Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(8), 2816-2821
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.108293

Sperner定理在压缩滤子上的推广研究

刘相芯，尚 宇

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连
Email: xiangxinlxxx@sina.com, 3408054544@qq.com

收稿日期：2021年7月16日；录用日期：2021年8月5日；发布日期：2021年8月19日

摘 要

令 B_n 为 $[n]=\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有子集按包含关系构成的偏序集。Sperner定理说明 B_n 中最大的Sperner集族的密度为 $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \Big/ 2^n$。本文研究Sperner定理在凸集上的推广，并证明Sperner定理在压缩滤子上成立。

关键词

Sperner集族，凸集，理想，滤子，压缩滤子

Extension Research of Sperner’s Theorem on Compressed Filters

Xiangxin Liu, Yu Shang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: xiangxinlxxx@sina.com, 3408054544@qq.com

Received: Jul. 16th, 2021; accepted: Aug. 5th, 2021; published: Aug. 19th, 2021

Abstract

Let $[n]=\{1,2,\cdots,n\}$ and $\mathrm{B}_n=\{A : A\subseteq[n]\}$. Sperner theorem states that the density of the largest Sperner family in B_n is $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \Big/ 2^n$. Our paper focuses on the extension of Sperner theorem on convex family and proves that Sperner theorem is valid on compressed filters.

文章引用: 刘相芯, 尚宇. Sperner 定理在压缩滤子上的推广研究[J]. 应用数学进展, 2021, 10(8): 2816-2821.
DOI: 10.12677/aam.2021.108293

Keywords

Sperner Family, Convex Family, Ideal, Filter, Compressed Filter

1. 引言

令B_n为$[n]=\{1,2,\cdots,n\}$的所有子集按包含关系构成的偏序集。一个集合$\mathsf{A}\in\mathsf{B}_n$称为Sperner集族，如果对$\forall A,B\in\mathsf{A}$有$A\not\subset B$，且$B\not\subset A$。Sperner的一个著名结果是$\mathsf{B}_n$中最大的Sperner集族的密度为$\binom{n}{\lceil \frac{n}{2}\rceil}\Big/2^n$ [1]。Sperner定理是极值组合理论的核心结果之一，并且它有很多一般化的结果和延伸(详见[2] [3])。

定义1.1 $\mathsf{P}\in\mathsf{B}_n$，对于$\forall A,B\in\mathsf{P}$，若$A\in C\in B$则$C\in\mathsf{P}$，则称$\mathsf{P}$是凸集。

定义1.2 $\mathsf{I}\in\mathsf{B}_n$，对于$\forall A\in\mathsf{I}$，若$B\subseteq A$则$B\in\mathsf{I}$，则称$\mathsf{I}$是理想。

很明显理想一定是凸集。由Sperner定理出发，有Frankl猜想如下，

猜想1.3 [4] 对集合$[n]$上每一个凸集族P，均存在一个Sperner集族$\mathsf{A}\subseteq\mathsf{P}$，有

$$|\mathsf{A}|/|\mathsf{P}|\ge\binom{n}{\lceil \frac{n}{2}\rceil}\Big/2^n .$$

这个猜想已经存在将近40年的时间了，并且到目前为止仍未被证明。很自然的人们开始考虑在理想这个特殊的凸集上猜想是否成立。牟丽丽和王毅给出B_n中压缩理想I的最大Sperner集族的密度至少为$\binom{n}{\lceil \frac{n}{2}\rceil}\Big/2^n$ [5]。Dwight Duffus等人给出B_n中所有非空二进制理想D的最大Sperner集族的密度至少为$\binom{n}{\lceil \frac{n}{2}\rceil}\Big/2^n$ [6]。

定义1.4 $\forall A\in\mathsf{F}$，若$A\subseteq B$，则一定有$B\in\mathsf{F}$，那么F称为滤子。

因为滤子也是特殊的凸集，基于这个事实，本文考虑B_n中压缩滤子的最大Sperner集族的密度情况。

定义1.5 序$\preceq$的定义为，对$\forall A,B\in\mathsf{B}_n$，$A\preceq B$当且仅当$A=B$或$\max\left((A\setminus B)\cup(B\setminus A)\right)\in A$。

如$\{2,3,4\}\preceq\{1,2\}$，$\{2,3,4\}\preceq\{1,2,4\}$；$\mathsf{B}_4$在序$\preceq$下的形式如图1。

定义1.6 $\forall\mathsf{A}^{(k)}\subseteq\mathsf{B}_n^{(k)}$，$C\left(\mathsf{A}^{(k)}\right)$是$\mathsf{B}_n^{(k)}$在序$\preceq$下的前$\left|\mathsf{A}^{(k)}\right|$个元素，这里$C$记为压缩算子。其中$\mathsf{B}_n^{(k)}$代表$\mathsf{B}_n$的所有$k$-子集构成的集合，$\mathsf{A}^{(k)}$代表$\mathsf{A}$的所有$k$-子集构成的集合。

那么对$\forall\mathsf{A}\subseteq\mathsf{B}_n$，$\mathsf{A}=\bigcup_{k\in[n]}\mathsf{A}^{(k)}$，$C(\mathsf{A})=\bigcup_{k\in[n]}\left(C\left(\mathsf{A}^{(k)}\right)\right)$。如在$\mathsf{B}_4$中，若

$\mathsf{A}=\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\}\}$，则$C(\mathsf{A})=\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,4\}\}$。

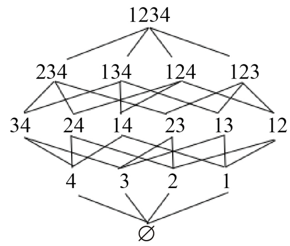

Figure 1. B_4

图 1. B_4

定义 1.7 对滤子F，若有$C\left(\mathsf{F}\cap\mathsf{B}_n^{(k)}\right)=\mathsf{F}\cap\mathsf{B}_n^{(k)}$，$0\le k\le n$，则称$\mathsf{F}$为压缩滤子。很明显$\mathsf{B}_n$是压缩滤子。

在本文中将证明结论如下。

定理 1.8 令F为B_n中的一个压缩滤子，B_n中存在最大 Sperner 集族$\mathsf{A}\in\mathsf{F}$使

$$|\mathsf{A}|/|\mathsf{F}|\ge\binom{n}{\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil}\Big/2^n \tag{1}$$

2. 定理证明

为了证明定理 1.8，还需要知道以下定义及引理。

定义 2.1 A的上阴$\nabla\mathsf{A}$：$\mathsf{A}\subseteq\mathsf{B}_n^{(k)}$，则$\nabla\mathsf{A}=\left\{B\in\mathsf{B}_n^{(k+1)}:\exists A\in\mathsf{A},A\subset B\right\}$，其中$k<n$。

定义 2.2 A的下阴$\Delta\mathsf{A}$：$\mathsf{A}\subseteq\mathsf{B}_n^{(k)}$，则$\Delta\mathsf{A}=\left\{B\in\mathsf{B}_n^{(k-1)}:\exists A\in\mathsf{A},B\subset A\right\}$，其中$k<n$。

引理 2.3 [2] 令$\mathsf{M}\subseteq\mathsf{B}_n^{(k)}$，当$k>\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$时，$|\Delta\mathsf{M}|>|\mathsf{M}|$；$k<\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$时，$|\nabla\mathsf{M}|>|\mathsf{M}|$。

引理 2.4 [7] 令$\mathsf{M}\subseteq\mathsf{B}_n^{(k)}$，那么存在一个$x\ge k$使$|\mathsf{M}|=\binom{x}{k}$且$|\Delta\mathsf{M}|\ge\binom{x}{k-1}$；同样它的对偶情况也成立，即存在一个$x\ge k$使$|\mathsf{M}|=\binom{x}{k}$且$|\nabla\mathsf{M}|\ge\binom{x}{k-1}$。

通常

$$\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

其中$x\in\mathbb{R}^+,k\in\mathbb{Z}^+$。

为了方便证明，令

$$T(n)=\binom{n}{\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil}\Big/2^n$$

容易计算得$T(2n-1)=T(2n);T(2n)/T(2n+1)=(2n+2)/(2n+1)$，因此有下式成立

$$T(1)=T(2)>T(3)=T(4)>\cdots>T(2m-1)=T(2m)>\cdots$$

用归纳假设法来证明定理 1.8。

当 $n=1$ 时显然成立。假设 $n-1$ 时(1)式也成立，现来看 n 时的情况。令 F 为 B_n 中的一个压缩滤子，$\mathsf{F}=\mathsf{F}_1\cup\mathsf{F}_2$，$\mathsf{F}_1=\{A\in\mathsf{F}:n\in A\}$，$\mathsf{F}_2=\{A\in\mathsf{F}:n\notin A\}$，$\mathsf{F}_1(\overline{n})$ 为 $A\setminus\{n\}$ 的所有集合，其中 $A\in\mathsf{F}_1$。由定义知 $\mathsf{F}_1(\overline{n}),\mathsf{F}_2\in\mathsf{B}_{n-1}$，且均为 B_{n-1} 中的压缩滤子。因此由归纳假设在 B_{n-1} 中，存在最大 Sperner 集族 $\mathsf{A}_1(\overline{n})\subseteq\mathsf{F}_1(\overline{n})$ 和 $\mathsf{A}_2\subseteq\mathsf{F}_2$ 有

$$\frac{|\mathsf{A}_1(\overline{n})|}{|\mathsf{F}_1(\overline{n})|}\geq T(n-1),\quad \frac{|\mathsf{A}_2|}{|\mathsf{F}_2|}\geq T(n-1) \tag{2}$$

令 $\mathsf{A}_1=\{A\cup\{n\}:A\in\mathsf{A}_1(\overline{n})\}$，那么 A_1 为 F_1 中最大反链，有

$$\frac{|\mathsf{A}_1|}{|\mathsf{F}_1|}=\frac{|\mathsf{A}_1(\overline{n})|}{|\mathsf{F}_1(\overline{n})|}\geq T(n-1)\geq T(n) \tag{3}$$

其中 $\mathsf{F}_i^{(k)}$ 代表 F_i 在 $\mathsf{B}_n^{(k)}$ 中的所有元素集合，$\mathsf{A}_i^{(k)}$ 代表 A_i 在 $\mathsf{B}_n^{(k)}$ 中的所有元素集合，$i=1,2$。取 $s=\max\{k:\mathsf{A}_1^{(k)}\neq\varnothing\}$，$r=\min\{k:\mathsf{A}_2^{(k)}\neq\varnothing\}$。则由压缩滤子的定义有 $\mathsf{F}_1^{(r)}=\mathsf{B}_{n-1}^{(r-1)}\cup\{n\}$。所以 F_1 可写成如下形式：

$$\mathsf{F}_1=\left(\bigcup_{k=r}^{n}\mathsf{B}_{n-1}^{(k-1)}\cup\{n\}\right)\cup\bigcup_{k<r}\mathsf{F}_1^{(k)} \tag{4}$$

现来证 $r\geq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$。由已知 $\mathsf{A}_2^{(r)}\subseteq\mathsf{B}_{n-1}^{(r)}\subseteq\mathsf{B}_n^{(r)}$，如果则 $r<\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 由引理 2.3 有

$$\left|\nabla\mathsf{A}_2^{(r)}\right|>\left|\mathsf{A}_2^{(r)}\right|$$

用 $\nabla\mathsf{A}_2^{(k)}$ 代替 $\mathsf{A}_2^{(k)}$，可在 F_2 中的到一个比 A_2 更大的 Sperner 集族，与已知矛盾，所以 $r\geq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$。

下面分两种情况证明 F 中存在最大 Sperner 集族 A 使(1)成立。

情况 1：n 为偶数时，令 $n=2m$。则 $r\geq m$，现来证 $s\leq r$。假设 $s>r$，令

$$\overline{\mathsf{A}_1}=\left(\mathsf{A}_1\setminus\left\{\mathsf{A}_1\cap\mathsf{F}_1^{(s)}\right\}\right)\cup\left(\Delta^{(r)}\left(\mathsf{A}_1\cap\mathsf{F}_1^{(s)}\right)\right)$$

其中

$$\Delta^{(r)}\left(\mathsf{A}_1\cap\mathsf{F}_1^{(s)}\right)=\left\{A\in\mathsf{B}_{2m}^{r}:\exists B\in\mathsf{A}_1\cap\mathsf{F}_1^{(s)},A\subset B\right\}$$

由(4)知 $\Delta^{(r)}\left(\mathsf{A}_1\cap\mathsf{F}_1^{(s)}\right)\subset\mathsf{F}_1$ 并且 $\overline{\mathsf{A}_1}$ 在 F_1 中仍是一个 Sperner 集族，由引理 2.3 有

$$\left|\Delta^{(r)}\left(\mathsf{A}_1\cap\mathsf{F}_1^{(s)}\right)\right|>\left|\mathsf{A}_1\cap\mathsf{F}_1^{(s)}\right|$$

即 $\left|\overline{\mathsf{A}_1}\right|>|\mathsf{A}_1|$，这与 A_1 为 F_1 中最大的 Sperner 集族矛盾，所以 $s\leq r$。因此 $\mathsf{A}_1\cup\mathsf{A}_2$ 在 F 中仍是一个 Sperner 集族。由(2)和(3)有

$$\frac{|\mathsf{A}_1\cup\mathsf{A}_2|}{|\mathsf{F}|}=\frac{|\mathsf{A}_1|+|\mathsf{A}_2|}{|\mathsf{F}_1|+|\mathsf{F}_2|}\geq T(2m-1)=T(2m)$$

因此 $\mathsf{A}=\mathsf{A}_1\cup\mathsf{A}_2$ 是 F 中最大的 Sperner 集族。

情况 2：n 为奇数时，令 $n=2m-1$，则 $r\geq m-1$。如果 $r>m-1$，由(4)知与情况 1 类似可得到 $s\leq r$，且 $\mathsf{A}=\mathsf{A}_1\cup\mathsf{A}_2$ 是 F 中最大的 Sperner 集族。如果 $r=m-1$，

$$F_1=\left(\bigcup_{k=r}^{2m-1}B_{2m-2}^{(k-1)}\cup\{2m-1\}\right)\cup\bigcup_{k<m-1}F_1^{(k)}$$

其中 $A_1=B_{2m-2}^{(m-1)}\cup\{2m-1\}$，但这时 $\left(B_{2m-2}^{(m-1)}\cup\{2m-1\}\right)\cup A_2$ 不是一个 Sperner 集族。令

$$\overline{A_2}=\left(A_2\setminus\left\{A_2^{(m-1)}\right\}\right)\cup\left(\nabla\left(A_2^{(m-1)}\right)\right)$$

其中 $\nabla\left(A_2^{(m-1)}\right)$ 是 $A_2^{(m-1)}$ 在 F_2 中的上阴。在 F_2 中 $\overline{A_2}$ 仍是一个 Sperner 集族，那么 $\left(B_{2m-2}^{(m-1)}\cup\{2m-1\}\right)\cup\overline{A_2}$ 在 F 中仍是一个 Sperner 集族。下证

$$\frac{\left|\left(B_{2m-2}^{(m-1)}\cup\{2m-1\}\right)\cup\overline{A_2}\right|}{|F_1|+|F_2|}\geq T(2m-1) \tag{5}$$

这里 $\left|B_{2m-2}^{(m-1)}\cup\{2m-1\}\right|=\binom{2m-2}{m-1}$，即证

$$\frac{\left|\binom{2m-2}{m-1}\right|+\left|\overline{A_2}\right|}{|F_1|+|F_2|}\geq\binom{2m-1}{m}\Big/2^{2m-1}$$

整理有

$$2^{2m-1}\binom{2m-2}{m-1}+2^{2m-1}\left|\overline{A_2}\right|\geq\binom{2m-1}{m}\left(|F_1|+|F_2|\right)$$

因为 $\max|F_1|=2^{2m-2}$，所以可转化为证

$$2^{2m-1}\binom{2m-2}{m-1}+2^{2m-1}\left|\overline{A_2}\right|\geq 2^{2m-2}\binom{2m-1}{m}+\binom{2m-1}{m}|F_2|$$

逐步整理如下

$$\frac{2^{2m-1}}{2m}\binom{2m-2}{m-1}+2^{2m-1}\left|\overline{A_2}\right|\geq\binom{2m-1}{m}|F_2|$$

$$\frac{1}{2m}\binom{2m-2}{m-1}+\left|\overline{A_2}\right|\geq\frac{T(2m-1)}{T(2m)}|A_2|$$

$$\binom{2m-2}{m-1}\geq(2m-1)|A_2|-2m\left|\overline{A_2}\right|$$

这里由

$$|A_2|=\left|A_2^{(m-1)}\right|+\sum_{i>m-1}\left|A_2^{(i)}\right|$$

$$\left|\overline{A_2}\right|=\left|\nabla\left(A_2^{(m-1)}\right)\right|+\sum_{i>m-1}\left|A_2^{(i)}\right|$$

我们有

$$\begin{aligned}&(2m-1)|A_2|-2m\left|\overline{A_2}\right|\\&=(2m-1)\left|A_2^{(m-1)}\right|-(2m-1)\left|A_2^{(m-1)}\right|-\sum_{i>m-1}\left|A_2^{(i)}\right|\\&\leq(2m-1)\left|A_2^{(m-1)}\right|-(2m-1)\left|A_2^{(m-1)}\right|\end{aligned}$$

因此证(5)式转化为证

$$\binom{2m-2}{m-1} \geq (2m-1)\left|\mathsf{A}_2^{(m-1)}\right| - 2m\left|\nabla\left(\mathsf{A}_2^{(m-1)}\right)\right| \tag{6}$$

由 $\mathsf{A}_2^{(m-1)} \subseteq \mathsf{F}_2^{(m-1)} \subseteq \mathsf{B}_{2m-2}^{(m-1)}$，假设

$$\left|\mathsf{A}_2^{(m-1)}\right| = \binom{x}{m-1}$$

其中 $m-1 \leq x \leq 2m-2$，那么由引理 2.4 有

$$\left|\nabla\left(\mathsf{A}_2^{(m-1)}\right)\right| \geq \binom{x}{m-2}$$

那么

$$\begin{aligned}
&(2m-1)\left|\mathsf{A}_2^{(m-1)}\right| - 2m\left|\nabla\left(\mathsf{A}_2^{(m-1)}\right)\right| \\
&\leq (2m-1)\binom{x}{m-1} - 2m\binom{x}{m-2} \\
&= \left((2m-1)\cdot\frac{x-m+2}{m-1} - 2m\right)\binom{x}{m-2} \\
&\leq \left((2m-1)\cdot\frac{2m-2-m+2}{m-1} - 2m\right)\binom{2m-2}{m-2} \\
&= \frac{m}{m-1}\binom{2m-2}{m-2} = \binom{2m-2}{m-1}
\end{aligned}$$

由此(6)式得证，综上定理 1.8 证毕。 □

3. 结论

B_n 中压缩滤子 F 的 Sperner 集族的密度至少为 $\binom{n}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \Big/ 2^n$。

参考文献

[1] Sperner, E. (1928) Ein Satzüber Untermengen einer endlichen Menge. *Mathematische Zeitschrift*, **27**, 544-548. https://doi.org/10.1007/BF01171114

[2] Anderson, I. (1987) Combinatorics of Finite Sets. Clarendon Press, Oxford.

[3] Engel, K. (1997) Sperner Theory. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511574719

[4] Frankl, P. and Akiyama, J. (1987) Modern Combinatorics. Kyoritsu, Tokyo.

[5] Mu, L., Wang, Y. and Zhang, B. (2014) A Generalization of Sperner's Theorem for Convex Family. *Journal of Combinatorics and Number Theory*, **6**, 183-189.

[6] Duffus, D., Howard, D. and Leader, I. (2019) The Width of Downsets. *European Journal of Combinatorics*, **79**, 46-59. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2018.11.005

[7] Lovász, L. (1979) Combinatorial Problems and Exercises. North-Holland, Amsterdam.