

(3 + 1)维Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff方程的行波解

蔡妮平

成都信息工程大学应用数学学院, 四川 成都

Email: cnp969810@163.com

收稿日期: 2021年7月13日; 录用日期: 2021年8月1日; 发布日期: 2021年8月16日

摘要

在物理和数学中, 研究非线性微分方程的解具有重要意义。方程的解在理解非线性现象的性质起着重要的作用。本文应用动力系统方法全面系统地研究了(3 + 1)维Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff方程的各类行波解。通过将Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff方程的行波系统转化为 \mathbb{R}^3 中的动力系统, 得到了有界行波和无界行波存在的参数分岔的充分条件。通过复杂的椭圆积分, 给出了(3 + 1)维Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff方程的所有行波解的精确式。

关键词

行波, CBS方程, 分岔, 动力系统

Traveling Wave Solutions of the (3 + 1)-Dimensional Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Equation

Niping Cai

Department of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu Sichuan

Email: cnp969810@163.com

Received: Jul. 13th, 2021; accepted: Aug. 1st, 2021; published: Aug. 16th, 2021

Abstract

In this paper, we apply the dynamical system methods to investigate all types of traveling waves of

(3 + 1)-dimensional Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff equation comprehensively and systematically. By transforming its traveling wave system into a dynamical system in R^3 , we obtain sufficient conditions of parameter bifurcation sets to ensure the existence of various traveling wave solutions. Besides, by calculating the complex elliptic integrals, we give the exact expressions of all traveling wave solutions of the (3 + 1)-dimensional Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff equation, including the bounded and unbounded ones.

Keywords

Traveling Wave, CBS Equation, Bifurcation, Dynamical System

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1990年, Bogoyavlenskii 和 Schiff 用非线性可积方程 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (CBS)方程描述了黎曼波沿二维空间的相互作用, 即沿 y 轴传播的黎曼波与沿 x 轴传播的长波的相互作用[1] [2]。黎曼波动力学是物理学和工程学最重要的应用之一, 例如河流中的海啸和潮汐、等离子体中的磁声波、海洋中的内波和纤维中的光学海啸。无论从实践或者理论的角度来看, 求解方程行波解都是一项很有吸引力的工作。

目前, 关于 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (CBS)方程的求解问题, 学者们已经发表了很多研究结果。2004年, Li B 等人利用广义 Riccati 方程展开法得到了广义 CBS 方程的一些包含孤子解和类周期解的精确解析解[3]。2010年, Wazwaz 利用多重 \exp -函数法求得(2 + 1)维 CBS 方程和(3 + 1)维 CBS 方程的多重孤子解[4]。2013年, Moatimid G 利用对称方法将 CBS 方程转化为双变量偏微分方程, 得到了 CBS 方程的多种精确解[5]。2014年, Xue L 等人基于 Bell 多项式、辅助变量和双线性形式来构造多重孤子解和交叉解[6]。2015年, Al-Amr M O 利用修正的简单方程方法(MSEM)构造了(2 + 1)维 CBS 方程的精确解, 其中包括广义的非线性演化方程, 特别是(2 + 1)维的 CBS 耗散方程, (2 + 1)维破裂孤子方程和(2 + 1)维 Bogoyavlenskii 的破裂孤子方程[7]。2016年, Kaplan M 利用 Kudryashov 方法得到了(2 + 1)维 CBS 方程的精确解[8]。2017年, Saleh R 等人利用最优李向量集, 将 CBS 方程通过两次连续约简转化为常微分方程(ODE)进行解析求解, 再利用奇异流行方法给出方程的精确解[9]。

在这篇文章中, 我们主要研究(3 + 1)维 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (CBS)方程的行波解。这个方程可以等价的写成以下两种形式

$$v_t + \Phi(v)v_y + \Phi(v)v_z = 0$$

$$\Phi(v) = \partial_x^2 + av + bv_x \partial_x^{-1}$$

$$\Phi_1(v) = \partial_x^2 + cv + dv_x \partial_x^{-1}$$

或者写成

$$v_t + avv_y + cvv_z + bv_x \partial_x^{-1} v_y + dv_x \partial_x^{-1} v_z + v_{xy} + v_{xz} = 0$$

其中 a 、 b 、 c 和 d 是参数。通过势能函数 $v = u_x$, 可以将(3 + 1)维 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (CBS)

方程用以下形式来表达

$$u_{xt} + au_x u_{xy} + bu_{xx} u_y + cu_x u_{xz} + du_{xx} u_z + u_{xxy} + u_{xxz} = 0$$

为了更好地展示我们的方法与步骤，我们考虑 $a = b = c = d = 1$ 时狭义的 CBS 方程

$$u_{xt} + u_x u_{xy} + u_{xx} u_y + u_x u_{xz} + u_{xx} u_z + u_{xxy} + u_{xxz} = 0 \quad (1)$$

尽管有关方程(1)的解已经有许多深刻的研究，但仍然有一些问题有待解决。可以看到学者们对(3+1)维 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程的行波没有做出完全的讨论，尤其是对无界行波解的讨论被忽视。尽管上述的方法可以有效地得到方程(1)的多种解，但仍有一些行波解未被注意到。我们致力于研究方程(1)的行波解，方程的解有助于理解方程所描述的非线性物理现象和波的传播，这再次引起对方程(1)行波解的极大兴趣。

事实上，偏微分方程的行波解通常对应其行波系统的轨道[10] [11]。正是这种对应的关系使得动力系统分岔理论[12] [13]成为研究偏微分方程的有限途径。近十几年来，人们一直致力于研究偏微分方程行波的分岔[14] [15] [16] [17] [18]。所以我们尝试用动力系统的方法来处理方程(1)的行波。首先，对方程(1)的行波系统进行变换，使得方程(1)变成 \mathbf{R}^3 中的动力系统。这时我们发现，它包含一个二维的 Hamilton 系统。而 Hamilton 系统决定了大部分的行为。然后，将动力系统的分岔方法重新应用于 Hamilton 系统，得到参数分岔集。该分岔集将参数空间划分为不同的区域，本文中的参数分岔集将参数空间划分为两个区域，显示出不同相轨特征。最后根据分岔结果，通过计算沿着不同轨道的椭圆函数积分，得到了方程(1)所有有界行波解和无界行波解的精确表达式。

与直接方法相比，本文所采用的方法从几何角度详细分析了行波系统的相空间，从而得到了所有可能的行波。该方法完全避免了任何损失，并通过参数分岔集清楚地表示了它们的存在范围。所得到的解补充了(3+1)维 CBS 方程的有界行波解，有助于理解复杂的非线性波现象和波的传播。

2. 方程(1)的行波系统的分岔分析

为了求(3+1)维 CBS 方程的行波解，我们令

$$\xi = x + ay + bz - ct,$$

将方程(1)转换成它的行波系统，得到：

$$-cu'' + 2(a+b)u'u'' + (a+b)u''' = 0 \quad (2)$$

这里'表示 $d/d\xi$ ，参数 $a(a \neq 0)$ 和 b 分别表示 y 方向和 z 方向的波数，并且 $c \neq 0$ ， c 表示波速。对方程(2)进行一次积分，得到：

$$(a+b)u''' + (a+b)(u')^2 - cu' = e, \quad (3)$$

其中参数 e 表示积分常数。令 $u' = v$ ，可以得到方程(3)的另一种表达形式：

$$\begin{cases} u' = v, \\ v'' = -v^2 + \frac{c}{a+b}v + \frac{e}{a+b}, \end{cases} \quad (4)$$

显然，系统(4)的第二个方程不包含函数 u 。所以我们首先分析系统(4)中的第二个方程，令 $v' = y$ ，这个方程可以被写成等价系统：

$$\begin{cases} v' = y, \\ y' = -v^2 + \frac{c}{a+b}v + \frac{e}{a+b}, \end{cases} \quad (5)$$

可以验证系统(5)是一个有能量函数 $H(v, y)$ 的 Hamilton 系统:

$$H(v, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{Ac}{2}v^2 - Aev. \tag{6}$$

为了简便, 这里 $A = \frac{1}{a+b}$ 表示的是参数。接下来, 我们讨论系统(5)平衡点的分布及性质。

定理 2.1. 当 $A^2c^2 + 4Ae > 0$ 时, 系统(5)有两个平衡点 $E_1\left(\frac{Ac - \sqrt{A^2c^2 + 4Ae}}{2}, 0\right)$ 和 $E_2\left(\frac{Ac + \sqrt{A^2c^2 + 4Ae}}{2}, 0\right)$, 其中 E_1 是鞍点和 E_2 是中心。当 $A^2c^2 + 4Ae = 0$ 时, 系统(5)有唯一的平衡点 $E_3\left(\frac{Ac}{2}, 0\right)$, 这是一个尖点。当 $A^2c^2 + 4Ae < 0$ 时, 系统(5)没有平衡点。

证明: 当 $A^2c^2 + 4Ae > 0$ 时, 计算 $y = 0$ 和 $-v^2 + Acv + Ae = 0$ 直接得到, 系统(5)有两个平衡点 $E_1\left(\frac{Ac - \sqrt{A^2c^2 + 4Ae}}{2}, 0\right)$ 和 $E_2\left(\frac{Ac + \sqrt{A^2c^2 + 4Ae}}{2}, 0\right)$ 。用 $M_i (i = 1, 2, 3)$ 表示系统(5)的在点 $E_i (i = 1, 2, 3)$

Jacobi 矩阵, 有:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{A^2c^2 + 4Ae} & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{A^2c^2 + 4Ae} & 0 \end{bmatrix}.$$

不难验证他们的行列式为:

$$\det M_1 = -\sqrt{A^2c^2 + 4Ae} < 0,$$

$$\det M_2 = \sqrt{A^2c^2 + 4Ae} > 0.$$

根据平面动力系统的理论[19] [20] [21]和 Hamilton 系统的性质[20], 得到平衡点 E_1 是鞍点, 平衡点 E_2 是中心。

当 $A^2c^2 + 4Ae = 0$ 时, 系统(5)有唯一的平衡 $E_3\left(\frac{Ac}{2}, 0\right)$ 。其 Jacobi 矩阵是一个幂零矩阵:

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

这表明平衡点 E_3 是退化的。为了进一步讨论 E_3 的类型, 我们做以下同胚变换:

$$\alpha = v - \frac{Ac}{2}, \beta = y,$$

将系统(5)转化成它的标准形式:

$$\begin{cases} \alpha' = \beta, \\ \beta' = -\alpha^2 + \frac{A^2c^2}{4} + Ae. \end{cases}$$

根据微分方程的定性理论[21], 发现 $k = 2$, $b_n = 0$, 这意味着平衡点 E_3 是尖点。

当 $A^2c^2 + 4Ae < 0$ 时, $-v^2 + Acv + Ae = 0$ 无解, 这表明系统(5)没有平衡点。

显然, 超曲面 $\{(a, b, c, e) | A^2c^2 + 4Ae = 0\}$ 将四维参数空间划分为两个不同的区域, 对应的分岔参数集为 $\{(a, b, c, e) | A^2c^2 + 4Ae > 0\}$, $\{(a, b, c, e) | A^2c^2 + 4Ae = 0\}$ 和 $\{(a, b, c, e) | A^2c^2 + 4Ae < 0\}$ 。为了更加直观地说明参数分岔集, 我们将参数固定在 $a = 1$ 和 $b = 0$ 处, 给出一个特殊的分岔边界, 如图 1。

$$L: e = \frac{c^2}{4}$$

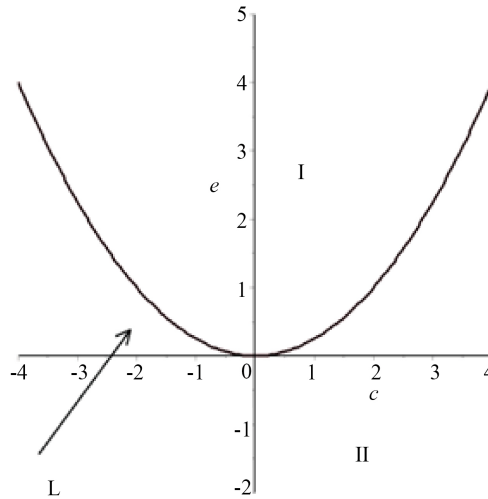


Figure 1. Transition boundary on c - e plane
图 1. c - e 平面上的过渡边界

接下来, 对系统(5)在不同参数集上的相位图进行分析。实际上, Hamilton 系统是由它的势能函数决定的。因此根据能量函数(6), 有如下结果:

Case 1: 当 $A^2c^2 + 4Ae > 0$ 时, 存在一个同宿轨道 γ , 连接鞍点 E_1 。中心 E_2 附近围绕着一族周期轨。同宿轨道 γ 以及所有周期轨都是有界轨道, 周期轨可以被表示为:

$$\Gamma(h) = \{H(v, y) = h, h \in (h(E_2), h(E_1))\},$$

$$h(E_1) = \frac{-A^3c^3 + (A^2c^2 + 4Ae)\sqrt{A^2c^2 + 4Ae} - 6A^2ce}{12},$$

$$h(E_2) = \frac{-A^3c^3 - (A^2c^2 + 4Ae)\sqrt{A^2c^2 + 4Ae} - 6A^2ce}{12}.$$

显然, 鞍点 E_1 的能量比中心 E_2 的能量高, 这使得在周期轨中, 能量越大的周期轨道越靠近同宿轨道 γ 。除同宿轨道 γ 和周期轨道, 系统(5)的其他轨道都是无界轨道, 如图 2(a)。

Case 2: 当 $A^2c^2 + 4Ae = 0$ 时, 系统(5)有两种类型的无界轨道。值得注意的是, 轨道 Π_2^+ 和 Π_2^- 连接着系统(5)的唯一平衡点 E_3 , 更准确的说, 轨道 Π_2^+ 和 Π_2^- 的能量等于尖点 E_3 的能量。而其他轨道虽都是无界的但轨道上都没有平衡点, 如图 2(b)。

Case 3: 当 $A^2c^2 + 4Ae < 0$ 时, 系统(5)只存在一种无界轨道, 如图 2(c)。

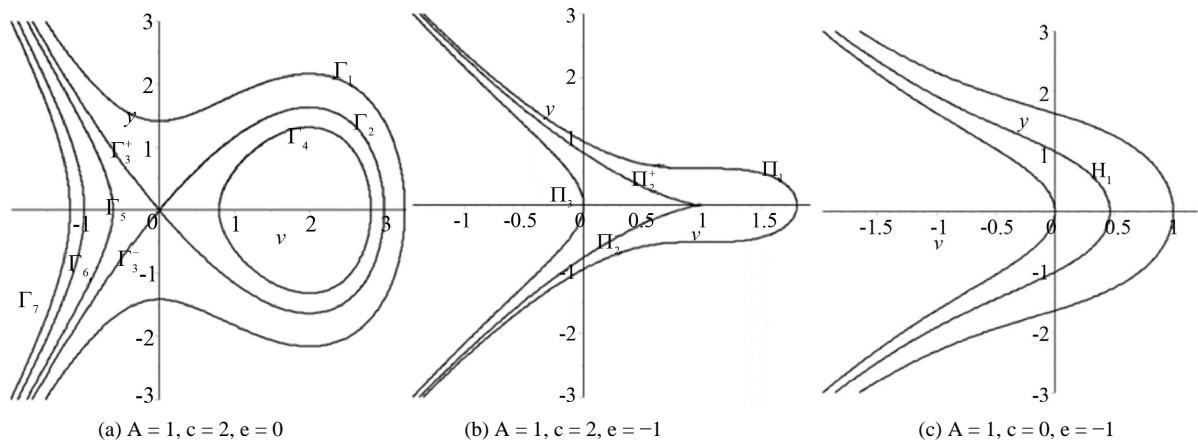


Figure 2. The phase portraits of (5)
图 2. 系统(5)的相图

3. 方程(1)的显式行波解

在本节中，我们力求方程(1)所有显式行波解的表达式。根据能量函数水平来区分系统(5)的每一类轨道以及系统(5)的定义，从而利用椭圆函数积分来求解各类表达式。

3.1. 系统(5)的有界行波解

目前，系统(5)的有界行波解已经得到解决。周期轨对应周期波，同宿轨对应孤立波。周期轨的精确表达式：

$$u_1(\xi) = v_1\xi + \sqrt{6(v_3 - v_1)} \left[E \left(\sqrt{\frac{v_3 - v_1}{6}} \xi \right) + \sqrt{\frac{v_3 - v_2}{v_3 - v_1}} \cdot cd \left(\sqrt{\frac{v_3 - v_1}{6}} \xi \right) \right], \quad -T < \xi < T.$$

同宿轨的精确表达式：

$$u_2(\xi) = v_4\xi - \frac{2\sqrt{6}\sqrt{v_5 - v_4}}{1 + \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{v_5 - v_4}\xi\right)} + C_1, \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad C_1 \text{ 是常数.}$$

3.2. 系统(5)的无界行波解

根据定理(2.1)，我们知道无界行波解分为三种情况。

Case 1: 首先，考虑 $A^2c^2 + 4Ae > 0$ 的情况。这里有 5 种类型的无界情况(I-V)，我们以无界轨道能量由高到低的顺序分析这 5 种类型。

(I) 图 2(a)中的第一种无界轨道，以轨道 Γ_1 为例。其能量高于鞍点 E_1 。它们的任意轨道可以用以下来表示：

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(v_6 - v) \left[v^2 + \left(v_6 - \frac{3Ac}{2} \right) v + \left(v_6^2 - \frac{3Ac}{2} v_6 - 3Ae \right) \right]}$$

其中 v_6 是一个实数，有关系式 $v_6 > \frac{Ac + 2\sqrt{c^2A^2 + 4Ae}}{2}$ ，并且 $-\infty < v < v_6$ 。取 Γ_1 轨道的上半支，给一个初始值 $v(0) = -\infty$ ，得到如下的积分表达式：

$$\int_{-\infty}^v \frac{dv}{\sqrt{2} \sqrt{(v_6 - v) \left[v^2 + \left(v_6 - \frac{3Ac}{2} \right) v + \left(v_6^2 - \frac{3Ac}{2} v_6 - 3Ae \right) \right]}} = \int_0^\xi d\xi, \quad 0 < \xi.$$

根据积分公式:

$$\int_{-\infty}^v \frac{dv}{\sqrt{(v_6 - v) \left[v^2 + \left(v_6 - \frac{3Ac}{2} \right) v + \left(v_6^2 - \frac{3Ac}{2} v_6 - 3Ae \right) \right]}} = g \cdot cn^{-1} \left(\frac{v_6 - B - v}{v_6 + B - v}, k \right)$$

这里 $B^2 = 3(v_6^2 - Acv_6 - Ae)$, $g = \frac{1}{\sqrt{B}}$, $k^2 = \frac{4B - 3Ac + 6v_6}{8B}$, 计算得出系统(5)第一种行波解的精确表达式:

$$v^{(1)}(\xi) = v_6 + \sqrt{3(v_6^2 - Acv_6 - Ae)} - \frac{2\sqrt{3(v_6^2 - Acv_6 - Ae)}}{1 - cn \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{v_6^2 - Acv_6 - Ae} \xi \right)}, \quad 0 < \xi < \xi_1.$$

其中 $\xi_1 = \frac{4}{\sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{v_6^2 - Acv_6 - Ae}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{4\sqrt{3}(v_6^2 - Acv_6 - Ae) - 3Ac + 6v_6}{8\sqrt{3}(v_6^2 - Acv_6 - Ae)} \cdot \sin^2 \theta}}$.

根据系统(4), 为了到方程(1)的行波解, 我们需要对上述表达式再一次积分. 利用椭圆函数积分公式:

$$\int \frac{du}{1 - cn(u)} = u - E(u) - \frac{sn(u) \cdot dn(u)}{1 - cn(u)}$$

最终得到方程(1)的第一种类行波解形式如下:

$$u^{(1)}(\xi) = \left(v_6 - \sqrt{3(v_6^2 - Acv_6 - Ae)} \right) \xi + 3 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{v_6^2 - Acv_6 - Ae} \cdot \left[E \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{v_6^2 - Acv_6 - Ae} \xi \right) + \frac{sn \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{v_6^2 - Acv_6 - Ae} \xi \right) \cdot dn \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{v_6^2 - Acv_6 - Ae} \xi \right)}{1 - cn \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{v_6^2 - Acv_6 - Ae} \xi \right)} \right], \quad 0 < \xi < \xi_1$$

当然, 如果选择轨道 Γ_1 的下半支, 同样的取 $v(0) = -\infty$, 采用类似的方法可以求出相应的无界行波解. 可以验证其表达式与 $u^{(1)}(\xi)$ 相同, 这里就不再写出详细的步骤.

(II) 图 2(a) 中的第二种无界轨道 Γ_3^+ 和 Γ_3^- , 其能量等于鞍点 E_1 的能量, 也等于 Γ_2 有界轨道的能量. Γ_3^+ 和 Γ_3^- 轨道可以用以下形式来表示:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} (v_8 - v) \sqrt{v_7 - v}$$

这里 $v_8 = \frac{Ac - \sqrt{A^2 c^2 + 4Ae}}{2}$, $v_7 = \frac{Ac + 2\sqrt{A^2 c^2 + 4Ae}}{2}$, 有关系式 $-\infty < v < v_8 < v_7$. 首先选择 Γ_3^+ 来计算相应的行波解, 因为计算 Γ_3^- 有相同的结果. 取初始值 $v(0) = -\infty$, 得到如下积分表达式:

$$\int_{-\infty}^v \frac{dv}{\sqrt{\frac{2}{3}(v_8 - v)\sqrt{v_7 - v}}} = \int_0^\xi d\xi, \quad \xi > 0.$$

直接计算得到:

$$v^{(2)}(\xi) = v_8 - \frac{4(v_7 - v_8) \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{v_7 - v_8}\xi\right)}{\left[1 - \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{v_7 - v_8}\xi\right)\right]^2}, \quad \xi > 0$$

根据系统(4)的第一个方程, 需要对上述表达式进行再一次的积分, 最后得到方程(1)的第二种无界行波解形式如下:

$$u^{(2)}(\xi) = v_8\xi - \frac{2\sqrt{6}\sqrt{v_7 - v_8}}{1 - \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{v_7 - v_8}\xi\right)}, \quad \xi > 0$$

(III) 图 2(a)中的第三种无界轨道, 以轨道 Γ_5 为例。其能量高于中心 E_2 , 低于鞍点 E_1 的能量, 这意味着在上述一族周期轨中会有一条周期轨的能量等于轨道 Γ_5 的能量。轨道 Γ_5 可以被表示为:

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(v_9 - v)(v_{10} - v)(v_{11} - v)}$$

这里 $-\infty < v < v_{11} < v_8 < v_{10} < v_9 < v_7$ 。和(I)类似, 选择 Γ_5 上支的轨道, 取初始值 $v(0) = -\infty$, 得到如下积分表达式:

$$\int_{-\infty}^v \frac{dv}{\sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{(v_9 - v)(v_{10} - v)(v_{11} - v)}}} = \int_0^\xi d\xi, \quad \xi > 0,$$

根据椭圆函数积分公式:

$$\int_{-\infty}^v \frac{dv}{\sqrt{(v_9 - v)(v_{10} - v)(v_{11} - v)}} = g \cdot \operatorname{sn}^{-1}\left(\sqrt{\frac{v_9 - v_{11}}{v_9 - v}}, k\right),$$

这里 $g = \frac{2}{\sqrt{v_9 - v_{11}}}$, $k^2 = \frac{v_9 - v_{10}}{v_9 - v_{11}}$ 。得到系统(5)的第三种无界行波解:

$$v^{(3)}(\xi) = v_9 - \frac{v_9 - v_{11}}{\operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\frac{v_9 - v_{11}}{6}} \cdot \xi\right)}, \quad 0 < \xi < \xi_2$$

其中 $\xi_2 = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{v_9 - v_{11}}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{v_9 - v_{10}}{v_9 - v_{11}} \cdot \sin^2 \theta}}$ 。

同样的, 为了得到方程(1)的行波解, 根据系统(4)的第一个方程, 需要对上式再一次积分。这里会使用到椭圆函数积分公式:

$$\int \frac{du}{sn^2(u)} = \int ns^2(u) du = u - E(u) - dn(u) \cdot cs(u),$$

最后得到方程(1)的第三种无界行波解精确表达式:

$$u^{(3)}(\xi) = v_{11}\xi + \sqrt{6(v_9 - v_{11})} \left[E\left(\sqrt{\frac{v_9 - v_{11}}{6}} \cdot \xi\right) + dn\left(\sqrt{\frac{v_9 - v_{11}}{6}} \cdot \xi\right) \cdot cs\left(\sqrt{\frac{v_9 - v_{11}}{6}} \cdot \xi\right) \right], \quad 0 < \xi < \xi_2$$

(IV) 图 2(a)中的第四种无界轨道, 以 Γ_6 为例, 该种类型轨道的能量等于中心 E_1 的能量。轨道 Γ_6 表示为如下:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}(v_{12} - v)\sqrt{(v_{13} - v)},$$

这里 $v_{12} = \frac{Ac + \sqrt{A^2c^2 + 4Ae}}{2}$, $v_{13} = \frac{Ac - 2\sqrt{A^2c^2 + 4Ae}}{2}$, 有关系式 $-\infty < v < v_{13} < v_{12}$, 选择 Γ_6 的上半支, 仍然取初始值为 $v(0) = -\infty$, 有

$$\int_{-\infty}^v \frac{dv}{\sqrt{\frac{2}{3}}(v_{12} - v)\sqrt{(v_{13} - v)}} = \int_0^\xi d\xi,$$

直接计算, 得到系统(5)的第四种无界行波解:

$$v^{(4)}(\xi) = v_{13} - (v_{12} - v_{13}) \cot^2\left(\sqrt{\frac{v_{12} - v_{13}}{6}} \xi\right), \quad 0 < \xi < \xi_3,$$

这里 $\xi_3 = \sqrt{\frac{6}{v_{12} - v_{13}}} \cdot \pi$ 。再一次积分, 计算得到方程(1)的第四种无界行波解形式如下:

$$u^{(6)}(\xi) = v_{12}\xi + \sqrt{6(v_{12} - v_{13})} \cot\left(\sqrt{\frac{v_{12} - v_{13}}{6}} \xi\right) + C_2, \quad 0 < \xi < \xi_3, \quad C_2 \text{ 是常数}$$

(V) 图 2(a)中的第五种无界轨道, 以 Γ_7 为例, 该种类型轨道能量低于中心 E_2 的能量。其轨道可以被表示为:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(v_{14} - v) \left[v^2 + \left(v_{14} - \frac{3Ac}{2}\right)v + \left(v_{14}^2 - \frac{3Ac}{2}v_{14} - 3Ae\right) \right]},$$

在这里有关系式 $-\infty < v < v_{14} < \frac{Ac - 2\sqrt{A^2c^2 + 4Ae}}{2}$, 仍然选择初始值 $v(0) = -\infty$, 取轨道 Γ_7 上半支, 有以下积分表达式:

$$\int_{-\infty}^v \frac{dv}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(v_{14} - v) \left[v^2 + \left(v_{14} - \frac{3Ac}{2}\right)v + \left(v_{14}^2 - \frac{3Ac}{2}v_{14} - 3Ae\right) \right]}} = \int_0^\xi d\xi$$

和(I)有类似的计算, 直接给出系统(5)的第五种无界解表达式:

$$v^{(5)}(\xi) = v_{14} + \sqrt{3(v_{14}^2 - Acv_{14} - Ae)} - \frac{2\sqrt{3(v_{14}^2 - Acv_{14} - Ae)}}{1 - cn\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(v_{14}^2 - Acv_{14} - Ae)\right)}, \quad 0 < \xi < \xi_4.$$

$$\text{这里 } \xi_4 = \frac{4}{\sqrt[4]{\frac{4}{3}(v_{14}^2 - Acv_{14} - Ae)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\sqrt[4]{3(v_{14}^2 - Acv_{14} - Ae)} - 3Ac + 6v_{14}}{8\sqrt[4]{3(v_{14}^2 - Acv_{14} - Ae)}} \cdot \sin^2 \theta}}.$$

最后，方程(1)的第五种无界解的精确形式如下：

$$u^{(5)}(\xi) = \left(v_{14} - \sqrt{3(v_{14}^2 - Acv_{14} - Ae)} \right) \xi + 3 \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{3}(v_{14}^2 - Acv_{14} - Ae)} \cdot \left[\frac{E \left(\sqrt[4]{\frac{4}{3}(v_{14}^2 - Acv_{14} - Ae)} \xi \right) + \frac{sn \left(\sqrt[4]{\frac{4}{3}(v_{14}^2 - Acv_{14} - Ae)} \xi \right) \cdot dn \left(\sqrt[4]{\frac{4}{3}(v_{14}^2 - Acv_{14} - Ae)} \xi \right)}{1 - cn \left(\sqrt[4]{\frac{4}{3}(v_{14}^2 - Acv_{14} - Ae)} \xi \right)} \right], \quad 0 < \xi < \xi_4.$$

Case 2: 接着，考虑 $A^2c^2 + 4Ae = 0$ 的情况。有 2 种类型的无界行波解情况(VI)~(VII)。

(VI) 图 2(b)中的第一种无界轨道 Π_2^+ 和 Π_2^- ，其能量等于平衡点 E_3 的能量。轨道 Π_2^+ 和 Π_2^- 表示为：

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{Ac}{2} - v \right)} \sqrt{\frac{Ac}{2} - v},$$

有关系式 $-\infty < v < \frac{Ac}{2}$ ，这里选择计算 Π_2^+ 所对应的行波解，因为 Π_2^- 对应的行波解是一样的表达式。

取初始值 $v(0) = -\infty$ ，有：

$$\int_{-\infty}^v \frac{dv}{\sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{Ac}{2} - v \right)} \sqrt{\frac{Ac}{2} - v}} = \int_0^\xi d\xi, \quad \xi > 0,$$

直接计算，得到系统(5)的第六种类型无界行波解：

$$v^{(6)}(\xi) = \frac{Ac}{2} - \frac{6}{\xi^2}, \quad \xi > 0,$$

最后，得到方程(1)的第六种无界行波解形式如下：

$$u^{(6)} = \frac{Ac}{2} \xi + \frac{6}{\xi} + C_4, \quad \xi > 0, \quad C_4 \text{ 常数}$$

(VII) 考虑图 2(b)中的另一种无界轨道 Π_1 或 Π_3 ，其不等于能量等于尖点 E_3 。任意一个轨道可被表示为：

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(v_{15} - v) \left[v^2 + \left(v_{15} - \frac{3Ac}{2} \right) v + \left(v_{15}^2 - \frac{3Ac}{2} v_{15} - \frac{3A^2c^2}{4} \right) \right]},$$

在这里 $-\infty < v < v_{15}$ ，注意 $v_{15} \neq \frac{Ac}{2}$ 。仍然取初始值 $v(0) = -\infty$ ，取轨道上半支，有：

$$\int_{-\infty}^v \frac{dv}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(v_{15} - v) \left[v^2 + \left(v_{15} - \frac{3Ac}{2} \right) v + \left(v_{15}^2 - \frac{3Ac}{2} v_{15} - \frac{3A^2c^2}{4} \right) \right]}} = \int_0^\xi d\xi, \quad \xi > 0$$

根据椭圆函数积分公式：

$$\int_{-\infty}^v \frac{dv}{\sqrt{(v_{15} - v) \left[v^2 + \left(v_{15} - \frac{3Ac}{2} \right) v + \left(v_{15}^2 - \frac{3Ac}{2} v_{15} - \frac{3A^2c^2}{4} \right) \right]}} = g \cdot cn^{-1} \left(\frac{v_{15} - D - v}{v_{15} + D - v}, k \right)$$

其中 $D^2 = 3v_{15}^2 - 3Acv_{15} - \frac{3A^2c^2}{4}$, $g = \frac{1}{\sqrt{D}}$, $k^2 = \frac{4D + 6v_{15} - 3Ac}{8D}$ 。

得到系统(5)的第七种类型无界行波解:

$$v^{(8)}(\xi) = v_{15} + \sqrt{3v_{15}^2 - 3Acv_{15} - \frac{3A^2c^2}{4}} + \frac{2\sqrt{3v_{15}^2 - 3Acv_{15} - \frac{3A^2c^2}{4}}}{cn\left(\sqrt{\frac{4}{3}\left(v_{15}^2 - Acv_{15} - \frac{A^2c^2}{4}\right)}\xi\right) - 1}, \quad 0 < \xi < \xi_5,$$

$$\text{其中 } \xi_5 = \frac{4}{\sqrt{\frac{4}{3}\left(v_{15}^2 - Acv_{15} - \frac{A^2c^2}{4}\right)}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{4\sqrt{3v_{15}^2 - 3Acv_{15} - \frac{3A^2c^2}{4}} + 6v_{15} - 3Ac}}{\sqrt{8\sqrt{3v_{15}^2 - 3Acv_{15} - \frac{3A^2c^2}{4}}}}}}.$$

再对上式进行一次积分, 最终得到方程(1)的第七种无界行波表达式如下:

$$u^{(7)}(\xi) = \left(v_{15} - \sqrt{3v_{15}^2 - 3Acv_{15} - \frac{3A^2c^2}{4}} \right) \xi + 3 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}\left(v_{15}^2 - Acv_{15} - \frac{A^2c^2}{4}\right)} \cdot \left[E\left(\sqrt{\frac{4}{3}\left(v_{15}^2 - Acv_{15} - \frac{A^2c^2}{4}\right)}\xi\right) + \frac{sn\left(\sqrt{\frac{4}{3}\left(v_{15}^2 - Acv_{15} - \frac{A^2c^2}{4}\right)}\xi\right) \cdot dn\left(\sqrt{\frac{4}{3}\left(v_{15}^2 - Acv_{15} - \frac{A^2c^2}{4}\right)}\xi\right)}{1 - cn\left(\sqrt{\frac{4}{3}\left(v_{15}^2 - Acv_{15} - \frac{A^2c^2}{4}\right)}\xi\right)} \right], \quad 0 < \xi < \xi_5.$$

Case 3: 最后, 考虑 $A^2c^2 + 4Ae < 0$ 的情况。

(VIII) 由于这种情况下没有平衡点, 我们将所有轨道归为一类。任意一个轨道的表达式为:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(v_{16} - v) \left[v^2 + \left(v_{16} - \frac{3Ac}{2} \right) v + \left(v_{16}^2 - \frac{3Ac}{2} v_{16} - 3Ae \right) \right]},$$

这里 v_{16} 是任意实数, 有关系式 $-\infty < v < v_{16}$ 。仍然取初始值 $v(0) = -\infty$, 选取任意轨道的上半支, 有积分表达式:

$$\int_{-\infty}^v \frac{dv}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(v_{16} - v) \left[v^2 + \left(v_{16} - \frac{3Ac}{2} \right) v + \left(v_{16}^2 - \frac{3Ac}{2} v_{16} - 3Ae \right) \right]}} = \int_0^{\xi} d\xi$$

得到 $v^{(8)}(\xi)$ 的表达式后, 再对 $v^{(8)}(\xi)$ 进行一次积分, 和前面的计算类似, 为了简便, 这里直接给出方程(1)的第八种类型无界行波解的精确表达式:

$$u^{(8)}(\xi) = \left(v_{16} - \sqrt{3(v_{16}^2 - Acv_{16} - Ae)} \right) \xi + 3 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}(v_{16}^2 - Acv_{16} - Ae)} \cdot \left[E\left(\sqrt{\frac{4}{3}(v_{16}^2 - Acv_{16} - Ae)}\xi\right) + \frac{sn\left(\sqrt{\frac{4}{3}(v_{16}^2 - Acv_{16} - Ae)}\xi\right) \cdot dn\left(\sqrt{\frac{4}{3}(v_{16}^2 - Acv_{16} - Ae)}\xi\right)}{1 - cn\left(\sqrt{\frac{4}{3}(v_{16}^2 - Acv_{16} - Ae)}\xi\right)} \right], \quad 0 < \xi < \xi_6$$

$$\text{这里 } \xi_6 = \frac{4}{\sqrt[4]{3(v_{16}^2 - Acv_{16} - Ae)}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{4\sqrt{3(v_{16}^2 - Acv_{16} - Ae)} - 3Ac + 6v_{16}}{8\sqrt{3(v_{16}^2 - Acv_{16} - Ae)}} \cdot \sin^2 \theta}} .$$

4. 结论

本文应用动力系统方法研究了(3 + 1)维 CBS 方程的各类行波。该方法可以详细分析行波系统的相空间几何, 得到参数分岔集, 从而明确(3 + 1)维 CBS 方程的所有可能的行波及其存在条件。结果表明, (3 + 1)维 CBS 方程的所有行波解, 可以分为十种类型, 包括有界解和无界解。并可根据各种椭圆函数积分完全计算出它们的精确表达式。封闭式解不仅有助于数值解的验证和解的稳定性分析, 而且有助于理解高维非线性波场的动力学。

参考文献

- [1] Bogoyavlenskii, O.I. (1990) Overturning Solitons in New Two-Dimensional Integrable Equations. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, **34**, 245-259. <https://doi.org/10.1070/IM1990v034n02ABEH000628>
- [2] Bogoyavlenskii, O.I. (1990) Breaking Solitons in 2 + 1-Dimensional Integrable Equations. *Russian Mathematical Surveys*, **45**, 1-86. <https://doi.org/10.1070/RM1990v045n04ABEH002377>
- [3] Li, B. and Chen, Y. (2004) Exact Analytical Solutions of the Generalized Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Equation Using Symbolic Computation. *Czechoslovak Journal of Physics*, **54**, 517-528. <https://doi.org/10.1023/B:CJOP.0000024955.75594.8c>
- [4] Wazwaz, A.M. (2010) The (2 + 1) and (3 + 1)-Dimensional CBS Equations: Multiple Soliton Solutions and Multiple Singular Soliton Solutions. *Zeitschrift für Naturforschung A*, **65**, 173-181. <https://doi.org/10.1515/zna-2010-0304>
- [5] Moatimid, G.M., El-Shiekh, R.M. and Al-Nowehy, A.G. (2013) Exact Solutions for Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Equation Using Symmetry Method. *Applied Mathematics and Computation*, **220**, 455-462. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.06.034>
- [6] Xue, L., Gao, Y.T., Zuo, D.W., Sun, Y.-H. and Yu, X. (2014) Multi-Soliton Solutions and Interaction for a Generalized Variable-Coefficient-Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Equation. *Zeitschrift für Naturforschung A*, **69**, 239-248. <https://doi.org/10.5560/zna.2014-0018>
- [7] Al-Amr, M.O. (2015) Exact Solutions of the Generalized (2 + 1)-Dimensional Nonlinear Evolution Equations via the Modified Simple Equation Method. *Computers & Mathematics with Applications*, **69**, 390-397. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2014.12.011>
- [8] Kaplan, M., Bekir, A. and Akbulut, A. (2016) A Generalized Kudryashov Method to Some Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics. *Nonlinear Dynamics*, **85**, 2843-2850. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-2867-1>
- [9] Saleh, R., Kassem, M. and Mabrouk, S. (2017) Exact Solutions of Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Equation Using the Singular Manifold Method after Lie Reductions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **40**, 5851-5862. <https://doi.org/10.1002/mma.4435>
- [10] Katzengruber, B., Krupa, M. and Szmolyan, P. (2000) Bifurcation of Traveling Waves in Extrinsic Semiconductors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **144**, 1-19. [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(00\)00030-0](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(00)00030-0)
- [11] Li, J.B. and Dai, H.H. (2007) On the Study of Singular Nonlinear Traveling Wave Equation: Dynamical System Approach. Science Press, Beijing.
- [12] Chow, S.N. and Hale, J.K. (1982) *Methods of Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York.
- [13] Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1982) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York.
- [14] Liu, Z.R. and Tang, H. (2010) Explicit Periodic Wave Solutions and Their Bifurcations for Generalized Camassa-Holm Equation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **20**, 2507-2519. <https://doi.org/10.1142/S0218127410027131>
- [15] Li, J.B. and Chen, G.R. (2013) Bifurcations of Traveling Wave Solutions in a Microstructured Solid Model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **23**, Article ID: 1350009. <https://doi.org/10.1142/S0218127413500090>
- [16] Li, J.B. (2014) Bifurcations and Exact Travelling Wave Solutions of the Generalized Two-Component Hunter-Saxton

-
- System. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, **19**, 1719-1729. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2014.19.1719>
- [17] Li, J.B. and Chen, F.J. (2015) Exact Traveling Wave Solutions and Bifurcations of the Dual Ito Equation. *Nonlinear Dynamics*, **82**, 1537-1550. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2259-y>
- [18] Zhou, Y.Q. and Liu, Q. (2016) Reduction and Bifurcation of Traveling Waves of the KdV-Burgers-Kuramoto Equation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, **21**, 2057-2071. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2016036>
- [19] Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1983) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*. Springer, New York.
- [20] Chow, S.N. and Hale, J.K. (2012) *Methods of Bifurcation Theory*. Springer Science & Business Media, New York.
- [21] Zhang, Z.F., Ding, T.R., Huang, W.Z. and Dong, Z.X. (1992) *Qualitative Theory of Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence.