Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(8), 2701-2704**
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.108280

Hans汉斯

树上k-奖励收集多割问题的近似算法

侯晨菲

河北师范大学，河北 石家庄
Email: 18931636283@163.com

收稿日期：2021年7月4日；录用日期：2021年7月23日；发布日期：2021年8月6日

摘 要

在树上k-奖励收集多割问题中，给定一个无向树$T=(V,E)$，一个由m个结点对构成的集合$P=\{(s_1,t_1),(s_2,t_2),\cdots,(s_m,t_m)\}$和一个参数$k$且$k\le m$。$E$中的每一条边都有一个非负成本$c_e$，$P$中的每一个结点对都有一个非负惩罚成本$\pi_i$。目标是求一个能分离$P$中至少$k$个结点对的多割$M$，使得多割$M$中边的成本与未被$M$分割的结点对的惩罚成本之和最小。这个问题是著名的树上的多割问题的推广。在本文中，我们设计了一个树上k-奖励收集多割问题的近似比为$\left(\frac{14}{3}+\varepsilon\right)$的近似算法，其中$\varepsilon$是任意一个确定的正数。

关键词

多割，k-奖励收集多割，近似算法

An Approximation Algorithm for the k-Prize-Collecting Multicut on a Tree Problem

Chenfei Hou

Hebei Normal University, Shijiazhuang Hebei
Email: 18931636283@163.com

Received: Jul. 4th, 2021; accepted: Jul. 23rd, 2021; published: Aug. 6th, 2021

Abstract

In the k-prize-collecting multicut on a tree (k-$PCM(T)$) problem, we give an undirected tree

文章引用: 侯晨菲. 树上 k-奖励收集多割问题的近似算法[J]. 应用数学进展, 2021, 10(8): 2701-2704.
DOI: 10.12677/aam.2021.108280

$T=(V,E)$, a set of m distinct pairs of vertices $P=\{(s_1,t_1),(s_2,t_2),\cdots,(s_m,t_m)\}$ and a parameter k with $k\le m$. Every edge in E has a nonnegative cost c_e. Every pair (s_i,t_i) in P has a nonnegative penalty cost π_i. Our goal is to find a multicut M that separates at least k pairs in P such that the total cost, including the edge cost of the multicut M and the penalty cost of the pairs not separated by M, is minimized. This problem generalizes the well-known multicut on a tree problem. In this paper, we design an approximation algorithm for the *k-PCM*(*T*) problem with approximation ratio $\left(\frac{14}{3}+\varepsilon\right)$, where ε is a fixed number.

Keywords

Multicut, *k*-Prize-Collecting Multicut, Approximation Algorithm

1. 引言

目前关于组合优化问题的奖励收集形式或部分形式的研究已有许多好的结果，比如 *k*-中心问题[1]。*k*-最小生成树问题[2]，k-Steiner 树问题[3]，*k*-奖励收集 Steiner 树问题[4]和部分覆盖问题[5]。本篇文章主要研究树上 *k*-奖励收集多割问题(*k-PCMT*)的近似算法。*k-PCMT* 问题实例是指给定一个无向树 $T=(V,E)$，对于每条边 $e\in E$ 都有一个非负费用 c_e，令 $P=\{(s_1,t_1),(s_2,t_2),\cdots,(s_m,t_m)\}$ 是一个由 m 个结点对构成的集合，且对于每一个点对 (s_i,t_i) 都有一个非负惩罚费用 π_i，并给定一个参数 $k\le m$。设 $M\subseteq E$ 是边集的一个子集，对某个 $1\le i\le m$，(s_i,t_i) 称为被 M 分割，如果 s_i,t_i 不在 $T\backslash M$ 的同一个连通分支中。*k-PCMT* 问题是找到一个边子集 *M*，使得 *M* 至少分割 *k* 个结点对，且使得 *M* 中的边费用与未被分割的顶点对的惩罚费用之和最小。

k-PCMT 问题是组合优化著名的 *NP* 难问题——树上多割问题的变形，是树上奖励收集的多割问题和树上部分割问题的一个推广。对于树上的多割问题，Garg 等人在文献[5]中提出了近似比为 2 的原始对偶算法。

树上奖励收集的多割(*PCMT*)问题实例是给定一个无向树 $T=(V,E)$，一个由 m 个顶点对构成的集合 $P=\{(s_1,t_1),(s_2,t_2),\cdots,(s_m,t_m)\}$。$E$ 中的每个边都有一个非负费用值 c_e，P 中的每个顶点对 (s_i,t_i) 都有一个非负惩罚费用 π_i。*PCMT* 问题是找到一个边集 $M\subseteq E$，使得 M 中的边费用加上未被分割的顶点对的惩罚费用最小。对于树上奖励收集的多割问题，Levin 和 Segev 在[6]中通过修改原始树和结点对的集合方法将其转化为树上的多割问题，并给出了该问题的一个近似比为 2 的近似算法。本文称此算法为算法 1。

树上部分多割(*PMT*)问题实例是给定一个无向树 $T=(V,E)$，一个由 m 个顶点对构成的集合 $P=\{(s_1,t_1),(s_2,t_2),\cdots,(s_m,t_m)\}$。$E$ 中的每个边都有一个非负费用值 c_e，给定一个参数 $k\le m$。*PMT* 问题是找到一个边集 $M\subseteq E$，使得 M 至少分割 k 个顶点对，并且使 M 中的边费用之和最小。Levin 和 Segev 在[6]中利用拉格朗日松弛技巧提出了关于求解树上部分割问题的一个近似比为 $\left(\frac{8}{3}+\varepsilon\right)$ 的近似算法，其中 ε 是一个任意固定的正数。本文称此算法为算法 2。

本文利用上述两个算法给出求解 *k-PCMT* 问题的一个近似比为 $\left(\frac{14}{3}+\varepsilon\right)$ 的近似算法。

2. 算法和近似比分析

在本节，我们给出求解 *k-PCMT* 问题的一个近似算法。令 *OPT* 表示 *k-PCMT* 问题的最优解的目标函数值。令 $\varepsilon > 0$ 为一个确定的参量。并且假设每条边的费用至多等于 ε 乘以 *OPT*。注意 Levin 和 Segev 就是在此假设下研究了树上部分多割问题(见文献[6])。本文也在此假设下研究 *k-PCMT* 问题。

算法

输入： 无向树 $T=(V,E)$，对每一条边，边费用 $c_e \geq 0$，对每个顶点对 (s_i,t_i)，惩罚费用 $\pi_i \geq 0$，正整数 $k \leq m$。

输出： 边子集 *M*，未被 *M* 分割的顶点对的集合 *R*。

步骤 1： 对一个 *PCMT* 实例 (T,c,π)，应用 *PCMT* 问题的算法 1。令 $F_{PCMT}=(M_{PCMT},P_{PCMT})$ 是该算法的输出解。若此时 M_{PCMT} 中的边已经分割至少 k 个顶点对，则输出 M_{PCMT} 作为 *k-PCMT* 问题实例的一个可行解，算法停止；否则进行步骤 2。

步骤 2： 规定步骤 1 中选中的边重新赋值为 0，其余边的权值不变，得到新的边费用函数 c'。令 $k'=k-$ 步骤 1 中分割的顶点对个数。对一个 *PMT* 实例 (T,c',k')，应用 *PMT* 算法 2。令 $F_{PMT}=(M_{PMT},P_{PMT})$ 是该算法的输出解。输出 $M_{PCMT}\cup M_{PMT}$ 作为 *k-PCMT* 问题实例的一个可行解，算法停止。

下面我们分析一下这个算法的近似比。

引理 1： 设 (M^*,P^*) 是 *PMT* 问题的最优解，则有

$$\sum_{e\in M^*_{PMT}} c_e \leq OPT.$$

证明： 因为费用函数和惩罚函数都是非负的，则有

$$\begin{aligned} OPT &= \sum_{e\in M^*_{k\text{-}PCMT}} c_e + \sum_{(s_i,t_i)\in P^*_{k\text{-}PCMT}} \pi_i \\ &\geq \sum_{e\in M^*_{k\text{-}PCMT}} c_e \\ &\geq \sum_{e\in M^*_{PMT}} c_e. \end{aligned}$$

因为 *k-PCMT* 的最优解是 *PMT* 的可行解，所以最后一个不等式成立。证毕。

因为 *k-PCMT* 问题的任一个可行解都是 *PCMT* 问题的可行解，所以有以下引理。

引理 2： *PCMT* 问题的最优解 (M^*_{PCMT},P^*_{PCMT}) 满足

$$\sum_{e\in M^*_{PCMT}} c_e + \sum_{(s_i,t_i)\in P^*_{PCMT}} \pi_i \leq OPT.$$

引理 3： 若算法在步骤 1 就停止，则此时输出的解 $F_{OUT}=(M_{OUT},P_{OUT})$ 满足

$$\sum_{e\in M_{OUT}} c_e + \sum_{(s_i,t_i)\in P_{OUT}} \pi_i \leq 2OPT.$$

证明： 由算法可知，输出解 F_{OUT} 是由步骤 1 得到的，则 F_{OUT} 一定分割至少 k 个顶点对，故是 *k-PCMT* 问题的可行解。假设 OPT_{PCMT} 是 *PCMT* 问题的最优值，那么由引理 2 我们可以得到

$$\sum_{e\in M_{OUT}} c_e + \sum_{(s_i,t_i)\in P_{OUT}} \pi_i \leq 2OPT_{PCMT} \leq 2OPT.$$

引理 4： 若算法在第二步时停止，则此时 $F_{OUT}=\left(M_{OUT},P_{OUT}\right)$ 满足

$$\sum_{e\in M_{OUT}} c_e+\sum_{(s_i,t_i)\in P_{OUT}} \pi_i \le \left(\frac{14}{3}+\varepsilon\right)OPT.$$

证明： 显然有 $M_{OUT}=M_{PCMT}\cup M_{PMT}$ 成立。由于 F_{OUT} 分割了至少 k 个顶点对，所以 F_{OUT} 是 *k-PCMT* 问题的可行解。因为费用函数 c 和 π 都是非负的且 $P_{OUT}\subseteq P_{PCMT}$，所以有

$$\sum_{e\in M_{OUT}} c_e+\sum_{(s_i,t_i)\in P_{OUT}} \pi_i \le \sum_{e\in M_{PMT}} c_e+\sum_{e\in M_{PCMT}} c_e+\sum_{(s_i,t_i)\in P_{PCMT}} \pi_i.$$

由引理 1 和引理 2 可知

$$\begin{aligned}\sum_{e\in M_{PMT}} c_e+\sum_{e\in M_{PCMT}} c_e+\sum_{(s_i,t_i)\in P_{PCMT}} \pi_i &\le \left(\frac{8}{3}+\varepsilon\right)OPT_{PMT}+2OPT_{PCMT}\\ &\le \left(\frac{8}{3}+\varepsilon\right)OPT+2OPT\\ &=\left(\frac{14}{3}+\varepsilon\right)OPT.\end{aligned}$$

综上我们有下面主要结论。

定理 4： 存在一个 *k-PCMT* 问题的近似比为 $\left(\frac{14}{3}+\varepsilon\right)$ 的近似算法。

3. 结论

本文中，笔者采用 *PCMT* 问题和 *PMT* 问题的两个算法作为子算法给出了求解 *k-PCMT* 问题的一个新算法。

基金项目

河北省自然科学基金(A2019205089)；河北师范大学研究生创新资助项目(CXZZSS2021045)。

参考文献

[1] Han, L., Xu, D.C., Du, D.L. and Wu, C.C. (2019) A 5-Approximation Algorithm for the k-Prize-Collecting Steiner Tree Problem. *Optimization Letters*, **13**, 573-585. https://doi.org/10.1007/s11590-017-1135-8

[2] Garg, N. (1996) A 3-Approximation for the Minimum Tree Spanning k Vertices. *Proceedings of* 37*th Conference on Foundations of Computer Science*, Burlington, VT, 14-16 October 1996, 302-309. https://doi.org/10.1109/SFCS.1996.548489

[3] Chudak, F.A., Roughgarden, T. and Williamson, D.P. (2001) Approximate k-MSTs and k-Steiner Trees via the Primal-Dual Method and Lagrangean Relaxation. *Proceedings of the* 8*th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization*, The Netherlands, 13-15 June 2001, 60-70. https://doi.org/10.1007/3-540-45535-3_5

[4] Jain, K. and Vazirani, V.V. (2001) Approximation Algorithms for Metric Facility Location and k-Median Problems Using the Primal-Dual Schema and Lagrangian Relaxation. *Journal of the ACM*, **48**, 274-296. https://doi.org/10.1145/375827.375845

[5] Garg, N., Vazirani, V.V. and Yannakakis, M. (1997) Primal-Dual Approximation Algorithms for Integer Flow and Multicut in Trees. *Algorithmica*, **18**, 3-20. https://doi.org/10.1007/BF02523685

[6] Levin, A. and Segev, D. (2006) Partial Multicuts in Trees. *Theoretical Computer Science*, **369**, 384-395. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2006.09.018