切比雪夫系统, 并且 $\{I_0, I_1, I_2, I_3\}$ 也是这样。因此, 当 h 属于 $(0, h_s)$ 时, $I(h, \delta)$ 最多有 3 个零点。

4. 结论

本文我们研究了类型为(4,3)的 Liénard 系统(1.2)的阿贝尔积分, 证明其阿贝尔积分零点个数的最小上限是 3。

基金项目

本文受广西自然科学基金项目(2020JJB110007)和广西中青年能力提升项目(2020KY16019, 2020KY16020)的经费支持。

参考文献

- [1] Arnold, V.I. (1988) Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-11832-0>
- [2] Chen, L., Ma, X., Zhang, G. and Li, C. (2011) Cyclicity of Several Quadratic Reversible Systems with Center of Genus One. *Journal of Applied Analysis & Computation*, **1**, 439-447. <https://doi.org/10.11948/2011030>
- [3] Dumortier, F. and Li, C. (2001) Perturbations from an Elliptic Hamiltonian of Degree Four: (I) Saddle Loop and Two Saddle Cycle. *Journal of Differential Equations*, **176**, 114-157. <https://doi.org/10.1006/jdeq.2000.3977>
- [4] Petrov, G.S. (1984) Number of Zeros of Complete Elliptic Integrals. *Functional Analysis and Its Applications*, **18**, 148-149. <https://doi.org/10.1007/BF01077834>
- [5] Li, C. and Zhang, Z.F. (1996) A Criterion for Determining the Monotonicity of the Ratio of Two Abelian Integrals. *Journal of Differential Equations*, **124**, 407-424. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0017>
- [6] Sun, X.B. and Yu, P. (2019) Exact Bound on the Number of Zeros of Abelian Integrals for Two Hyper-Elliptic Hamiltonian Systems of Degree 4. *Journal of Differential Equations*, **267**, 7369-7384. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.07.023>

- [7] 孙宪波, 吴奎霖. 一类扰动超椭的 Hamilton 系统的 Abel 积分零点个数上确界[J]. 中国科学, 2015, 45(6): 751-764.
- [8] Grau, M., Manosas, F. and Villadelprat, J. (2011) A Chebyshev Criterion for Abelian Integrals. *Transactions of the American Mathematical Society*, **363**, 109-129. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2010-05007-X>