Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(9), 2988-2995**
Published Online September 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.109313

Hans汉斯

基于量子算法的碎纸片拼接复原问题

王彦超，刘鑫磊，武良隆，刘晓东，范兴奎*

青岛理工大学理学院，山东 青岛
Email: *fanxingkui@126.com

收稿日期：2021年8月6日；录用日期：2021年8月31日；发布日期：2021年9月8日

摘 要

本文借助于量子算法对2013年全国大学生数学建模竞赛B题的两种碎纸片(纵切和纵横切)的拼接方法进行新的探究。运用MATLAB软件，设计出了可以快速准确地将碎纸片进行复原的量子算法程序。在第一问仅有纵切的情况下，将原问题转化为旅行商问题，并借助量子蚁群算法并进行求解。在第二问中利用改进的量子聚类算法，较完美的完成了拼接任务，极大地降低了算法的时间复杂度和拼接的错误率。

关键词

量子蚁群算法，量子聚类算法，碎纸片拼接，旅行商问题

The Problem of Splicing and Recovery of Pieces of Paper Based on Quantum Algorithm

Yanchao Wang, Xinlei Liu, Lianglong Wu, Xiaodong Liu, Xingkui Fan*

College of Science, Qingdao University of Technology, Qingdao Shandong
Email: *fanxingkui@126.com

Received: Aug. 6th, 2021; accepted: Aug. 31st, 2021; published: Sep. 8th, 2021

Abstract

With the help of quantum computing method, this paper makes a new research on the splicing method of two kinds of shreded paper (longitudinal and transverse) of problem B in the 2013 Na-

*通讯作者。

文章引用: 王彦超, 刘鑫磊, 武良隆, 刘晓东, 范兴奎. 基于量子算法的碎纸片拼接复原问题[J]. 应用数学进展, 2021, 10(9): 2988-2995. DOI: 10.12677/aam.2021.109313

tional College Students' mathematical modeling competition. We use MATLAB software to design a program that can quickly and accurately restore the broken pieces of paper. In the case of the first question, which is only vertical, we transform the original question into a traveling salesman problem and design a quantum ant colony algorithm to solve it. In the second question, the improved quantum clustering algorithm is used to complete the splicing task perfectly, which greatly reduces the time complexity of the algorithm and the error rate of stitching.

Keywords

Quantum Ant Colony Algorithms, Quantum Clustering Algorithms, Shredded Paper Splicing, Travelling Salesman Problem

1. 引言

破碎文件及图像的自动拼接复原在物证复原、文献修复等领域有很多的应用，当碎片的数量很少时，可以采用手工拼接的方法完成。但是当碎纸的数量非常大时，如果仍然依靠手工完成，可能会耗费大量的时间、人力、物力，不但会对物证造成一定的损坏，有时还会错过最佳时机，例如在破案中如不及时拼接复原会耽误破案进度。很多国家已经对破碎文件的自动修复技术进行了大量的研究。因此，把计算机视觉和模式识别与碎片复原结合起来进行研究意义重大。然而在国内，针对这方面的研究还是比较少的。图像的拼接复原技术是一个新兴课题，具有很大的实用价值。运用先进的计算机技术作为工具，借助计算机高速运算这一优点，将极大减少复原所需时间，提高正确率。本文主要研究了规则的碎纸机破碎纸片的拼接方法，我们分别针对单面仅纵切和既纵切又横切规则碎片进行了拼接研究，并借助于量子算法找到了可行的拼接方案。

量子算法与经典算法最大的区别在于它能够凭借量子计算的一些特性(例如：量子并行性)来实现指数级加速。本文中，采用量子态来表示输入信息和输出信息，通过查询量子随机存取存储器来获取我们需要的纠缠量子，算法的核心思想是利用量子态的相干性，使客观所需的结果增强，同时使非所需的结果减弱。这样在测量的时候客观所需的结果会以相当高的概率出现。

2. 单面仅纵切碎纸片拼接

2.1. 数据预处理

借用 MATLAB 中的 imread 函数先将图片数据导入 MATLAB 软件并进行读取。实验发现，使用经过二值化处理的数据与没处理过的数据相比复原率要高，因此，我们将数据进行二值化处理，即将图片上的灰度值置为 0 和 255，使图片仅显现黑白两种颜色[1] [2]。

2.2. 模型建立

求解所有图片的排列顺序，其实是一个最优化问题，于是我们将碎纸片拼接问题转化为经典的旅行商问题来进行处理[3]。

旅行商问题是经典的组合优化中的一个 NP 难题，可以将它描述为：一个旅行商从指定的一个城市出发，游玩所有城市并且每个城市只能游玩一次，每个城市之间的距离是不同的，求旅行商游玩路线的

最短距离。现在国内外学者提出了多种方法来解决这一问题，比如遗传算法，蚁群算法等，本文将在前人的基础上介绍一种改进的量子蚁群算法来求碎纸片拼接问题的最优解。

碎纸片之间的距离定义为 $I=\dfrac{a}{a+b+c}$，a 为两个向量 1-1 配对的总数，b 为两个向量不配对的总数，c 为两个向量 0-0 配对的总数。

将每个碎纸片看作一座城市，定义城市之间的距离 D 为：一条碎纸片右侧和另一条碎纸片左侧的距离。通过计算所有城市之间的距离，可以得到相关的距离矩阵(值得注意的是，城市 A 到城市 B 的距离与城市 B 到城市 A 的距离是不同的，因为它们顺序相反时对应的是碎纸片不同侧的距离)。由于文档最左侧和文档最右侧的碎纸条都为空白，所以可以形成一个哈密顿圈，由此转化为求最优解的旅行商问题。

2.3. 算法设计

解决旅行商问题的算法主要有神经网络算法、模拟退火算法和遗传算法等，但为了提高运算的速度和准确性，这里我们介绍一种量子蚁群算法[4]。

蚁群算法是由意大利学者 Dorigo、Maniezzo 等人于 20 世纪 90 年代提出的[5] [6]。他们从蚂蚁寻找食物的过程中受到了启发，蚂蚁在其经过的路径上会留下信息素，其他蚂蚁可以识别这一物质，在蚂蚁寻找食物过程中，每只蚂蚁到达食物的路径上，都会留下信息素，每条路径对应了一种“可行解”，蚂蚁将食物搬回蚁穴后还会回去继续搬食物，所以路径短的蚂蚁用的时间少，重复频率快，单位时间内往返的蚂蚁就越多，路上留下的信息素也就会越多[7]。同时，蚂蚁会沿着信息素浓度较高的路径行走，由此形成一种正反馈机制，当蚂蚁数量非常大时，一段时间后蚂蚁会集中到最佳路径上，对应问题中的最优解。

由于量子算法具有并行性，在运算时会大大提高运算速度，下文将用量子思想对蚁群算法进行改进。我们认为蚂蚁释放的信息素是在蚂蚁当前位置留下的，蚂蚁的位置由一组量子比特的概率幅表示，蚂蚁的移动用量子旋转门实现，同时引入量子变异操作[8]。设蚂蚁 m 携带的一组量子比特为 $X_m=\begin{pmatrix}\cos\varphi_{m1} & \cos\varphi_{m2} & \cos\varphi_{m3} & \cdots & \cos\varphi_{mn}\\ \sin\varphi_{m2} & \sin\varphi_{m2} & \sin\varphi_{m3} & \cdots & \sin\varphi_{mn}\end{pmatrix}$，则蚂蚁占据的位置分别为 $P_{mx}=\left(\cos\varphi_{m1},\cdots,\cos\varphi_{mn}\right)$ 和 $P_{my}=\left(\sin\varphi_{m1},\cdots,\sin\varphi_{mn}\right)$ [9] [10] [11]。蚂蚁的位置对应问题的可能解，我们求得的最优位置便对应着问题的最优解。虽然蚂蚁数量不变，但借助于量子并行性，搜索空间加倍了，从而提高了搜索速度[12]。

设蚂蚁在 r 处的信息素为 $f(r)$，初始时全部设置为零，可见度 $g(r)$我们用信息的可检测性来表示，即定义为实际检测强度与原有信息素强度的比值。

(1) 定义蚂蚁 m 由 r_s 到 r_t 位置的移动规则为

$$r_t=\begin{cases}\arg\max\left\{\left[f\left(r_s\right)\right]^{\alpha}\left[f\left(r_t\right)\right]^{\beta}\right\}\ \left(r_s\in R\right) & q\le q_0\\ r_s' & q>q_0\end{cases}$$

这里 q 为介于 0 到 1 之间的随机数，q_0 为 0 到 1 之间的一个常数，R 为蚂蚁位置的集合，r_s' 为目标位置。

$$P\left(r_s\right)=\frac{\left[f\left(r_s\right)\right]^{\alpha}\left[f\left(r_t\right)\right]^{\beta}}{\sum_{r_s,r_t\in R}\left[f\left(r_s\right)\right]^{\alpha}\left[f\left(r_t\right)\right]^{\beta}}$$

其中 α 和 β 代表着信息素强度和它的可检测性对移动的影响比重，可由实际情况定义。

(2) 接下来我们用量子旋转门来改变量子比特的相位，从而实现蚂蚁位置的改变。蚂蚁的量子比特为

$$X_r=\begin{pmatrix}\cos\varphi_{r1} & \cos\varphi_{r2} & \cos\varphi_{r3} & \cdots & \cos\varphi_{rn}\\ \sin\varphi_{r2} & \sin\varphi_{r2} & \sin\varphi_{r3} & \cdots & \sin\varphi_{rn}\end{pmatrix}$$

$$X_s = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{s1} & \cos\varphi_{s2} & \cos\varphi_{s3} & \cdots & \cos\varphi_{sn} \\ \sin\varphi_{s1} & \sin\varphi_{s2} & \sin\varphi_{s3} & \cdots & \sin\varphi_{sn} \end{pmatrix}$$

量子旋转门转角的大小其实是十分重要的，我们要尽可能使 X_r 旋转后趋近于 X_s。这里我们取 0.001π 到 0.05π 之间。记

$$A_i = \begin{vmatrix} \cos\varphi_{ri} & \cos\varphi_{si} \\ \sin\varphi_{ri} & \sin\varphi_{si} \end{vmatrix}$$

转角由下式确定：

$$\Delta\theta_i = -\mathrm{sgn}(A_i)\theta_0 \mathrm{e}^{-t}$$

其中 θ_0 为迭代初值，t 为优化步数，对蚂蚁进行量子旋转门操作后，蚂蚁移动到 r_t 位置。

(3) 为了使蚂蚁有新的空间位置，我们用量子非门对蚂蚁进行变异处理，方法如下

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{si} \\ \beta_{si} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{si} \\ \alpha_{si} \end{bmatrix}$$

(4) 设蚂蚁的前一个位置为 r_q，当前位置为 r_s，移动后的位置为 r_t，可得出更新规则为

$$f(r_t) = f(r_s) + \mathrm{sgn}(\Delta fit) \times |\Delta fit|^{\alpha}$$

$$\Delta fit = fit(r_t) - fit(r_s)$$

$$g(r_t) = g(r_s) + \mathrm{sgn}(\Delta\partial fit) \times |\Delta\partial fit|^{\alpha}$$

$$\Delta\partial fit = \max_{1\le i\le n} \frac{\partial fit}{\partial r_{ti}} - \max_{1\le i\le n} \frac{\partial fit}{\partial r_{si}}$$

fit 为适应度函数，定义为 $fit(x) = A_{\max} - f(x)$，其中 $A_{\max}$ 可为输入的恰当值，也可以为优化过程的最大数值。

当所有蚂蚁进行一次循环后，按照下面的公式更新信息素

$$f(r_u) = \begin{cases} (1-\rho) fr_u + \rho fit(r_u) & r_u = r' \\ (1-\rho) fr_u & r_u \ne r' \end{cases}$$

其中，$(1-\rho)$ 为信息素挥发系数，大小在 0 到 1 之间，r' 为最优解。

(5) 算法实现步骤

步骤 1：将每一只蚂蚁的信息素强度和可见度进行初始化，赋以相同的值。变异概率设为 p_n，最大迭代次数为 Max，当前迭代次数为 0，随机生成初始群体为

$$p_i = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{i1} & \cos\varphi_{i2} & \cos\varphi_{i3} & \cdots & \cos\varphi_{in} \\ \sin\varphi_{i1} & \sin\varphi_{i2} & \sin\varphi_{i3} & \cdots & \sin\varphi_{in} \end{pmatrix}$$

其中 $\varphi_{ij} = 2\pi \times q$，$i = 1,2,3,\cdots,m$；$j = 1,2,3,\cdots,n$；$m$ 是种群规模，n 是量子位数。

步骤 2：对种群中的每个蚂蚁按其移动规则和转移概率用量子旋转门进行移动，随机选取蚂蚁用量子非门进行变异操作。

步骤 3：按照更新规则对信息素强度和可见度进行更新。

步骤 4：迭代次数加一，当 $t < \mathrm{Max}$ 时，重复 b；当 $t > \mathrm{Max}$ 时，输出结果。

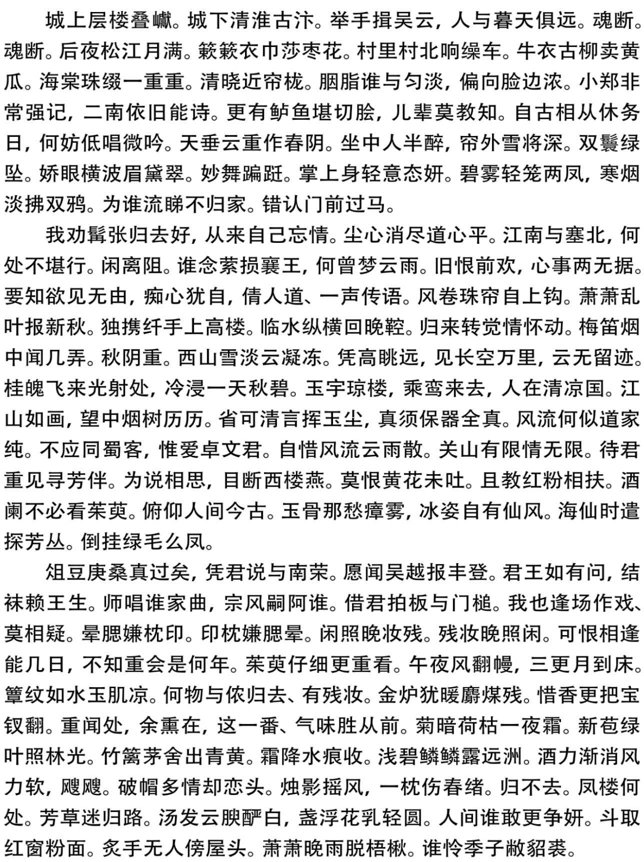
2.4. 仿真结果及分析

借用量子改进蚁群算法，按照以上步骤编写算法程序，并在计算机上进行仿真运算。结果显示：成功拼接了碎纸片，完美地还原了原图片，且无需人工干预，得到了碎纸片的拼接序列(如表 1 所示)。

Table 1. Result sequence table of Appendix 1
表 1. 附件 1 结果顺序表

碎纸片编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
排列序列	9	15	13	16	4	11	3	17	2	5	6	10	14	19	12	8	18	1	7

还原结果图：(如图 1 所示)。


城上层楼叠巘。城下清淮古汴。举手揖吴云，人与暮天俱远。魂断。魂断。后夜松江月满。簌簌衣巾莎枣花。村里村北响缫车。牛衣古柳卖黄瓜。海棠珠缀一重重。清晓近帘栊。胭脂谁与匀淡，偏向脸边浓。小郑非常强记，二南依旧能诗。更有鲈鱼堪切脍，儿辈莫教知。自古相从休务日，何妨低唱微吟。天垂云重作春阴。坐中人半醉，帘外雪将深。双鬟绿坠。娇眼横波眉黛翠。妙舞蹁跹。掌上身轻意态妍。碧雾轻笼两凤，寒烟淡拂双鸦。为谁流睇不归家。错认门前过马。

我劝髯张归去好，从来自己忘情。尘心消尽道心平。江南与塞北，何处不堪行。闲离阻。谁念萦损襄王，何曾梦云雨。旧恨前欢，心事两无据。要知欲见无由，痴心犹自，倩人道、一声传语。风卷珠帘自上钩。萧萧乱叶报新秋。独携纤手上高楼。临水纵横回晚鞚。归来转觉情怀动。梅笛烟中闻几弄。秋阴重。西山雪淡云凝冻。凭高眺远，见长空万里，云无留迹。桂魄飞来光射处，冷浸一天秋碧。玉宇琼楼，乘鸾来去，人在清凉国。江山如画，望中烟树历历。省可清言挥玉尘，真须保器全真。风流何似道家纯。不应同蜀客，惟爱卓文君。自惜风流云雨散。关山有限情无限。待君重见寻芳伴。为说相思，目断西楼燕。莫恨黄花未吐。且教红粉相扶。酒阑不必看茱萸。俯仰人间今古。玉骨那愁瘴雾，冰姿自有仙风。海仙时遣探芳丛。倒挂绿毛么凤。

俎豆庚桑真过矣，凭君说与南荣。愿闻吴越报丰登。君王如有问，结袜赖王生。师唱谁家曲，宗风嗣阿谁。借君拍板与门槌。我也逢场作戏、莫相疑。晕腮嫌枕印。印枕嫌腮晕。闲照晚妆残。残妆晚照闲。可恨相逢能几日，不知重会是何年。茱萸仔细更重看。午夜风翻幔，三更月到床。簟纹如水玉肌凉。何物与侬归去、有残妆。金炉犹暖麝煤残。惜香更把宝钗翻。重闻处，余熏在，这一番、气味胜从前。菊暗荷枯一夜霜。新苞绿叶照林光。竹篱茅舍出青黄。霜降水痕收。浅碧鳞鳞露远洲。酒力渐消风力软，飕飕。破帽多情却恋头。烛影摇风，一枕伤春绪。归不去。凤楼何处。芳草迷归路。汤发云腴酽白，盏浮花乳轻圆。人间谁敢更争妍。斗取红窗粉面。炙手无人傍屋头。萧萧晚雨脱梧楸。谁怜季子敝貂裘。

Figure 1. The restored picture of Annex 1
图 1. 附件一还原的图片

量子蚁群算法由于利用了量子并行性，其运算速度得到了很大提高，本例中只有 19 条碎纸片，当碎纸片数量达到上千上万甚至更大后，量子算法的优越性将会更好的体现。考虑到改进的量子蚁群算法具有运算速度快，正确率高的优点，还可以把该算法运用到其他优化问题的求解中。例如银行在破碎现金的复原中，多数拼接方法因准确率问题大都需要人工辅助完成，而改进的量子蚁群算法经过测试后具有较高的准确性，可直接完成拼接任务。

3. 纵横切纸片的拼接

为了不影响原图片且方便图像处理，我们将原图片转化为二值图像，每个像素点都用 0~255 之间的一个灰度值表示，每个图片就可以分别表示为一个矩阵。我们首先对碎纸片进行聚类，找到碎纸片所在的行，然后在行内借助于问题一中的方法对碎纸片进行拼接。

设 a 为文字上方距离上边缘的距离，b 为文字最左侧的位置与左边缘的距离，c 为文字最下方的位置与下边缘的距离，d 为文字最下方与下边缘的距离，如果在边缘检测到了像素点，那就令对应的距离为 0，设矩阵 $e=[a,b,c,d]^{\mathrm{T}}$ 。

首先，把每个样品看作一类，并将每两个样品间的相似性转换为碎纸片的距离。其中 c_{ij} 表示变量 i 和变量 j 之间的相关系数，看作类与类之间的距离，然后将距离最近的两类合成新的一类，每次减少一类，重新进行最近种类的合并，直至所有的变量合并成一类。

3.1. 算法设计

我们引入一种新型的聚类方法，是在传统的 K-means 算法基础上改进得来的[13]。

(1) 数据的量子比特的表示

空间中的任意两个点 a 和 b，可以把点 a 和 b 表示成向量，接下来将向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 用量子态表示，

$$\boldsymbol{a}=|a||a\rangle,\quad \boldsymbol{b}=|b||b\rangle$$

接下来我们讨论二维情况

$$|a\rangle=x_1|0\rangle+x_2|1\rangle,\quad |b\rangle=y_1|0\rangle+y_2|1\rangle$$

其中 $|0\rangle$，$|1\rangle$ 为计算基，$|a\rangle$、$|b\rangle$ 表示计算后的概率，并且对它们进行了归一化。

(2) 用量子方法，描述碎纸片间的距离，定义两个态之间的距离为：

$$C=|a-b|=\sqrt{\left(|a|\langle a|-|b|\langle b|\right)\left(|a||a\rangle-|b||b\rangle\right)}$$

添加一个辅助量子比特来构建分类点 a 到聚类中心 b 的量子纠缠态，并测量这个纠缠态，从而得到概率和欧氏距离的关系。

3.2. 实现步骤

步骤 1：根据最左边碎纸片边距要大的规律选择出最左边的 11 个碎纸片

$$E=\left\{\left(|b_1||b_1\rangle\right)^0,\left(|b_2||b_2\rangle\right)^0,\cdots,\left(|b_n||b_n\rangle\right)^0\right\}$$

步骤 2：对剩余的碎纸片归类到已有的 11 类中，其中归类方法是按最小距离原则进行，从而使得距离最近的碎纸片被分为一类。

步骤 3：更新聚类中心，聚类中点为

$$\left(|b_i||b_i\rangle\right)^{t+1}=\frac{\sum_{j=1}^{m_i}|a_j||a_j\rangle}{m_i}$$

其中 m_i 表示中点数，a_j 为距离元素。

步骤 4：若 $\left(|b_i||b_i\rangle\right)^{t+1}=\left(|b_i||b_i\rangle\right)^{t}$，结束并输出 $\sum_{j=1}^{m_i}|a_j||a_j\rangle$，否则转至步骤 2。

这里我们选择初始聚类中心时，没有用 K-means 算法的传统方法随机选取，而是通过分析数据的特

点即页边距得出了初始聚类中心，大大地减少了迭代次数，从而使运算速度和正确率都有了很大程度地提升。

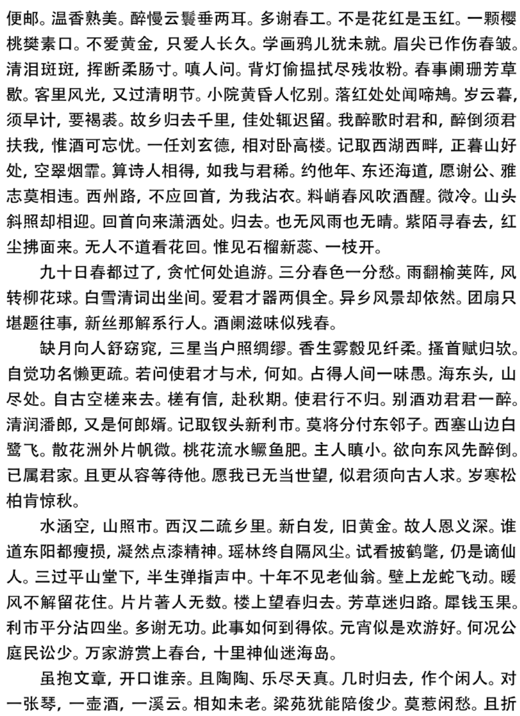
3.3. 结果分析

按照上述算法的四个步骤，利用 MATLAB 软件进行编程，通过详细运算成功的还原了原图像。碎纸片的聚类结果和排列顺序：(如表 2 所示)。

Table 2. Result sequence table of Appendix 3
表 2. 附件 3 结果顺序表

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	049	054	065	143	186	002	057	192	178	118	190	095	011	022	129	028	091	188	141
2	061	019	078	067	069	099	162	096	131	079	063	116	163	072	006	177	020	052	036
3	168	100	076	062	042	030	041	023	147	191	050	179	020	086	195	026	001	087	018
4	038	148	046	161	024	035	081	189	122	103	130	193	088	167	025	008	009	105	074
5	071	156	083	132	200	017	080	033	202	198	015	133	170	205	085	152	165	027	060
6	014	128	003	159	082	199	135	012	073	160	203	169	134	039	031	051	107	115	176
7	094	034	084	183	090	047	121	042	124	144	077	112	149	097	136	164	127	058	043
8	125	013	182	109	197	016	184	110	187	066	106	150	021	173	157	181	204	139	145
9	029	064	111	201	005	092	180	048	037	075	055	044	206	010	104	098	172	171	059
10	007	208	138	158	126	068	175	045	174	000	137	053	056	093	153	070	166	032	196
11	089	146	102	154	114	040	151	207	155	140	185	108	117	004	101	113	194	119	123

还原出的结果图：(如图 2 所示)。


便邮。温香熟美。醉慢云鬟垂两耳。多谢春工。不是花红是玉红。一颗樱桃樊素口。不爱黄金，只爱人长久。学画鸦儿犹未就。眉尖已作伤春皱。清泪斑斑，挥断柔肠寸。嗔人问。背灯偷揾拭尽残妆粉。春事阑珊芳草歇。客里风光，又过清明节。小院黄昏人忆别。落红处处闻啼鴂。岁云暮，须早计，要褐裘。故乡归去千里，佳处辄迟留。我醉歌时君和，醉倒须君扶我，惟酒可忘忧。一任刘玄德，相对卧高楼。记取西湖西畔，正暮山好处，空翠烟霏。算诗人相得，如我与君稀。约他年、东还海道，愿谢公、雅志莫相违。西州路，不应回首，为我沾衣。料峭春风吹酒醒。微冷。山头斜照却相迎。回首向来潇洒处。归去。也无风雨也无晴。紫陌寻春去，红尘拂面来。无人不道看花回。惟见石榴新蕊、一枝开。

九十日春都过了，贪忙何处追游。三分春色一分愁。雨翻榆荚阵，风转柳花球。白雪清词出坐间。爱君才器两俱全。异乡风景却依然。团扇只堪题往事，新丝那解系行人。酒阑滋味似残春。

缺月向人舒窈窕，三星当户照绸缪。香生雾縠见纤柔。搔首赋归欤。自觉功名懒更疏。若问使君才与术，何如。占得人间一味愚。海东头，山尽处。自古空槎来去。槎有信，赴秋期。使君行不归。别酒劝君君一醉。清润潘郎，又是何郎婿。记取钗头新利市。莫将分付东邻子。西塞山边白鹭飞。散花洲外片帆微。桃花流水鳜鱼肥。主人瞋小。欲向东风先醉倒。已属君家。且更从容等待他。愿我已无当世望，似君须向古人求。岁寒松柏肯惊秋。

水涵空，山照市。西汉二疏乡里。新白发，旧黄金。故人恩义深。谁道东阳都瘦损，凝然点漆精神。瑶林终自隔风尘。试看披鹤氅，仍是谪仙人。三过平山堂下，半生弹指声中。十年不见老仙翁。壁上龙蛇飞动。暖风不解留花住。片片著人无数。楼上望春归去。芳草迷归路。犀钱玉果。利市平分沾四坐。多谢无功。此事如何到得侬。元宵似是欢游好。何况公庭民讼少。万家游赏上春台，十里神仙迷海岛。

虽抱文章，开口谁亲。且陶陶、乐尽天真。几时归去，作个闲人。对一张琴，一壶酒，一溪云。相如未老。梁苑犹能陪俊少。莫惹闲愁。且折

Figure 2. The restored picture of Annex 3
图 2. 附件三还原的结果图

事实证明，改进的量子 K-means 算法的聚类速度和准确率都得到了大幅提升，多次试验后，需要手工辅助的次数也比传统方法少了很多[14]。此次实验仅有 209 个元素，当碎纸片被分割的更细小时，量子算法的优越性将会更好的展现。

4. 未来展望

由于量子算法并行性的特点，相对于传统算法具有运算速度快、准确率高等优势[15]。现如今量子算法只能在传统计算机上局部实现，未来如果能研制出量子计算机，量子算法的速度将会大大提升，而且量子算法在计算量较大时，它的优势体现的更明显。在当今大数据时代，它的重要性不言而喻，量子技术和量子计算的应用有着十分广阔的前景[16]。

基金项目

2021 年山东省大学生创新训练项目(项目编号 202110429213)，2020 年山东省大学生创新训练项目(项目编号 S202010429197)和 2020 年山东省本科教学改革研究重点课题(项目编号 Z2020045)和资助。

参考文献

[1] 谢亚旗, 缪杨, 梁伟, 王韵, 安秋平. 基于聚类分析与欧氏距离模型的碎纸片拼接复原[J]. 电子技术与软件工程, 2020(18): 145-146.

[2] 薛毅. 碎纸片拼接复原的数学方法[J]. 数学建模及其应用, 2013, 2(Z2): 9-13.

[3] 高春涛. 求解旅行商问题的几种解法[J]. 边疆经济与文化, 2010(5): 10-11.

[4] 李士勇, 李盼池. 量子计算与量子优化算法[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2009: 108-112.

[5] 武良隆, 刘晓东, 王彦超, 刘鑫磊, 陈倩华. 基于量子粒子群算法的 CT 系统参数标定[J]. 应用数学进展, 2021, 10(5): 1607-1615. https://doi.org/10.12677/AAM.2021.105170

[6] 张磊. 能谱 CT 成像原理及临床应用价值研究[J]. 中国卫生产业, 2016, 13(29): 33-35.

[7] 郭立倩. CT 系统标定与有限角度 CT 重建方法的研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2016.

[8] 孟凡勇, 李忠传, 杨民, 李静海. 基于投影原始数据的 CT 旋转中心的精确确定方法[C]//中国体视学学会. 第十三届中国体视学与图像分析学术会议, 2013: 336-341.

[9] Kennedy, J. and Eberhart, R.C. (1995) Particle Swarms Optimization. *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, Vol. 4, Perth, 27 November-1 December 1995, 1942-1948. https://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968

[10] 李士勇, 李盼池. 求解连续空间优化问题的量子粒子群算法[J]. 量子电子学报, 2007, 24(5): 569-574.

[11] 宫珊珊, 梅立峰, 廖志良, 黄旭辉. 基于粒子群算法的 CT 系统参数标定及优化[J]. 安徽建筑大学学报, 2018, 26(6): 87-91.

[12] 云浩, 赵碧华, 孙文才. 螺旋 CT 原理、技术特点及临床应用[J]. 医疗装备, 2003(9): 4-6.

[13] 李玥, 穆维松, 褚晓泉, 傅泽田. 基于改进量子粒子群的 K-means 聚类算法及其应用[J/OL]. 控制与决策, 2021: 1-10. https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1302

[14] 雎贵芳. 基于改进量子遗传算法的聚类算法研究[J]. 电子制作, 2019(8): 54-55+15.

[15] 田源, 王洪涛. 基于量子核聚类算法的图像边缘特征提取研究[J]. 计量学报, 2016, 37(6): 582-586.

[16] 王富强, 张振华, 朱然. 基于量子粒子群模糊 C 均值聚类算法应用研究[J]. 电子科技, 2016, 29(11): 137-141.