Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(9), 3200-3206**
Published Online September 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.109334

加边对图的弱凸控制数和凸控制数的影响

布帕提曼·艾来提[1*]，边 红[1†]，于海征[2]

[1]新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐
[2]新疆大学数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐
Email: †bh1218@163.com

收稿日期：2021年8月22日；录用日期：2021年9月12日；发布日期：2021年9月24日

摘 要

令 $G=(V,E)$ 是一个连通图。用 $d_G(u,v)$ 表示图 G 中的两个顶点 u 和 v 之间的最短 (u,v) 路的长度，一个长度为 $d_G(u,v)$ 的 (u,v) 路称作一个 (u,v)-测地线。图 G 的一个点子集 $X\subseteq V$ 叫做图 G 的一个弱凸集，如果对 X 中的任意两个顶点 a,b，在图 G 中都存在一个 (a,b)-测地线使得 (a,b)-测地线上的所有顶点都属于 X。类似地，图 G 的一个点子集 $X\subseteq V$ 叫做图 G 的一个凸集，如果对 X 中的任意两个顶点 a,b, 图 G 中的每一条 (a,b)-测地线上的所有顶点都属于 X。图 G 的一个点子集 $D\subseteq V$ 叫做图 G 的一个控制集，如果 V-D 中的每一个顶点都至少有一个邻点在 D 中. V 的点子集 X 称为 G 的弱凸控制集，如果 X 既是弱凸集又是控制集。图 G 的弱凸控制数，是点数最少的弱凸控制集所包含的点数，记为 $\gamma_{wcon}(G)$。图 G 的凸控制集和凸控制数类似定义，用 $\gamma_{con}(G)$ 来表示图 G 的凸控制数。本文主要研究了加边对一些图类的弱凸控制数和凸控制数的影响。

关键词

弱凸控制数，凸控制数，控制数，圈，树

The Influence of the Edge Adding on the Weakly Convex and Convex Domination Number of Graphs

∗ 第一作者。
† 通讯作者。

文章引用: 布帕提曼·艾来提, 边红, 于海征. 加边对图的弱凸控制数和凸控制数的影响[J]. 应用数学进展, 2021, 10(9): 3200-3206. DOI: 10.12677/aam.2021.109334

Bupatiman Ailaiti[1*] **Hong Bian**[1†], **Haizheng Yu**[2]

[1]School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang
[2]College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang
Email: †bh1218@163.com

Received: Aug. 22^{nd}, 2021; accepted: Sep. 12^{th}, 2021; published: Sep. 24^{th}, 2021

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a connected graph. The distance $d_G(u, v)$ between two vertices u and v in a connected graph G is the length of the shortest (u, v) path in G. A (u, v) path of length $d_G(u, v)$ is called *a (u, v)-geodesic*. A set $X \subseteq V$ is called *weakly convex* in G if for every two vertices $a, b \in X$, there exists an (a, b)- geodesic, all of whose vertices belong to X. A set X is *convex* in G if for all $a, b \in X$ all vertices from every (a, b)-geodesic belong to X. A subset D of V is *dominating* in G if every vertex of $V - D$ has at least one neighbour in D. A set $X \subseteq V$ is called *weakly convex dominating set* in G if it is weakly convex and dominating, and called *convex dominating set* in G if it is convex and dominating. The *weakly convex domination number* of a graph G is the minimum cardinality of a weakly convex dominating set of G, while the *convex domination number* of a graph G is the minimum cardinality of a convex dominating set of G, denoted by $\gamma_{wcon}(G)$ and $\gamma_{con}(G)$, respectively. In this paper, we study edge adding and its effect on the weakly convex domination numbers and convex domination numbers for some graphs.

Keywords

Weakly Convex Domination Number, Convex Domination Number, Domination Number, Cycle, Tree

1. 介绍

本文中所考虑的都是简单, 无向连通图. 令 $G=(V,E)$ 是一个简单图. 在 G 中, 点 v 的开邻域定义为 $N_G(v)=\{u|uv\in E(G)\}$, 闭邻域 $N_G[v]=N_G(v)\bigcup\{v\}$, 用 $E(v)$ 表示与点 v 相关联的边的集合. 称图 G 中的点 v 是 *simplicial* 点, 如果 $N_G[v]$ 是一个完全图. 图 G 中的 1 度点称为叶子点, 与 1 度点相邻的点称为支撑点. 令 V_L 和 V_S 分别表示图 G 中叶子点和支撑点的集合, 且 $n_L=|V_L|$. 图 G 中的点 v 称为 G 的割点, 如果 $G-\{v\}$ 是不连通的. 令 V_C 表示 G 中割点的集合.

图 G 的一个点子集 D 称为图 G 的控制集, 如果在 V-D 中的每个点至少与 D 中的一个点相邻. 图 G 中阶数最小的控制集所包含的点数称为图 G 的控制数, 记为 $\gamma(G)$. 基于现实生活中的应用, 人们逐步引入了一些不同形式的控制集. 控制集及其变形广泛地应用于设备选址问题、监测通信或电力网络、计算机网络问题和土地测量中出现的实际问题等. 图 G 的一个点子集 D 称为图 G 的连通控制集, 如果 D 是控制集并且 D 的导出子图是连通的. 图 G 中阶数最小的连通控制集所包含的点数称为图 G 的连通控制数, 记为 $\gamma_c(G)$. 用 $d_G(u,v)$ 表示图 G 中的两个顶点 u 和 v 之间的最短 (u,v) 路的长度, 一个长度为 $d_G(u,v)$ 的 (u,v) 路称作一个 (u,v)-测地线. 图 G 的一个点子集 $X\subseteq V$ 叫做图 G 的一个弱凸集, 如果对 X 中的任意两个顶点 a,b,在图 G 中都存在一个 (a,b)-测地线使得 (a,b)-测地线上的所有顶点都属于 X. 类似地, 图 G 的一个点子集 $X\subseteq V$ 叫做图 G 的一个凸集, 如果对 X 中的任意两个顶点 a,b, 图 G 中的每一条 (a,b)-测地线上的所有顶点都属于 X. 图 G 的点子集 X 称为 G 的弱凸控制集, 如果 X 既是弱凸集又是控制集. 图 G 的点子集 X 称为 G 的凸控制集, 如果 X 既是凸集又是控制集. 图 G 的弱凸控制数, 是点数最少的弱凸控制集所包含的点数, 记为 $\gamma_{wcon}(G)$. 图 G 的凸控制数和弱凸控制数类似定义, 用 $\gamma_{con}(G)$ 来表示图 G 的凸控制数.

凸控制数和弱凸控制数最早是由 Topp [1]提出的, 他保证通过控制集的节点的连接是最短的, 改进了连通控制在通信网络设计中的应用. 在 2004 年, Lemańska [2] 研究了弱凸控制和凸控制与其它控制类参数之间关系; 特别地, 研究了凸控制数和连通控制数相等的三正则图. 同在 2004 年, Raczek [3]证明了确定一个图的弱凸控制集和凸控制集是一个 NP-完全问题. 在 2010 年, Raczek 和 Lemańska [4] 研究了环面的弱凸控制数和凸控数, 并给出了一些特殊环面的凸控制数和弱凸控制数的确切值. 同一年 Lemańska [5] 给出了一个图的弱凸控制数的 Nordhaus-Gaddum 结果. 在 2019 年, Rosicka [6] 根据一个图 $G=(V,E)$ 和图 G 的顶点集 V 的一个置换 π,定义了一类棱柱图 πG,首先对这类棱柱图的凸控制集和弱凸控制集的性质作了比较; 其次, 给出两类特殊棱柱图的刻画; 最后, 证明了原图 G 与对应的棱柱图的弱凸控制数的差可以是任意大; 而棱柱图的凸控制数无法用原图 G 的凸控制数来界定. 同在 2019 年, Lemańska [7] 等人首先研究了弱凸控制数和连通控制数之间的关系, 并给出了满足 $\gamma_{wcon}(G)$=$\gamma_c(G)$ 的图 G 的刻画; 还证明了在一般情形下, 图的连通控制数与弱凸控制数的差可以任意大; 此外, 还研究了去边对弱凸控制数的影响. 文献 [8] 中研究了加边或去边对图的边控制数的影响.

本文在已有研究结果的基础上, 主要研究了加边对一些图类的弱凸控制数和凸控制数的影响.

2. 主要结果

令 G 是一个顶点数为 n 的简单图, $g(G)$ 代表图 G 的围长. Lemańska 给出了图 G 的弱凸控制数恰好等于顶点数的图所满足的条件.

定理 1 [5] 若图 G 是满足 $\delta(G) \geq 2$ 且 $g(G) \geq 7$ 的 n 个顶点的连通图, 则

$$\gamma_{wcon}(G) = n.$$

下面的定理 2给出了凸控制数恰好等于顶点数的图 G 所满足的类似条件.

定理 2 若图 G 是满足 $\delta(G) \geq 2$ 且 $g(G) \geq 6$ 的 n 个顶点的连通图, 则

$$\gamma_{con}(G) = n.$$

证明 令图 G 是 $\delta(G) \geq 2$ 且 $g(G) \geq 6$ 的连通图. 假设 $\gamma_{con}(G) < n$. 令 D 是 G 的最小凸控制集. 因为 $\gamma_{con}(G) < n$, 则 G 中存在一个顶点 x 使得 $x \notin D$. 令 $N_G(x) = \{x_1, ..., x_p\}$, 其中 $p \geq 2$ (因为 $\delta(G) \geq 2$). 对于任意的 x_i, x_j, 其中 $1 \leq i, j \leq p$, 都要满足 $x_i x_j \notin E(G)$, 否则 x, x_i, x_j 构造出一个 C_3, 但是这与 $g(G) \geq 6$ 产生矛盾. 注意到对于任意的 x_i, x_j, 其中 $x_i \neq x_j$ 且 $1 \leq i, j \leq p$, 都有 $d_G(x_i, x_j) = 2$, 并且每一对 x_i 和 x_j 之间的最短路都包含 x. 否则, 若在 x_i 和 x_j 之间找到另一条不包含 x 的最短路 $x_i, x^{'}, x_j$, 则 $x_i, x, x_j, x^{'}$ 构成了一个四圈, 这与 $g(G) \geq 6$ 产生矛盾.

假设存在两个点 $x_1, x_2 \in N_G(x)$ 使得 $x_1, x_2 \in D$. 由于 D 是凸集, 而且对于任意的 x_i 和 x_j 之间的每一个最短路都要包含 x, 但是这与 $x \notin D$ 产生矛盾. 因此 $|N_G(x) \cap D| \leq 1$. 因为要控制 x, 且 $|N_G(x) \cap D| \leq 1$, 因此, 不失一般性, 设 $x_1 \in N_G(x) \cap D$. 因为 $\delta(G) \geq 2$, 因此这里至少存在一个属于 $N_G(x)$ 的点 x_i 使得 $x_i \notin D$, 不妨设 x_2. 由于 $\delta(G) \geq 2$ 且 x_2 需要被控制, 因此这里存在一个点 $y \in N_G(x_2)$ 使得 $y \neq x$ 且 $y \in D$. 因为 $g(G) \geq 6$,因此有 $N_G(y) \cap N_G(x) = \emptyset$ 和 $N_G(y) \cap N_G(x_i) = \emptyset$, 其中$1 \leq i \leq p$. 因为 D 是凸集, 因此 $d_G(y, x_1) < 3$ 并且存在 (x_1, y)- 测地线 P_1 使得 P_1 的所有点都属于 D. 因此至少存在两个 (x_1, y)-路: P_1 和 $P_2 = (x_1, x, x_2, y)$ 构造出一个小于 6 的圈. 但这与 $g(G) \geq 6$ 产生矛盾. 综上, 得到$\gamma_{con}(G) = n$.

文献 [7] 给出了图 G 的连通控制集和弱凸控制集中的点所满足的条件.

引理 3 [7] 令 $G \neq K_n$ 是一个连通图, 其中 $n \geq 3$. 如果 D 是 G 的最小的连通或弱凸控制集, 则每个割点都属于 D, 且所有的 *simplicial* 点都不属于 D.

定理 4 [7] 令 $G = (V(G), E(G))$ 是 $g(G) \geq 7$ 的连通图. 则,
(1)$\gamma_{wcon}(G) = n - n_L$, 其中 n 是图 G 的顶点数;
(2)$\gamma_{wcon}(G) = \gamma_c(G)$ 当且仅当对于每个 $u \in V(G)$, u 是叶子点或割点.

令 $\overline{G}$ 代表图 G 的补图. 易知, 对于任意 $e \in E(\overline{G})$ 可以使图 $G + e$ 的控制数最多减少 1, Chen 等人 [9] 证明了加边使得连通控制数最多减少 2. 很自然地问题就是加边是不是也会使得图的弱凸控制数减少？接下来考虑加边对图 C_n 和 T_n 的(弱)凸控制数的影响.

定理 5 令 C_n 是 $n \geq 3$ 的圈, 则对于任意边 $e \in E(\overline{C_n})$, 则有

$$\gamma_{wcon}(C_n) - 4 \leq \gamma_{wcon}(C_n + e) \leq \gamma_{wcon}(C_n).$$

证明 令 $e = uv$. $C_n + e$ 导出有公共边 uv 的两个圈, 不妨用 C_{n_1}, C_{n_2} 表示这两个圈, 其中 $n_1 \leq n_2 <$

n. 令 S_i 是 C_{n_i} 阶数最小的弱凸控制集, $i \in \{1, 2\}$. 根据 n_1 和 n_1 的不同取值分以下四种情形进行讨论：

情形 1 $n_1 \geq 7$, $n_2 \geq 7$. 因为当 $n \geq 7$ 时, $\gamma_{wcon}(C_n) = n$, 因此 $\gamma_{wcon}(C_{n_1}) = n_1$, $\gamma_{wcon}(C_{n_2}) = n_2$. 又因为 $u, v \in S_1 \cap S_2$, 则有 $\gamma_{wcon}(C_n + e) = \gamma_{wcon}(C_n) = n$.

情形 2 $n_1 \in \{4, 5, 6\}$, $n_2 \geq 7$. 因为当 $n \geq 7$ 时, $\gamma_{wcon}(C_n) = n$, 因此 $\gamma_{wcon}(C_{n_2}) = n_2$. 此外, 根据弱凸控制集的定义, 当 $n_1 \in \{4, 5, 6\}$ 时, $\gamma_{wcon}(C_{n_1}) = n_1 - 2$. 又因为 $u, v \in S_1 \cap S_2$, 因此 $\gamma_{wcon}(C_n + e) = n - 2$. 因为 $n_1 \in \{4, 5, 6\}$, $n_2 \geq 7$, 且 $n_1 \leq n_2 < n$, 则有 $\gamma_{wcon}(C_n) = n$. 所以 $\gamma_{wcon}(C_n + e) = n - 2 < \gamma_{wcon}(C_n) = n$.

情形 3 $n_1 \in \{4, 5, 6\}$, $n_2 \in \{4, 5, 6\}$. 根据弱凸控制集的定义, 当 $n_1 \in \{4, 5, 6\}$, $n_2 \in \{4, 5, 6\}$ 时, 有 $\gamma_{wcon}(C_{n_1}) = n_1 - 2$, $\gamma_{wcon}(C_{n_2}) = n_2 - 2$. 又因为 $u, v \in S_1 \cap S_2$, 所以 $\gamma_{wcon}(C_n + e) = n - 4$. 此外, 因为 $n_1 \in \{4, 5, 6\}$, $n_2 \in \{4, 5, 6\}$, 且 $u, v \in C_{n_1} \cap C_{n_2}$, 故 $n \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$, 而当 $n = 6$ 时, $\gamma_{wcon}(C_n) = n - 2$; 当 $7 \leq n \leq 10$ 时, $\gamma_{wcon}(C_n) = n$. 因此, $\gamma_{wcon}(C_n) > \gamma_{wcon}(C_n + e)$.

情形 4 $n_1 = 3$, $n_2 \geq 3$. 如果 $n_2 = 3$, 因为 $u, v \in C_{n_1} \cap C_{n_2}$, 那么 C_n 是一个 4 圈. 根据弱凸控制集的定义，$\gamma_{wcon}(C_4 + e) = n - 3 = 1$. 所以 $\gamma_{wcon}(C_4 + e) = 1 < \gamma_{wcon}(C_4) = n - 2 = 2$. 如果 $n_2 \in \{4, 5, 6\}$, 根据弱凸控制集的定义, $\gamma_{wcon}(C_{n_2}) = n - 2$. 又因为 $u, v \in (S_2 \cap V(C_3))$, 且 u 和 v 都能控制点 $V(C_3) - \{u, v\}$, 因此 $\gamma_{wcon}(C_n + e) = n - 3$. 此外, 因为 $n_1 = 3$, $n_2 \in \{4, 5, 6\}$, 且 $u, v \in C_3 \cap C_{n_2}$, 此时 $n \in \{5, 6, 7\}$, 并且当 $n = 7$ 时, $\gamma_{wcon}(C_n) = n$; 当 $5 \leq n \leq 6$ 时, $\gamma_{wcon}(C_n) = n - 2$. 因此, $\gamma_{wcon}(C_n) > \gamma_{wcon}(C_n + e)$. 如果 $n_2 \geq 7$, 那么 $\gamma_{wcon}(C_{n_2}) = n_2$, 且 $u, v \in S_2$. 又因为 $u, v \in (S_2 \cap V(C_3))$, 且 u 和 v 都能控制点 $V(C_3) - \{u, v\}$, 故 $\gamma_{wcon}(C_n + e) = n - 1$. 所以 $\gamma_{wcon}(C_n + e) = n - 1 < \gamma_{wcon}(C_n) = n$.

综上所述, 得到 $\gamma_{wcon}(C_n) - 4 \leq \gamma_{wcon}(C_n + e) \leq \gamma_{wcon}(C_n)$.

根据定理 2, 按照定理 5 的分析方法,可以给出加边对圈的凸控制数的类似结果.

定理 6 令 C_n 是 $n \geq 3$ 的圈, 则对于任意边 $e \in E(\overline{C_n})$, 则有

$$\gamma_{con}(C_n) - 4 \leq \gamma_{con}(C_n + e) \leq \gamma_{con}(C_n).$$

定理 7 令 T_n 是顶点数 $n \geq 3$ 的树图. 则对于任意边 $e \in E(\overline{T_n})$, 则有

$$\gamma_{wcon}(T_n) - 2 \leq \gamma_{wcon}(T_n + e) \leq \gamma_{wcon}(T_n) + 2.$$

证明 根据引理 3, 容易知道 $D_0 = V - V_L(T_n)$ 是 T_n 的最小的弱凸控制集, 这里 V 代表 T_n 的顶点集. 下面考虑 $T_n + e$ 的弱凸控制集, 其中 $e = uv \in E(\overline{T_n})$. 把 $T_n + e$ 构成的唯一的圈用 C_p 来表示, 分以下三种情形进行讨论:

情形 1 假设 $u, v \in D_0$, 那么 $u, v \notin V_L(T_n)$, $d_{T_n}(u) \geq 2$, $d_{T_n}(v) \geq 2$, 并且 $V_L(T_n) = V_L(T_n + e)$, 所以 $D_0 = V - V_L(T_n + e)$.

如果 C_p, 其中 $p \geq 7$. 则 $V - V_L(T_n + e)$ 是 $T_n + e$ 的最小的弱凸控制集, 并且可以得到 $\gamma_{wcon}(T_n +$

$e) = |D_0| = \gamma_{wcon}(T_n)$.

如果 $p = 4, 5, 6$, 且在 C_p 上存在两个连续的 2 度点 x, y, 则 $V - (V_L(T_n + e) \cup \{x, y\})$ 是 $T_n + e$ 的最小的弱凸控制集, 因此可以得到 $\gamma_{wcon}(T_n + e) = |D_0| - 2 = \gamma_{wcon}(T_n) - 2$. 若 C_p 没有两个连续的 2 度点 x, y, 当 $p = 5, 6$ 时, D_0 是 $T_n + e$ 的最小的弱凸控制集, 因此得到 $\gamma_{wcon}(T_n + e) = |D_0| = \gamma_{wcon}(T_n)$. 当 $p = 4$ 时, 若 C_p 上有一个 2 度点, 则 $\gamma_{wcon}(T_n + e) = |D_0| - 1 = \gamma_{wcon}(T_n) - 1$, 若 C_p 上没有 2 度点, 则有 $\gamma_{wcon}(T_n + e) = |D_0| = \gamma_{wcon}(T_n)$.

如果 $p = 3$, 定义圈 C_3 上的第三个点为 ω. 根据 $\omega \in V_C(T_n + e)$ 或 $\omega \notin V_C(T_n + e)$, 则有 D_0 或 $D_0 - \omega$ 是 $T_n + e$ 是最小的弱凸控制集.

因此, 在这种情况下有 $\gamma_{wcon}(T_n + e) \in \{|D_0|, |D_0| - 1, |D_0| - 2\}$.

情形 2 假设 $|D_0 \cap \{u, v\}| = 1$, 我们不妨设 $u \in D_0$, $v \in V - D_0$, 那么 $d_{T_n}(u) \geq 2$ 且 $d_{T_n}(v) = 1$. 注意到 $v \in V_L(T_n) - V_L(T_n + e)$, 因此有 $D_0 = V - (V_L(T_n + e) \cup \{v\})$ 是 T_n 的最小的弱凸控制集.

如果 C_p, 其中 $p \geq 7$. 则 $V - V_L(T_n + e)$ 是 $T_n + e$ 的最小的弱凸控制集, 并且可以得到 $\gamma_{wcon}(T_n + e) = |D_0| + 1 = \gamma_{wcon}(T_n) + 1$.

如果 $p = 4, 5, 6$, 且在 C_p 上存在两个连续的 2 度点 x, y, 则 $V - (V_L(T_n + e) \cup \{x, y\})$ 是 $T_n + e$ 的最小的弱凸控制集, 因此可以得到 $\gamma_{wcon}(T_n + e) = |D_0| - 1 = \gamma_{wcon}(T_n) - 1$. 若 C_p 没有两个连续的 2 度点, 当 $p = 5, 6$ 时, $V - V_L(T_n + e)$ 是 $T_n + e$ 的最小的弱凸控制集, 因此可以得到 $\gamma_{wcon}(T_n + e) = |D_0| + 1 = \gamma_{wcon}(T_n) + 1$. 当 $p = 4$ 时, 若 C_p 上有一个 2 度点, 则 D_0 是 $T_n + e$ 的最小的弱凸控制集, $\gamma_{wcon}(T_n + e) = |D_0| = \gamma_{wcon}(T_n)$.

如果 $p = 3$, 令圈 C_3 上的第三个点为 ω. 根据 $\omega \in V_C(T_n + e)$ 或 $\omega \notin V_C(T_n + e)$, 有 D_0 或 $D_0 - \omega$ 是 $T_n + e$ 是最小的弱凸控制集.

因此, 在这种情况下有 $\gamma_{wcon}(T_n + e) \in \{|D_0| - 1, |D_0|, |D_0| + 1\}$.

情形 3 令 $u, v \in V - D_0$, 则 $d_{T_n}(u) = 1 = d_{T_n}(v)$. 注意到 $u, v \in V_L(T_n) - V_L(T_n + e)$. 因此有 $D_0 = V - (V_L(T_n + e) \cup \{u, v\})$ 是 T_n 的最小的弱凸控制集.

如果 C_p, 其中 $p \geq 7$. 则 $V - V_L(T_n + e)$ 是 $T_n + e$ 的最小的弱凸控制集, 并且可以得到 $\gamma_{wcon}(T_n + e) = |D_0| + 2 = \gamma_{wcon}(T_n) + 2$.

如果 $p = 4, 5, 6$. 因为 $u, v \in V - D_0$, 所以在 C_p 上存在两个连续的 2 度点 u, v, 因此可得 $V - (V_L(T_n + e) \cup \{u, v\})$ 是 $T_n + e$ 的最小的弱凸控制集, 并且 $\gamma_{wcon}(T_n + e) = |D_0| = \gamma_{wcon}(T_n)$.

如果 $p = 3$, 那么 D_0 是 $T_n + e$ 的最小的弱凸控制数, 并且可以得到 $\gamma_{wcon}(T_n + e) = |D_0| = \gamma_{wcon}(T_n)$. 因此, 在这种情况下, 有 $\gamma_{wcon}(T_n + e) \in \{|D_0|, |D_0| + 2\}$.

综上可知, 对于 T_n 有 $\gamma_{wcon}(T_n + e) \in \{|D_0| - 2, |D_0| - 1, |D_0|, |D_0| + 1, |D_0| + 2\}$.

根据定理 2 以及定理 7 类似的分析方法, 很容易推出加边对 T_n 凸控制数的类似结果.

定理 8 令 T_n 是顶点数 $n \geq 3$ 的树图. 则对于任意边 $e \in E(\overline{T_n})$, 则有

$$\gamma_{con}(T_n) - 2 \leq \gamma_{con}(T_n + e) \leq \gamma_{con}(T_n) + 2.$$

基金项目

国家自然科学基金项目(11761070, 61662079)；2021年新疆维吾尔自治区自然基金联合项目(2021D01C078)；2020年新疆师范大学一流专业、一流课程项目资助。

参考文献

[1] Topp, J. (2002) Personal Communication. Gdańsk University of Technology, Gdańsk.

[2] Lemańska, M. (2004) Weakly Convex and Convex Domination Numbers. *Opuscula Mathematica*, **24**, 181-188.

[3] Raczek, J. (2004) NP-Completeness of Weakly Convex and Convex Dominating Set Decision Problems. *Opuscula Mathematica*, **24**, 189-196.

[4] Raczek, J. and Lemańska, M. (2010) A Note on the Weakly Convex and Convex Domination Numbers of a Torus. *Discrete Applied Mathematics*, **158**, 1708-1713. https://doi.org/10.1016/j.dam.2010.06.001

[5] Lemańska, M. (2010) Nordhaus-Gaddum Results for Weakly Convex Domination Number of a Graph. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **30**, 257-263. https://doi.org/10.7151/dmgt.1491

[6] Rosicka, M. (2019) Convex and Weakly Convex Domination in Prism Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **39**, 741-755. https://doi.org/10.7151/dmgt.2207

[7] Dettlaff, M., Lemańska, M. and Osula, D. (2019) On the Connected and Weakly Convex Domination Numbers. arXiv:1902.07505v1

[8] 裴蔚, 郝国亮. 与边控制相关的两类图[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 2019, 36(1): 11-16+38.

[9] Chen, X.J., Sun, L. and Ma, D.X. (2004) Connected Domination Critical Graphs. *Applied Mathematics Letters*, **158**, 503-507. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(04)90118-8