

过指定顶点的四次B样条曲线及其应用

白根柱^{1,2}

¹浙江长征职业技术学院基础部, 浙江 杭州

²内蒙古民族大学数理学院, 内蒙古 通辽

Email: bgz049@163.com

收稿日期: 2021年7月4日; 录用日期: 2021年7月23日; 发布日期: 2021年8月9日

摘要

本文构造了插值给定点序列 $P_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ 指定点且与始末两边相切的四次B样条曲线, 并以此四次B样条曲线为轴线的管道光滑拼接了轴线异面圆管道。该方法相较于三段连续的三次均匀B样条曲线为轴线的管道、插值于始末端点两段连续的三次均匀B样条曲线为轴线的管道、插值于两端点并与控制多边形的始末边相切的三次有理B样条曲线为轴线的管道, 具有容易构造等特点。具有理论意义和应用价值。

关键词

B样条, 光滑拼接, 轴线异面, 圆管道

Quadratic B-Spline Curve of Passing Appointed Vertexes and Its Application

Genzhu Bai^{1,2}

¹Basis Department, Zhejiang Changzheng Vocational & Technical College, Hangzhou Zhejiang

²College of Mathematics and Physics, Inner Mongolia University for the Nationalities, Tongliao Inner Mongolia

Email: bgz049@163.com

Received: Jul. 4th, 2021; accepted: Jul. 23rd, 2021; published: Aug. 9th, 2021

Abstract

In this paper, we construct a quartic B-spline curve that is interpolated to the appointed vertexes of the fixed value point sequence $P_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ and tangent to the start and end points of the control polygon. Circular tubes whose axes are in non-coplanar are smoothly blended by tube take a quartic B-spline curve as its axis. The results show that the method is better than that in which

tubes are smoothly blended between smoothly connected three-segment continuous tubes with cubic uniform B-spline curves as its axis, and tubes are smoothly blended by two-segment continuous tubes whose axis is a cubic uniform B-spline curve interpolated at both the start and end vertexes, and tubes are smoothly blended by tube whose axis is a cubic rational B-spline curve interpolated at both ends and tangent to the start and end edges of the control polygon, which has theoretical significance and application value.

Keywords

B-Spline, Smooth Blending, Non-Coplanar, Circular Tube

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

B 样条方法具有表示与设计自由型曲线的强大功能。但是 B 样条曲线不过特征多边形的始末端点。我们在文[1]中, 对于一段三次 B 样条曲线的控制顶点 V_0, V_1, V_2, V_3 , 在 V_0V_1 的反向延长线上取 V_{-1} , 在 V_2V_3 的延长线上取 V_4 , 构造了过 V_0 和 V_3 的三段连续的三次均匀 B 样条曲线, 并以此三段连续的三次均匀 B 样条曲线为轴线的三段光滑连接的管道光滑拼接了轴线异面管道。在文[2]中, 构造了插值于给定型值点 P_0, P_1, P_2, P_3 的始末点, 且与始末边相切的一段三次有理 B 样条曲线, 并将其应用于轴线异面圆管道拼接。而在文[3]中, 构造了插值于给定型值点 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 的始末点和点 V_2 的两段连续的三次均匀 B 样条曲线, 并将其应用于轴线异面椭圆管道拼接。三种方法各有其优缺点, 三段连续的三次均匀 B 样条曲线为轴线的管道应用于轴线异面管道拼接, 在圆管道的拼接光顺性好, 但是应用于椭圆管道的拼接需要多次调整椭圆管道的走向, 不宜应用; 一段三次均匀有理 B 样条曲线为轴线应用于轴线异面管道拼接取决于权因子的选取, 不适用于椭圆管道的拼接; 插值于三点的两段连续的三次均匀 B 样条曲线应用于轴线异面管道的拼接曲线形状取决于点 P_2 的选取。

本文研究两个轴线异面圆管道用过指定顶点的四次均匀 B 样条曲线为轴线的管道拼接问题。

设

$$\Phi_1 : \begin{cases} x = x_1 + aN_{11} \cos \varphi + aB_{11} \sin \varphi, \\ y = y_1 + b_1s + aN_{12} \cos \varphi + aB_{12} \sin \varphi, \\ z = aN_{13} \cos \varphi + aB_{13} \sin \varphi. \end{cases} \text{ 和 } \Phi_2 : \begin{cases} x = aN_{21} \cos \varphi + aB_{21} \sin \varphi, \\ y = y_2 + aN_{22} \cos \varphi + aB_{22} \sin \varphi, \\ z = z_2 + c_2s + aN_{23} \cos \varphi + aB_{23} \sin \varphi. \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (1)$$

是两个轴线异面的圆管道的参数表示, 其中 a 是两个轴线异面圆管道的半径, $N_i = (N_{i1}, N_{i2}, N_{i3})$, $B_i = (B_{i1}, B_{i2}, B_{i3})$, $i = 1, 2$ 分别是 $s = 0$ 和 $s = 1$ 时的主法矢和副法矢。 L_1 和 L_2 是两个圆管道的轴线, L_1 位于 OXY 平面上与 X 轴相交, L_2 位于 OYZ 平面上与 Y 轴相交。

$$L_1 : \begin{cases} x = x_1 + 0 \cdot s, \\ y = y_1 + b_1s, \\ z = 0 + 0 \cdot s, \end{cases} \text{ 和 } L_2 : \begin{cases} x = 0 + 0 \cdot s, \\ y = y_2 + b_2 \cdot s, \\ z = z_2 + c_2s. \end{cases} \quad (2)$$

是 L_1 和 L_2 的参数表示。

2. 过指定顶点的四次均匀 B 样条曲线

假设轴线异面管道轴线 L_1 和 L_2 是异面直线, 为了便于表述取 L_1 位于空间直角坐标系 XOY 平面内且与 Y 轴平行, L_2 位于 YOZ 平面内且与 Y 轴相交, 取 L_1 上两点 P_0 和 P_1 , L_2 上的两点 P_3 和 P_4 , 适当选取 P_2 , 构成 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 型值点序列。

定义 1 设

$$r_i(s) = \sum_{j=0}^4 N_{j,4}(s) V_{i+j} \quad (3)$$

是四次均匀 B 样条曲线段。其中 $N_{0,4}(s), N_{1,4}(s), N_{2,4}(s), N_{3,4}(s), N_{4,4}(s)$ 为四次均匀 B 样条基

$$V_i, V_{i+1}, V_{i+2}, V_{i+3}, V_{i+4}$$

为特征多边形的顶点。

构造插值于 P_0, P_2, P_4 , 并在 P_0 处与 P_0P_1 相切, 在 P_4 处与 P_3P_4 相切的四次均匀 B 样条曲线段, 需满足:

$$\begin{cases} \frac{1}{24}V_0 + \frac{11}{24}V_1 + \frac{11}{24}V_2 + \frac{1}{24}V_3 = P_0, \\ N_{0,4}(a)V_0 + N_{1,4}(a)V_1 + N_{2,4}(a)V_2 + N_{3,4}(a)V_3 + N_{4,4}(a)V_4 = P_2, \\ \frac{1}{24}V_1 + \frac{11}{24}V_2 + \frac{11}{24}V_3 + \frac{1}{24}V_4 = P_4, \\ -\frac{1}{6}V_0 - \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{6}V_3 = P_1 - P_0, \quad a \in (0,1) \\ -\frac{1}{6}V_1 - \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}V_3 + \frac{1}{6}V_4 = P_4 - P_3. \end{cases} \quad (4)$$

反解出 V_0, V_1, V_2, V_3, V_4 , 得到以 V_0, V_1, V_2, V_3, V_4 为控制顶点, 插值于 P_0, P_2, P_4 , 并在 P_0 处与 P_0P_1 相切, 在 P_4 处与 P_3P_4 相切的一段四次均匀 B 样条曲线段

$$r(s) = \sum_{j=0}^4 N_{j,4}(s) V_j \quad (5)$$

这一段四次 B 样条曲线的形状与式(2)中参数 a 的选取和点 P_2 的位置有关。

例 1 设

$$\Phi_1: \begin{cases} x = 5 + \sin \varphi, \\ y = -5 + s, \\ z = \cos \varphi. \end{cases} \quad \text{和} \quad \Phi_2: \begin{cases} x = \sin \varphi, \\ y = 5 + \cos \varphi, \\ z = 6 + s. \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

是两个轴线异面管道, 轴线的参数表达式分别为

$$L_1: \begin{cases} x = 5, \\ y = -5 + s, \\ z = 0. \end{cases} \quad \text{和} \quad L_2: \begin{cases} x = 0, \\ y = 5, \\ z = 6 + s. \end{cases}$$

取 L_1 上两点 $P_0 = (5, -3, 0)$ 和 $P_1 = (0, 5, 0)$, L_2 上的两点 $P_3 = (0, 5, 0)$ 和 $P_4 = (0, 5, 6)$, 当 $a = \frac{1}{2}$ 时

1) 取 $P_2 = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, 1\right)$, 得到一段四次均匀 B 样条曲线

$$\begin{cases} x = \frac{40}{3}s^3 - \frac{50}{3}s^3 - \frac{5}{3}s + 5, \\ y = \frac{50}{3}s^4 - \frac{145}{3}s^3 + \frac{110}{3}s^2 + 5s + 5, \\ z = -20s^4 + 34s^3 - 8s^2. \end{cases}$$

2) 取 $P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$, 得到一段四次均匀 B 样条曲线

$$\begin{cases} x = 10s^3 - 15s^3 + 5, \\ y = 30s^4 - 75s^3 + 50s^2 + 5s - 5, \\ z = -20s^4 + 34s^3 - 8s^2. \end{cases}$$

3) 取 $P_2 = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, 1\right)$, 得到一段四次均匀 B 样条曲线

$$\begin{cases} x = -\frac{40}{3}s^3 + \frac{110}{3}s^3 - \frac{85}{3}s^2 + 5, \\ y = \frac{130}{3}s^4 - \frac{305}{3}s^3 + \frac{190}{3}s^2 + 5s + 5, \\ z = -20s^4 + 34s^3 - 8s^2. \end{cases}$$

三段 B 样条曲线与轴线拼接效果为图 1 所示:

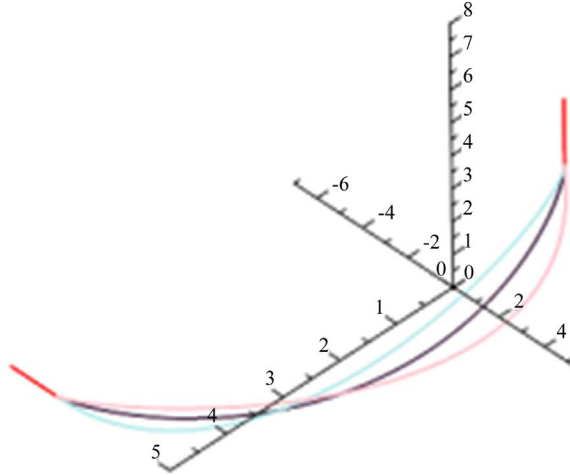


Figure 1. When $a = \frac{1}{2}$, P_2 respectively $P_2 = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, 1\right), P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right), P_2 = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, 1\right)$ for the axis blending effect diagram

图 1. $a = \frac{1}{2}$, P_2 分别为 $P_2 = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, 1\right), P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right), P_2 = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, 1\right)$ 时轴线拼接效果图

例 2 两个轴线异面管道同例 1, 轴线 L_1 上两点 P_0 和 P_1 取 $P_0 = (5, -3, 0), P_1 = (0, 5, 0)$, L_2 上的两点 P_3 和 P_4 取 $P_3 = (0, 5, 0), P_4 = (0, 5, 6)$, 当 $a = \frac{1}{3}$ 时

1) 取 $P_2 = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$, 得到一段四次均匀 B 样条曲线

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{2}s^4 + 25s^3 - \frac{45}{2}s^2 + 5, \\ y = \frac{135}{2}s^4 - 150s^3 + \frac{175}{2}s^2 + 5s - 5, \\ z = -\frac{63}{4}s^4 + \frac{51}{2}s^3 - \frac{15}{4}s^2. \end{cases}$$

2) 取 $P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$, 得到一段四次均匀 B 样条曲线

$$\begin{cases} x = -\frac{195}{8}s^4 + \frac{235}{4}s^3 - \frac{315}{8}s^2 + 5, \\ y = \frac{675}{8}s^4 - \frac{735}{4}s^3 + \frac{835}{8}s^2 + 5s - 5, \\ z = -\frac{9}{4}s^4 - \frac{3}{2}s^3 + \frac{39}{4}s^2. \end{cases}$$

3) 取 $P_2 = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$, 得到一段四次均匀 B 样条曲线

$$\begin{cases} x = -\frac{165}{4}s^4 + \frac{185}{2}s^3 - \frac{225}{4}s^2 + 5, \\ y = \frac{405}{4}s^4 - \frac{435}{2}s^3 + \frac{485}{4}s^2 + 5s - 5, \\ z = \frac{45}{4}s^4 - \frac{57}{2}s^3 + \frac{93}{4}s^2. \end{cases}$$

三段 B 样条曲线与轴线拼接效果为图 2 所示:

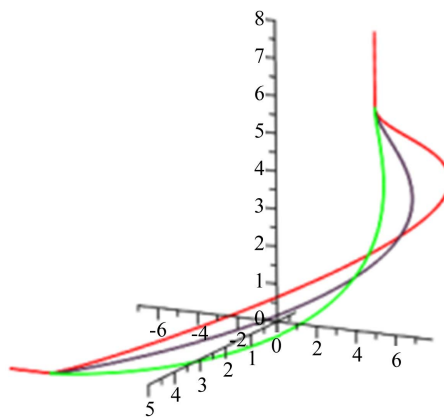


Figure 2. When $a = \frac{1}{3}$, P_2 respectively $P_2 = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, 1\right)$, $P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$, $P_2 = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, 1\right)$ for the axis blending effect diagram

图 2. $a = \frac{1}{3}$, P_2 分别为 $P_2 = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, 1\right)$, $P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$, $P_2 = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, 1\right)$ 时轴线拼接效果图

例 3 两个轴线异面管道同例 1, 轴线 L_1 上两点 P_0 和 P_1 取 $P_0 = (5, -3, 0)$, $P_1 = (0, 5, 0)$, L_2 上的两点 P_3 和 P_4 取 $P_3 = (0, 5, 0)$, $P_4 = (0, 5, 6)$, 当 $a = \frac{2}{3}$ 时

1) 取 $P_2 = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$, 得到一段四次均匀 B 样条曲线

$$\begin{cases} x = \frac{165}{4}s^4 - \frac{145}{2}s^3 + \frac{105}{4}s^2 + 5, \\ y = -\frac{45}{2}s^4 + 30s^3 - \frac{5}{2}s^2 + 5s - 5, \\ z = -\frac{261}{4}s^4 + \frac{249}{2}s^3 - \frac{213}{4}s^2. \end{cases}$$

2) 取 $P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$, 得到一段四次均匀 B 样条曲线

$$\begin{cases} x = \frac{195}{8}s^4 - \frac{155}{4}s^3 + \frac{75}{8}s^2 + 5, \\ y = -\frac{45}{8}s^4 - \frac{15}{4}s^3 + \frac{115}{8}s^2 + 5s - 5, \\ z = -\frac{207}{4}s^4 + \frac{195}{2}s^3 - \frac{159}{4}s^2. \end{cases}$$

3) 取 $P_2 = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$, 得到一段四次均匀 B 样条曲线

$$\begin{cases} x = \frac{15}{2}s^4 - 5s^3 - \frac{15}{2}s^2 + 5, \\ y = \frac{45}{4}s^4 - \frac{75}{2}s^3 + \frac{125}{4}s^2 + 5s - 5, \\ z = -\frac{153}{4}s^4 + \frac{141}{2}s^3 - \frac{105}{4}s^2. \end{cases}$$

三段 B 样条曲线与轴线拼接效果为图 3 所示:

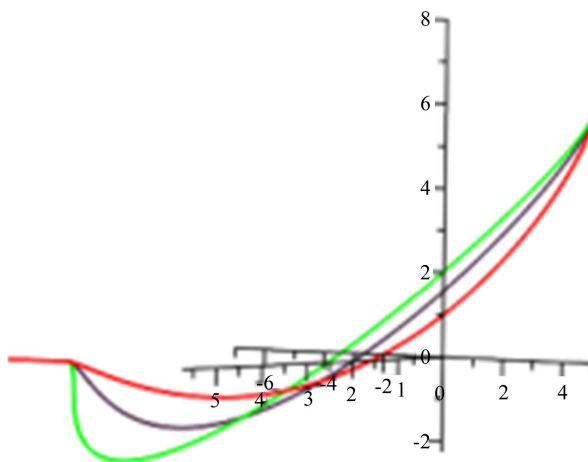


Figure 3. When $a = \frac{2}{3}$, P_2 respectively $P_2 = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right), P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right), P_2 = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ for the axis blending effect diagram

图 3. $a = \frac{2}{3}$, P_2 分别为 $P_2 = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right), P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right), P_2 = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ 时轴线拼接效果图

从以上三个例子可以看出：

1) 参数 a 的取值与点 P_2 的位置有关。

① 例 1 中，当 $a = \frac{1}{2}$ 时，取 $P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$ 时分别与两个轴线拼接的光顺性比较好，而其余两个一端光顺性较好另一端较差。

② 例 2 中，当 $a = \frac{1}{3}$ 时，取 $P_2 = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 时分别与两个轴线拼接的光顺性比较好，而其余两个一端光顺性较好另一端较差。

③ 例 3 中， $a = \frac{2}{3}$ 时，取 $P_2 = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ 时分别与两个轴线拼接的光顺性比较好，而其余两个一端光顺性较好另一端较差。

2) P_2 作为点 P_1 与 P_3 的中间点，应取在线段 P_1P_3 的中间位置与两个轴线异面管道的轴线拼接光滑度较好。在例 1~例 3 中，分别取 $a = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{3}, a = \frac{2}{3}$ 时，显然 $a = \frac{1}{2}$ 时拼接效果较好。

3) P_2 选定后，为了得到更好的拼接效果，还需要调整曲线与控制多边形靠近程度，即适当选取点 P_2 的第三个坐标。

例 4 两个轴线异面管道同例 1，轴线 L_1 上两点 $P_0 = (5, -3, 0)$ 和 $P_1 = (0, 5, 0)$ ， L_2 上的两点 $P_3 = (0, 5, 0)$ 和 $P_4 = (0, 5, 6)$ 。当 $a = \frac{1}{2}$ 时，分别取 $P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right), P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right), P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$ 时，三段 B 样条曲线与轴线拼接效果比较：

1) 取 $P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$ ，得到一段四次均匀 B 样条曲线

$$\begin{cases} x = 10s^3 - 15s^3 + 5, \\ y = 30s^4 - 75s^3 + 50s^2 + 5s - 5, \\ z = -36s^4 + 66s^3 - 24s^2. \end{cases}$$

2) 取 $P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$ ，得到一段四次均匀 B 样条曲线

$$\begin{cases} x = 10s^3 - 15s^3 + 5, \\ y = 30s^4 - 75s^3 + 50s^2 + 5s - 5, \\ z = -20s^4 + 34s^3 - 8s^2. \end{cases}$$

3) 取 $P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$ ，得到一段四次均匀 B 样条曲线

$$\begin{cases} x = 10s^3 - 15s^3 + 5, \\ y = 30s^4 - 75s^3 + 50s^2 + 5s - 5, \\ z = -4s^4 + 2s^3 + 8s^2. \end{cases}$$

三段 B 样条曲线与轴线拼接效果为图 4 所示。

3. 过指定顶点的四次均匀 B 样条曲线及其在轴线异面圆管道拼接中的应用

基于轴线光滑拼接的轴线异面管道拼接方法在[4] [5] [6]中有详细的推导，这里就不再赘述。

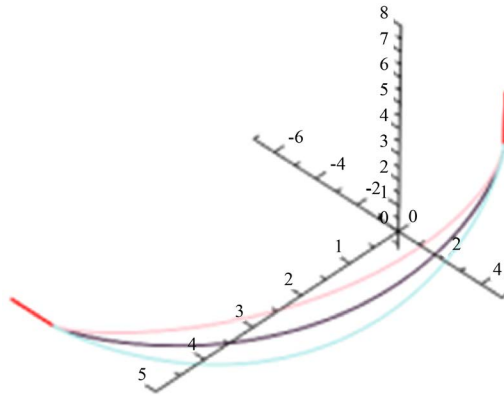


Figure 4. When $a = \frac{1}{2}$, P_2 respectively $P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right), P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right), P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$ for the axis blending effect diagram

图 4. $a = \frac{1}{2}$, P_2 分别为 $P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right), P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right), P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$ 时轴线拼接效果图

例 5 两个轴线异面管道同例 1, 轴线 L_1 上两点 $P_0 = (5, -3, 0)$ 和 $P_1 = (0, 5, 0)$, L_2 上的两点 $P_3 = (0, 5, 0)$ 和 $P_4 = (0, 5, 6)$ 。当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 取 $P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$ 。 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 构成型值点序列, 以插值于 P_0, P_2, P_4 , 并在 P_0 处与 P_0P_1 相切, 在 P_4 处与 P_3P_4 相切的四次均匀 B 样条曲线段为轴线的圆管道的参数表达式为

$$\Phi(s, \varphi) : \begin{cases} x = 10s^3 - 15s^2 + 5 + N_1(s) \cos \varphi + B_1(s) \sin \varphi, \\ y = 30s^4 - 75s^3 + 50s^2 + 5s + 5 + N_2(s) \cos \varphi + B_2(s) \sin \varphi, \\ z = -20s^4 + 34s^3 - 8s^2 + N_3(s) \cos \varphi + B_3(s) \sin \varphi. \end{cases} \quad s \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi]$$

其中 $N = (N_1(s), N_2(s), N_3(s))$ 和 $B = (B_1(s), B_2(s), B_3(s))$ 是光滑拼接两个轴线异面管道轴线的四次均匀 B 样条曲线的主法矢和副法矢。

以四次均匀 B 样条曲线为轴线的管道与两个轴线异面管道拼接效果如下 **图 5**：

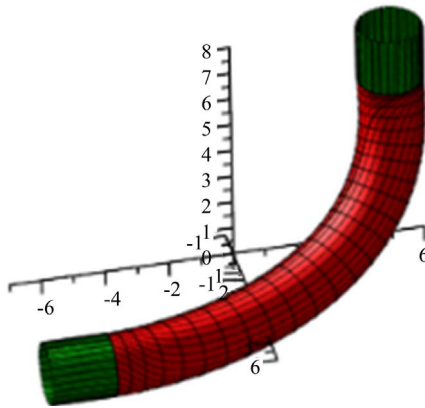


Figure 5. When $a = \frac{1}{2}$, $P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$, effect diagram of circular tubes whose axes are in non-coplaner is smoothly blended by tube take a quartic B-spline curve as its axis

图 5. $a = \frac{1}{2}$, $P_2 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$ 时, 以四次均匀 B 样条曲线为轴线的管道拼接两个轴线异面圆管道拼接效果图

4. 结束语

用插值于指定三顶点的四次均匀 B 样条曲线为轴线的圆管道拼接两个轴线异面圆管道, 相较于两段连续的三次均匀 B 样条曲线为轴线的两段光滑的管道和三段连续的三次均匀 B 样条曲线为轴线的三段光滑的管道拼接两个轴线异面圆管道段数少。但是, 需要优化中间插值点 P_2 的位置和对应参数 s 的选取方法。这种方法不能应用于椭圆管道的拼接。

基金项目

国家自然科学基金项目资助(11561052)。

参考文献

- [1] 白根柱. 基于轴线光滑拼接的轴线异面管道拼接技术[J]. 应用数学进展, 2019, 8(7): 1267-1271.
- [2] 白根柱. 过指定顶点的三次 B 样条曲线及其应用[J]. 应用数学进展, 2020, 9(10): 1821-1828.
- [3] 白根柱. 三次有理 B 样条曲线及其应用[J]. 应用数学进展, 2020, 9(8): 1331-1337.
- [4] Bai, G., Wang, H. and Yin, Z. (2014) Employing Generalized Bezier Tube to Smoothly Blending Tubes Whose Axes are Non-Coplanar. *Applied Mechanics and Materials*, **513-517**, 2301-230. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.513-517.2301>
- [5] Bai, G. and Wu, Z. (2019) Intersection line of Conical Surfaces and Its Application in the Blending of Tubes with Non-Coplanar Axes. *International Journal of Applied Physics and Mathematics*, **9**, 152-157. <https://doi.org/10.17706/ijapm.2019.9.4.152-157>
- [6] Bai, G. and Fang, W. (2019) Application of Quasi-Cubic Bezier Curves in the Blending of Tubes with Different Radiuses, *6th International Conference Advanced Composite Materials and Manufacturing Engineering-2. Engineering Materials and Manufacturing*, Chengdu, 30-31 October, 2019, 1903.