

# Möbius梯状图的完美匹配的反强迫多项式和卢卡斯数

刘雨童<sup>1</sup>, 韩 慧<sup>1</sup>, 王杰彬<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>西北师范大学, 数学与统计学院, 甘肃 兰州

<sup>2</sup>甘肃省酒泉中学, 甘肃 酒泉

Email: 2315631706@qq.com, \*1248514393@qq.com

收稿日期: 2021年7月23日; 录用日期: 2021年8月15日; 发布日期: 2021年8月26日

---

## 摘 要

在本文中我们研究了Möbius梯状图 $ML_n$ 的反强迫谱, 并得到了一个关于 $ML_n$ 的反强迫多项式和Lucas数列关系的等式。

## 关键词

Möbius梯状图 $ML_n$ , 完美匹配, 反强迫谱, 反强迫多项式, Lucas数列

---

# The Anti-Forcing Polynomial of Perfect Matching of Möbius Ladder Graph and Lucas Number

Yutong Liu<sup>1</sup>, Hui Han<sup>1</sup>, Jiebin Wang<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

<sup>2</sup>Jiuquan Middle School, Jiuquan Gansu

Email: 2315631706@qq.com, \*1248514393@qq.com

Received: Jul. 23<sup>rd</sup>, 2021; accepted: Aug. 15<sup>th</sup>, 2021; published: Aug. 26<sup>th</sup>, 2021

---

## Abstract

In this paper, we study the anti-forcing spectrum of  $ML_n$  and get an equation about the relationship between the anti-forcing polynomial of  $ML_n$  and Lucas sequence.

\*通讯作者。

## Keywords

Möbius Ladder Graph  $ML_n$ , Perfect Matching, Anti-Forcing Spectrum, Anti-Forcing Polynomial, Lucas Sequence

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

Vukičević、Trinajstić 和 H. Lei、Y. Yeh、H. Zhang 分别介绍了图  $G$  的反强迫数[1]、完美匹配  $M$  的反强迫数及反强迫谱[2]。设  $M$  是图  $G$  其中的一完美匹配。称子集  $S_a \subseteq E(G) \setminus M$  为  $M$  的反强迫集,若  $G - S_a$  有唯一的完美匹配  $M$ 。 $M$  的最小反强迫集的大小被称为  $M$  的反强迫数,记作  $af(G, M)$ 。

$Spec_{af}(G) = \{af(G, M) \mid M \text{ 是 } G \text{ 的任一完美匹配}\}$ 。2015 年, H. Hwang、H. Lei、Y. Yeh、H. Zhang 介绍了图  $G$  的反强迫多项式的概念[3] [4]。

在第 1 节中,我们介绍了一些定义、符号和结论。在第 2 节中,我们研究了 Möbius 梯状图  $ML_n$  的反强迫数  $af(ML_n, M)$  和  $ML_n$  的反强迫谱  $Spec_{af}(ML_n)$ 。在第 3 节中,我们根据完美匹配的反强迫谱  $Spec_{af}(ML_n)$  和个数  $|\mathcal{M}|$ ,得到了一个关于  $ML_n$  的反强迫多项式和 Lucas 数列的等式。

## 2. 预备知识

设  $M$  是图  $G$  的一个完美匹配。

如果  $G$  中的两个  $M$ -交错圈要么不交,要么只相交在  $M$  中的边,则称它们是  $M$ -相容的。如果在一个集合  $\mathcal{A}$  中任选 2 个  $M$ -交错圈都是  $M$ -相容的,则  $\mathcal{A}$  就是一个相容  $M$ -交错集。我们用  $c'(M)$  表示图  $G$  的最大相容  $M$ -交错集的大小。

**定义 1** [3] [4] 图  $G$  的反强迫多项式定义为:

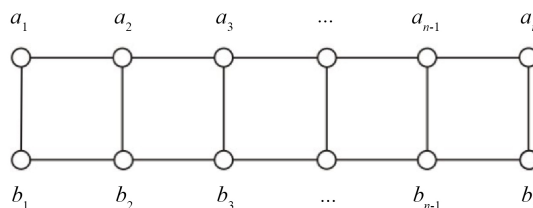
$$Af(G, x) = \sum_{M \in \mathcal{M}} x^{af(G, M)} = \sum_{i=af(G, M)}^{Af(G, M)} \varpi(G, i) x^i$$

其中  $\varpi(G, i)$  表示的是反强迫数为  $i$  的完美匹配的数目,  $\mathcal{M}$  表示  $G$  的全部完美匹配所组成的集合。

**引理 1** [2] 若  $M$  是图  $G$  其中一完美匹配,则  $af(G, M) \geq c'(M)$ 。若图  $G$  是平面二部图,则

$$af(G, M) = c'(M).$$

**定义 2** 梯子图  $L_n = P_n \times P_2$ , 现将  $L_n$  水平放置,将其顶点依次标号为  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 。如图 1 [5]。

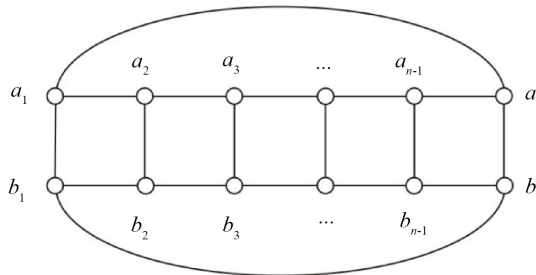


**Figure 1.** Ladder graph  $L_n$

**图 1.** 梯子图  $L_n$

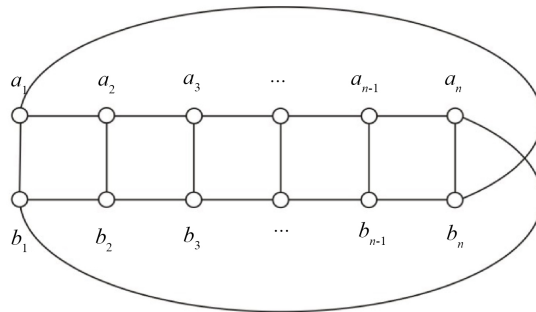
在图  $L_n$  中, 边  $a_i b_i$  和边  $a_i a_{i+1}, b_i b_{i+1}$  分别被称为竖直边和水平边。设  $M$  是图  $L_n$  的完美匹配,  $a_i b_i \in M$  称为  $M$  的竖直边,  $a_i a_{i+1}, b_i b_{i+1} \in M$  称为  $M$  的水平边。

**定义 3** 在梯子图  $L_n$  上添加边  $a_1 a_n$  和  $b_1 b_n$  就得到循环梯状图  $CL_n$ , 即  $CL_n = C_n \times P_2$ ,  $n \geq 3$ , 如图 2 [5]。类似地, 在梯子图  $L_n$  上添加边  $a_1 b_n$  和  $a_n b_1$  就得到 Möbius 梯状图  $ML_n$ , 如图 3 [6]。



**Figure 2.** Cyclic ladder graph  $CL_n$

**图 2.** 循环梯状图  $CL_n$



**Figure 3.** Möbius ladder graph  $ML_n$

**图 3.** Möbius 梯状图  $ML_n$

类相比于  $L_n$ , 在图  $CL_n$  和  $ML_n$  中, 类似于  $a_i b_i$  的边叫做竖直边, 类似于  $a_i a_{i+1}, b_i b_{i+1}, a_1 a_n, b_1 b_n, a_1 b_n, a_n b_1$  的边叫做水平边。设  $M$  是图  $CL_n$  和  $ML_n$  中一完美匹配,  $a_i b_i \in M$  称作  $M$  的竖直匹配边,  $a_i a_{i+1}, b_i b_{i+1}, a_1 a_n, b_1 b_n, a_1 b_n, a_n b_1 \in M$  称作  $M$  的水平匹配边。

在本节的引理中, 我们都给定  $M$  是  $L_n$  的一个完美匹配, 故下面引理中不在赘述。

**引理 2 [7]** 设  $M$  有  $p (p \geq 1)$  条竖直匹配边, 则  $n \equiv p \pmod{2}$ , 并且  $a_i a_{i+1} \in M \Leftrightarrow b_i b_{i+1} \in M$ 。

**定理 1 [5]** 如果  $a_i b_i \in M$ ,  $2 \leq i \leq n-1$ , 则  $af(L_n, M) = af(L^{(1)}, M_1) + af(L^{(2)}, M_2)$ ,  $M_j = M \cap E(L^{(j)})$ ,  $j = 1, 2$ ,  $L^{(1)}$  和  $L^{(2)}$  分别是  $L_n$  关于顶点集  $\{a_1, a_2, \dots, a_i, b_1, b_2, \dots, b_i\}$  和  $\{a_i, a_{i+1}, \dots, a_n, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n\}$  导出的梯子图。

Lucas 数列中  $l_0 = 2$ ,  $l_1 = 1$ , 且它的递推关系为  $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ 。

**引理 3 [8]** Lucas 数列的第  $n$  项为  $l_n = \sum_{i=0}^n \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i}$ 。

显然,  $L_n$ 、 $CL_n$ 、 $ML_n$  都是 Hamilton 圈。

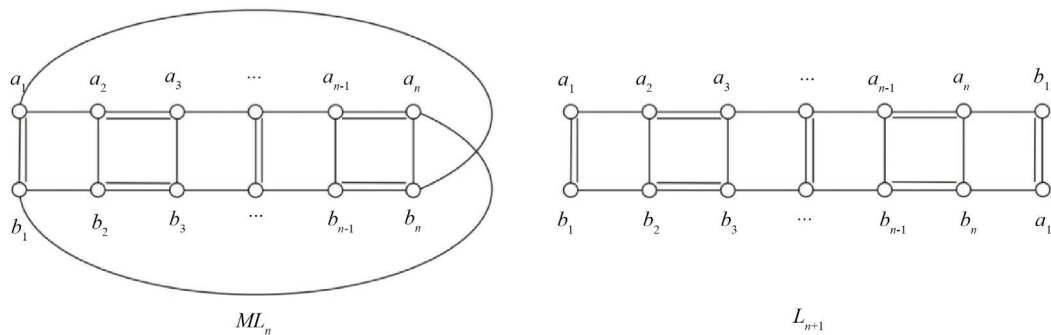
**引理 4** 当  $p = 0$  时, 从  $ML_n$  中删去所有竖直边后, 所有水平边(含  $a_1 b_n$  和  $a_n b_1$ )构成的图正好是一个  $2n$  长的圈  $C_{2n} = a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n a_1$ , 一定存在完美匹配。

### 3. Möbius 梯状图的反强迫谱

设  $M$  是  $ML_n$  中含有  $p$  条竖直匹配边的完美匹配, 设  $a_i b_i \in M$ 。如果边  $b_n a_1, a_1 b_1, b_1 b_2$  或  $a_n b_1, b_1 a_1, a_1 a_2$  在  $M$ -交错圈  $C$  中同时存在, 则称  $M$ -交错圈  $C$  跨过  $a_i b_i$ 。

**引理 5 [5]** 在  $ML_n$  中, 如果边  $b_n a_1, a_1 b_1, b_1 b_2$  或  $a_n b_1, b_1 a_1, a_1 a_2$  在  $M$ -交错圈  $C$  中同时存在。则当  $n$  为奇数时,  $M$ -交错圈必然会跨过  $p$  条竖直边, 从而有且仅有两个  $n+p$  长的  $M$ -交错圈; 而当  $n$  是偶数时, 不存在  $M$ -交错圈。

我们在边  $a_i b_i$  处把  $ML_n$  分裂成了  $L_{n+1}$ , 如图 4 [6] 所示。在  $L_{n+1}$  中, 假设  $a_i b_i, a_j b_j \in M$  是两条相继竖直边, 则由  $a_i b_i, a_j b_j$  以及它们中间的全部水平边构成的子图被称为  $ML_n$  的片段。



**Figure 4.**  $ML_n$  is decomposed into  $L_{n+1}$  at edge  $a_i b_i$

**图 4.**  $ML_n$  在边  $a_i b_i$  处分裂为  $L_{n+1}$

同理于  $L_n$  的分解定理, 对于  $ML_n$  我们有

**定理 2** 设  $M$  是  $ML_n$  的完美匹配, 而且  $M$  含有  $p (p \geq 2)$  条竖直匹配边, 则  $af(ML_n, M) = af(L^{(1)}, M_1) + af(L^{(2)}, M_2) + \dots + af(L^{(p)}, M_p)$ ,  $M_j = M \cap E(L^{(j)})$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ ,  $L^{(1)}, L^{(2)}, \dots, L^{(p)}$  是  $ML_n$  的  $p$  个片段。

**引理 6** 设  $n \geq 2$ ,  $M$  是  $ML_n$  的完美匹配, 且  $p = 0$ , 则有  $af(ML_n, M) = \begin{cases} \frac{n+2}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ 3, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$ 。

**证明** 当  $p = 0$  时,  $n$  可以是偶数, 也可以是奇数, 从而分情况讨论。设  $a_i a_2 \in M$ 。

**情形 1:**  $n$  是偶数时,  $M = \{a_1 a_2, a_3 a_4, \dots, a_{n-2} a_{n-1}, a_n b_1, b_2 b_3, \dots, b_{n-1} b_n\}$ 。(此时  $a_i a_{i+1} \in M \Leftrightarrow b_i b_{i+1} \in M$ , 如下图 5 [6])。相容  $M$ -交错集  $\mathcal{A}$  是由  $\frac{n}{2}$  个  $M$ -交错 4 圈及  $M$ -交错圈  $C$  构成的, 从而  $|\mathcal{A}| = \frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2}$ , 所以有  $af(ML_n, M) \geq |\mathcal{A}| = \frac{n+2}{2}$ 。在  $ML_n$  中取  $M$  的反强迫集  $S = \{a_1 b_n, a_1 b_1, a_3 b_3, \dots, a_{n-1} b_{n-1}\}$ , 且  $|S| = \frac{n+2}{2}$ 。所以  $af(ML_n, M) \leq |S| = \frac{n+2}{2}$ 。

综上所述, 当  $n$  是偶数且  $p = 0$  时,  $af(ML_n, M) = \frac{n+2}{2}$ 。

**情形 2:**  $n$  为奇数时,  $M = \{a_1 a_2, a_3 a_4, \dots, a_{n-2} a_{n-1}, a_n b_1, b_2 b_3, \dots, b_{n-1} b_n\}$  (此时  $M$  中水平匹配边不成对出现, 如下图 6 [6])。取  $M$ -交错圈  $C_1 = b_1 b_2 \dots b_n a_n b_1$ ,  $C_2 = b_1 a_1 a_2 \dots a_n b_1$ ,  $C_3 = a_1 a_2 b_2 b_3 a_3 a_4 \dots b_{n-1} b_n a_1$ , 得到相容  $M$ -交错集  $\mathcal{A}$ , 此时  $|\mathcal{A}| = 3$ , 所以有  $af(ML_n, M) \geq |\mathcal{A}| = 3$ 。取  $S = \{a_1 b_n, a_1 b_1, b_1 b_2\}$  是  $ML_n$  的一个反强迫集, 并且  $|S| = 3$ , 所以  $af(ML_n, M) \leq 3$ 。

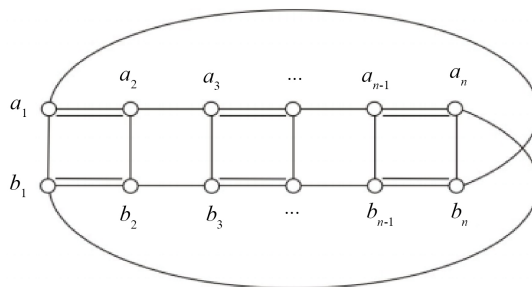


Figure 5. The perfect matching  $M$  of  $ML_n$

图 5.  $ML_n$  的完美匹配  $M$

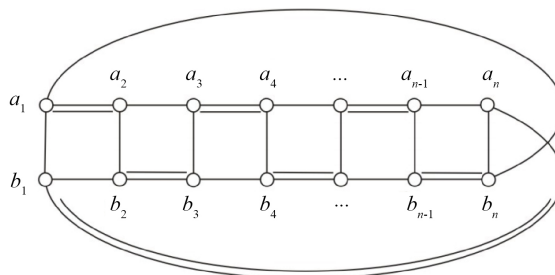


Figure 6. The perfect matching  $M$  of  $ML_n$

图 6.  $ML_n$  的完美匹配  $M$

综上所述，当  $n$  是奇数且  $p = 0$  时， $af(ML_n, M) = 3$ 。

根据引理 6，我们有下面的引理。

**引理 7** 设  $M$  是  $ML_n$  的一个含有  $p$  条竖直边的完美匹配。当  $p = 0$ ， $n$  可以是偶数，也可以是奇数；只有  $n$  是偶数时，水平匹配边才成对出现。而当  $p \geq 1$  时，一定有  $n \equiv p \pmod{2}$ ，且  $a_i a_{i+1} \in M \Leftrightarrow b_i b_{i+1} \in M$ 。

**引理 8** 设  $n \geq 2$ ， $M$  是  $ML_n$  的完美匹配，且  $p = 1$ ，则有  $af(ML_n, M) = \frac{n+3}{2}$ 。

**证明** 当  $p = 1$  时， $n$  必为奇数。在  $ML_n$  中取  $M$ -交错圈  $C_1 = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 a_1$ ， $C_2 = b_1 b_2 \cdots b_n a_1 b_1$  和  $\frac{n-1}{2}$  个与  $C_1, C_2$   $M$ -相容的  $M$ -交错 4 圈，得到相容  $M$ -交错集  $\mathcal{A}$ ，所以  $|\mathcal{A}| = 2 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+3}{2}$ ，所以有  $af(ML_n, M) \geq c'(M) \geq |\mathcal{A}| = \frac{n+3}{2}$ 。 $ML_n$  在中取  $M$  的反强迫集  $S = \{a_1 b_n, a_1 a_2, a_2 b_2, a_4 b_4, \dots, a_{n-1} b_{n-1}\}$ ，且  $|S| = \frac{n+3}{2}$ 。所以  $af(ML_n, M) \leq |S| = \frac{n+3}{2}$ 。

综上所述，当  $n \geq 3$  是奇数且  $p = 1$  时， $af(ML_n, M) = \frac{n+3}{2}$ 。

**引理 9** 设  $n \geq 2$ ， $M$  是  $ML_n$  的一个含  $p$  条竖直边的完美匹配， $2 \leq p \leq n$ ，则  $M$  的反强迫数为  $af(ML_n, M) = \frac{n+p}{2}$ 。

**证明** 当  $2 \leq p \leq n$  时，在  $ML_n$  中，相容  $M$ -交错集  $\mathcal{A}$  中包含  $\frac{n-p}{2}$  个  $M$ -交错 4 圈和  $p$  个  $M$ -交错圈，此时  $|\mathcal{A}| = p + \frac{n-p}{2} = \frac{n+p}{2}$ ，所以有  $af(ML_n, M) \geq c'(M) \geq |\mathcal{A}| = \frac{n+p}{2}$ 。

在  $M$  的  $p$  条竖直边处把  $ML_n$  分裂成  $p$  个片段  $\{d_1, d_2, \dots, d_p\}$ , 然后从第一个片段里取出反强迫集  $S_1 = \{a_1 a_2, a_2 b_2, a_4 b_4, \dots, a_{2i-2} b_{2i-2}\}$ , 从而  $d_i (1 \leq i \leq p)$  的反强迫集的并  $S$  就是  $ML_n$  的一个反强迫集, 并且  $|S| = \frac{n+p}{2}$ , 因此有  $af(ML_n, M) \leq |S| = \frac{n+p}{2}$ 。

综上所述, 可得当  $2 \leq p \leq n$  时, 有  $af(ML_n, M) = \frac{n+p}{2}$ 。

在引理 6, 引理 8, 引理 9 的证明过程中, 我们需要借助[9]中引理 5, 从而我们得到了下面的定理。

**定理 3**

$$Spec_{af}(ML_n) = \begin{cases} \{3\}, & n=3 \\ \left\{3, \frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, \dots, n\right\}, & n \geq 5 \text{ 是奇数} \\ \left\{\frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, \dots, n\right\}, & n \geq 2 \text{ 是偶数} \end{cases}$$

从而当  $n \geq 7$  为奇数时  $Spec_{af}(ML_n)$  是不连续的; 当  $n \geq 2$  为偶数或  $n = 3, 5$  时  $Spec_{af}(ML_n)$  是连续的。我们根据定理 3, 容易得出下面的推论。

$$\text{推论 1 1)} \quad af(ML_n) = \begin{cases} 3, & \text{若 } n \geq 3 \text{ 是奇数} \\ \frac{n+2}{2}, & \text{若 } n \geq 2 \text{ 是偶数} \end{cases}$$

$$2) \quad Af(ML_n) = n。$$

#### 4. Möbius 梯状图 $ML_n$ 的完美匹配和 Lucas 数列的关系

**定理 4** 在 Möbius 梯状图  $ML_n$  中, 设包含  $2q$  条水平边的完美匹配一共有  $|\mathcal{M}|$  个, 则  $|\mathcal{M}| = \frac{n}{n-q} \binom{n-q}{n}$ 。

**证明** 当  $n$  是奇数时,  $p$  也是奇数。设  $M$  是  $ML_n$  的一个完美匹配, 且  $M$  含有  $2q$  条水平匹配边必成对出现, 则  $M$  含有  $p = n - 2q$  条竖直匹配边, 其中  $0 \leq q \leq \frac{n-1}{2}$ ,  $1 \leq p \leq n$ 。

当  $a_1 b_n, b_1 a_n \in M$  时, 当我们删掉  $a_1, b_1, a_n, b_n$  这 4 个顶点后就得到了  $L_{n-2}$ , 所以只需要计算出  $L_{n-2}$  (含有  $2q-2$  条水平匹配边) 的完美匹配个数即可, 设  $ML_n$  有  $|\mathcal{M}_1|$  个完美匹配, 故根据[5]中推论 2 得到

$$|\mathcal{M}_1| = \binom{\frac{n-2-p}{2} + p}{p} = \binom{\frac{n+p-2}{2}}{p} = \binom{n-q-1}{n-2q} = \binom{n-q-1}{q-1}。$$

当  $a_1 b_n, b_1 a_n \notin M$  时, 设  $ML_n$  的完美匹配个数  $|\mathcal{M}_2|$ , 删掉水平边  $a_1 b_n, b_1 a_n$  后就得到了  $L_n$ , 从而我们只需要计算出  $L_n$  (包含  $2q$  条水平匹配边) 的完美匹配个数即可, 故根据[5]中推论 2 可得

$$|\mathcal{M}_2| = \binom{\frac{n-p}{2} + p}{p} = \binom{\frac{n+p}{2}}{p} = \binom{n-q}{n-2q} = \binom{n-q}{q}。$$

$$\text{因此当 } n \text{ 为奇数且 } p \geq 1 \text{ 时, } |\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2| = \frac{n}{n-q} \binom{n-q}{q}。$$

当  $n$  为奇数, 且  $a_i a_{i+1} \in M$  与  $b_i b_{i+1} \in M$  不同时存在时, 有  $n = q$ , 且  $|\mathcal{M}| = 2$ 。

当  $n$  是偶数时,  $p$  也为偶数。设  $M$  是  $ML_n$  的一个完美匹配, 且  $M$  含有  $2q$  条水平匹配边必成对出现, 则  $M$  含有  $p = n - 2q$  条竖直匹配边, 其中  $0 \leq q \leq \frac{n}{2}$ ,  $0 \leq p \leq n$ 。当  $p \geq 2$  时, 类似于  $n$  为奇数时, 将  $ML_n$

化为梯子图计算, 就有  $|\mathcal{M}| = \frac{n}{n-q} \binom{n-q}{q}$ ; 而当  $p=0$  时,  $n=2q$ , 就有  $\frac{2q}{2q-q} \binom{2q-q}{q} = 2 = |\mathcal{M}|$ 。

由定理 3 和定理 4, 我们有下面这个定理。

**定理 5**  $ML_n$  的反强迫多项式为:

$$Af(ML_n, x) = \begin{cases} 3x^2, & n=2 \\ 6x^3, & n=3 \\ 2x^3 + \left( \frac{n(n^2-1)}{24} + n \right) x^{\frac{n+3}{2}} + \sum_{q=0}^{\frac{n-5}{2}} \frac{n}{n-q} \binom{n-q}{q} x^{n-q}, & n \geq 5 \text{ 是奇数} \\ \left( \frac{n^2}{4} + 2 \right) x^{\frac{n+2}{2}} + \sum_{q=0}^{\frac{n-4}{2}} \frac{n}{n-q} \binom{n-q}{q} x^{n-q}, & n \geq 4 \text{ 是偶数} \end{cases}$$

根据引理 3 和定理 5, 我们有:

**推论 2** Möbius 梯状图  $ML_n$  的完美匹配个数  $|\mathcal{M}| = \begin{cases} l_n + 2, & \text{若 } n \geq 3 \text{ 是奇数} \\ l_n, & \text{若 } n \geq 2 \text{ 是偶数} \end{cases}$ 。

注: 这与循环梯状图  $CL_n$  中的结论, 奇偶是相反的, 详细可见[3]。

## 基金项目

地区科学基金(12161081)。

## 参考文献

- [1] Vukičević, D. and Trinajstić, N. (2007) On the Anti-Forcing Number of Benzenoids. *Journal of Mathematical Chemistry*, **42**, 575-583. <https://doi.org/10.1007/s10910-006-9133-6>
- [2] Lei, H., Yeh, Y. and Zhang, H. (2016) Anti-Forcing Numbers of Perfect Matchings of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **202**, 95-105. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2015.08.024>
- [3] 赵爽. 关于一些图类的强迫与反强迫多项式的研究[D]: [博士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2018.
- [4] Zhao, S. and Zhang, H. (2018) Anti-Forcing Polynomials for Benzenoids Systems with Forcing Edges. *Discrete Applied Mathematics*, **250**, 342-356. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.05.023>
- [5] 姚海元, 王杰彬, 王旭. 循环梯状图完美匹配的反强迫谱与卢卡斯数[J]. *西北师范大学学报(自然科学版)*, 2018, 54(2): 21-25, 29.
- [6] 王杰彬. 几类特殊图的反强迫谱的研究[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 西北师范大学, 2018.
- [7] Vukičević, D. and Trinajstić, N. (2008) On the Anti-Kekule Number and Anti-Forcing Number of Cata-Condensed Benzenoids. *Journal of Mathematical Chemistry*, **43**, 719-726. <https://doi.org/10.1007/s10910-006-9223-5>
- [8] Koshy, T. (2001) *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. Wiley, New York.
- [9] 韩振云, 王杰彬. 梯子图完美匹配的反强迫谱与斐波那契数列[J]. *兰州工业学院学报*, 2020, 27(1): 85-90.