

# Mycielskian图的凸控制和弱凸控制数的研究

谢克莱·热不哈提<sup>1\*</sup>, 边红<sup>1†</sup>, 于海征<sup>2</sup>

<sup>1</sup>新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

<sup>2</sup>新疆大学数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐

Email: 'bh1218@163.com

收稿日期: 2021年8月22日; 录用日期: 2021年9月12日; 发布日期: 2021年9月23日

## 摘要

令  $G = (V, E)$  是一个连通图。用  $d_G(u, v)$  表示图  $G$  中的两个顶点  $u$  和  $v$  之间的最短  $(u, v)$  路的长度, 一个长度为  $d_G(u, v)$  的  $(u, v)$  路称作一个  $(u, v)$ -测地线。图  $G$  的一个点子集  $X \subseteq V$  叫做图  $G$  的一个弱凸集, 如果对  $X$  中的任意两个顶点  $a, b$ , 在图  $G$  中都存在一个  $(a, b)$ -测地线使得  $(a, b)$ -测地线上的所有顶点都属于  $X$ 。类似地, 图  $G$  的一个点子集  $X \subseteq V$  叫做图  $G$  的一个凸集, 如果对  $X$  中的任意两个顶点  $a, b$ , 图  $G$  中的每一条  $(a, b)$ -测地线上的所有顶点都属于  $X$ 。图  $G$  的一个点子集  $D \subseteq V$  叫做图  $G$  的一个控制集, 如果  $V - D$  中的每一个顶点都至少有一个邻点在  $D$  中。图  $G$  的一个点子集  $X$  称为  $G$  的弱凸(或凸)控制集, 如果  $X$  既是弱凸(或凸)集又是控制集。图  $G$  的弱凸(或凸)控制数, 是点数最少的弱凸(或凸)控制集所包含的点数, 记为  $\gamma_{wcon}(G)$  (或  $\gamma_{con}(G)$ )。本文主要给出了一些特殊图的Mycielskian图的控制数、弱凸控制数和凸控制数的确切值。

## 关键词

控制集, 凸控制数, 弱凸控制数, Mycielskian图, 完全图, 完全二部图

# Research on Convex and Weakly Convex Domination Numbers of Mycielskian Graphs

\* 第一作者

† 通讯作者

XieKe Lai Rebutati<sup>1\*</sup> Hong Bian<sup>1†</sup>, Haizheng Yu<sup>2</sup>

<sup>1</sup>School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

<sup>2</sup>College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Email: \*bh1218@163.com

Received: Aug. 22<sup>nd</sup>, 2021; accepted: Sep. 12<sup>th</sup>, 2021; published: Sep. 23<sup>rd</sup>, 2021

---

## Abstract

The distance  $d_G(u, v)$  between two vertices  $u$  and  $v$  in a connected graph  $G = (V, E)$  is the length of the shortest  $(u, v)$  path in  $G$ . A  $(u, v)$ -path of length  $d_G(u, v)$  is called a  $(u, v)$ -geodesic. A subset  $X \subseteq V$  is called *weakly convex* in  $G$  if for every two vertices  $a, b \in X$ , there exists an  $(a, b)$ -geodesic, whose all vertices belong to  $X$ , and a subset  $X \subseteq V$  is called *convex* in  $G$  if for every two vertices  $a, b \in X$ , for every  $(a, b)$ -geodesic, whose all vertices belong to  $X$ . A subset  $D \subseteq V$  is called *dominating* in  $G$ , if for every vertex of  $V - D$  has at least one neighbor in  $D$ . A set  $X \subseteq V$  is called *weakly convex (or convex) dominating set* in  $G$  if it is weakly convex (or convex) and dominating. The *weakly convex (or convex) domination number* of a graph  $G$  is the minimum cardinality of a weakly convex (or convex) dominating set of  $G$ , denoted by  $\gamma_{wcon}(G)$  (or  $\gamma_{con}(G)$ ), respectively. In this paper, we present the exactly values of the domination numbers, weakly convex domination numbers and convex domination numbers for Mycielskian graphs of some special graphs.

## Keywords

Dominating Set, Convex Domination Number, Weakly Convex Domination Number, Mycielskian Graph, Complete Graph, Complete Bipartite Graph

---

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 介绍

本文中所考虑的都是简单, 无向连通图. 令  $G = (V(G), E(G))$  是一个简单图. 对  $v \in V(G)$ , 用  $N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$  表示点  $v$  的开领域, 而  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$  表示点  $v$  的闭领域. 令  $d_G(v) = |N_G(v)|$  表示图  $G$  中点  $v$  的度, 显然  $d_G(v) = |N_G(v)|$ . 对于顶点子集  $S \subseteq V$ , 用  $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$  表示集合  $S$  的开领域, 而  $N_G[S] = N_G(S) \cup S$  表示集合  $S$  的闭领域. 在连通图  $G$  中  $u, v$  两点之间的距离  $d_G(u, v)$  是指  $u$  和  $v$  之间最短路的长度, 也称为  $(u, v)$ -测地线. 对于集合  $A \subseteq V(G)$ , 如果  $N_G(A) = V$ , 称集合  $A \subseteq V(G)$  为图  $G$  的控制集. 如果  $N_G[A] = V$ , 且诱导子图  $G[A]$  是连通的, 那么称集合  $A$  是图  $G$  的连通控制集. (连通)控制数  $\gamma(G)$  ( $\gamma_c(G)$ ) 是图  $G$  的阶数最小的(连通)控制集所包含的点数. 图  $G$  的含有最小阶数的(连通)控制集叫做  $\gamma(G)$ -集合 ( $\gamma_c(G)$ -集合). 如果对于集合  $X$  中的任意两个点  $a, b$  存在一条  $(a, b)$ -测地线, 使得测地线上的所有点都属于集合  $X$ , 这样的集合  $X$  叫做弱凸集. 如果集合  $X$  既是弱凸集又是控制集, 称  $X$  是弱凸控制集.  $\gamma_{wcon}(G)$  表示图  $G$  的弱凸控制数是图  $G$  中阶数最小的弱凸控制集所包含的点数. 如果对于集合  $X$  中的任意两个点  $a, b$ , 所有  $(a, b)$ -测地线上的点都属于集合  $X$ , 这样的集合  $X$  叫做凸集. 如果集合  $X$  既是凸集又是控制集, 称  $X$  是凸控制集.  $\gamma_{con}(G)$  表示图  $G$  的凸控制数是图  $G$  中阶数最小的凸控制集所包含的点数.

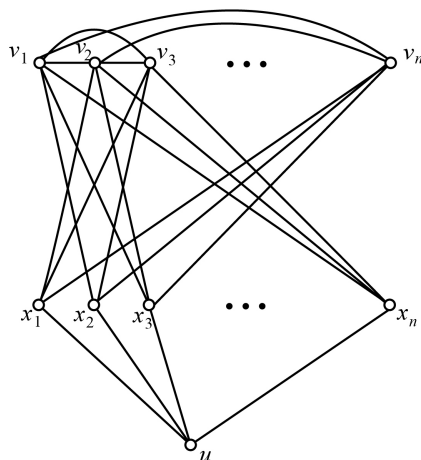
凸控制数和弱凸控制数最早是由 Topp [1]提出的, 通过保证控制集中的任意两个节点之间的连接最短, 从而改进了连通控制在通信网络设计中的应用. 在 2004 年, Lemańska [2] 研究了弱凸控制和凸控制与其它控制类参数之间关系; 特别地, 给出了凸控制数和连通控制数相等的三正则图的刻画. 同在 2004 年, Raczek [3] 证明了确定一个图的弱凸控制集和凸控制集是一个 NP-完全问题. 在 2010 年, Raczek 和 Lemańska [4] 研究了环面的弱凸控制数和凸控制数, 并给出了一些特殊环面的凸控制数和弱凸控制数的确切值. 同一年 Lemańska [5] 给出了一个图的弱凸控制数的 Nordhaus-Gaddum 结果. 图  $G$  的弱凸控制剖分数是指使得弱凸控制数增加所需要剖分的最少边数, Dettlaffa 在文献 [6] 中, 首次研究了图  $G$  的弱凸控制剖分数, 首先给出了剖分图  $G$  的一条边之后的弱凸控制数与原图  $G$  的弱凸控制数之间的差可以任意大; 其次, 给出了图  $G$  的弱凸控制划分数几个上界. 在 2019 年, Rosicka [7] 根据一个图  $G = (V, E)$  和图  $G$  的顶点集  $V$  的一个置换  $\pi$ , 定义了一类棱柱图  $\pi G$ , 首先对这类棱柱图的凸控制集和弱凸控制集的性质作了比较; 其次, 给出两类特殊棱柱图的刻画; 最后, 证明了原图  $G$  与对应的棱柱图的弱凸控制数的差可以是任意大; 而棱柱图的凸控制数无法用原图  $G$  的凸控制数来界定. 同在 2019 年, Lemańska [8] 等人首先研究了弱凸控制数和连通控制数之间的关系, 并给出了满足  $\gamma_{wcon}(G) = \gamma_c(G)$  的图  $G$  的刻画; 还证明了在一般情形下, 图的连通控制数与弱凸控制数的差可以任意大; 此外, 还研究了去边对弱凸控制数的影响.

为了寻找一类具有任意大色数但不含三角形的图类, Mycielski [9] 于 1955 年提出了一种有趣的图变换, 由图  $G$  经过一种图变换得到的一个新图, 称之为图  $G$  的 Mycielskian 图, 记为  $\mu(G)$ . 定义如下: 设  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  是图  $G$  的顶点集,  $V'(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  是图  $G$  的顶点的拷贝点集, 其中  $x_i$  是  $v_i$  的拷贝点 ( $1 \leq i \leq n$ ),  $u$  称为  $\mu(G)$  的根点. Mycielskian 图的顶点集是  $V(\mu(G)) = V(G) \cup V'(G) \cup u$ , 边集为  $E(\mu(G)) = E(G) \cup \{v_i x_j : v_i v_j \in E(G), 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i u : x_i \in V'(G), 1 \leq i \leq n\}$ . 本文给出了一些特殊图的 Mycielskian 图的控制数, 凸控制数和弱凸控制数的确切值.

## 2. 主要结果

因为图  $G$  的每一个凸控制集一定是一个弱凸控制集, 每一个弱凸控制集一定是一个连通控制集, 而每一个连通控制集显然是一个控制集, 因此图  $G$  的控制数、连通控制数、弱凸控制数和凸控制数有如下的一个不等式关系链.

**性质 1 [2]:** 对于任意的连通图  $G$  满足  $\gamma(G) \leq \gamma_c(G) \leq \gamma_{wcon}(G) \leq \gamma_{con}(G)$ .



**Figure 1.** Mycielskian graph of complete graph  $K_n$

**图 1.** 完全图  $K_n$  的 Mycielskian 图

在这节中, 主要研究一些特殊图的 Mycielskian 图的控制数, 弱凸控制数和凸控制数.

**定理 1:** 令  $K_n$  为  $n$  个点的完全图. 则  $\gamma(\mu(K_n)) = 2$ ,  $\gamma_{wcon}(\mu(K_n)) = \gamma_{con}(\mu(K_n)) = 3$ .

**证明** 假设  $K_n$  的顶点集为  $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 其拷贝点集为  $V'(K_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . 易知完全图  $K_n$  中的任意一个点能控制  $K_n$  中的其它所有点, 而根点  $u$  可以控制  $\mu(K_n)$  中的所有拷贝点. 对于任意的  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\{u, v_i\}$  显然是  $\mu(K_n)$  的一个控制集(见图 1), 故  $\gamma(\mu(K_n)) \leq 2$ . 又  $\mu(K_n)$  中的任意一个单点集显然不能控制除它以外的其它所有点. 因此  $\gamma(\mu(K_n)) \geq 2$ . 综上所述,  $\gamma(\mu(K_n)) = 2$ .

由  $\mu(K_n)$  的结构可知, 对于任意的  $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$ , 有  $d_{\mu(K_n)}(u, x_j) = 1$ ,  $d_{\mu(K_n)}(v_i, x_j) = 1$ ,  $d_{\mu(K_n)}(u, v_i) = 2$ , 且  $ux_jv_i$  是  $u$  和  $v_i$  之间的一条最短路. 则  $\{u, x_j, v_i\}$  显然是  $\mu(K_n)$  的一个弱凸控制集, 故  $\gamma_{wcon}(\mu(K_n)) \leq 3$ . 由性质 1 和  $\gamma(\mu(K_n)) = 2$  可知,  $\gamma_{wcon}(\mu(K_n)) \geq 2$ . 现只需证明  $\mu(K_n)$  的任意一个二元子集都不是  $\mu(K_n)$  的弱凸控制集即可. 根据  $\mu(K_n)$  中点的位置, 分为以下三种情形:

**情形 1** 二元子集的两个点都位于  $V(K_n)$ . 不失一般性, 假设  $\{v_i, v_j\}, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$  是位于  $V(K_n)$  的一个二元子集, 则  $\{v_i, v_j\}$  是  $\mu(K_n)$  的一个弱凸集, 但不是  $\mu(K_n)$  的一个控制集, 因为点  $u$  不被  $\{v_i, v_j\}$  所控制.

**情形 2** 二元子集的两个点都位于  $V'(K_n)$ . 假设  $\{x_i, x_j\}, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$  是位于  $V'(K_n)$  的一个二元子集, 则  $\{x_i, x_j\}$  既不是  $\mu(K_n)$  的一个控制集, 也不是  $\mu(K_n)$  的一个弱凸集, 因

为  $d_{\mu(K_n)}(x_i, x_j) = 2$ , 而  $x_i$  和  $x_j$  的所有最短路的内部顶点都不在  $\{x_i, x_j\}$  中, 此外,  $x_k, k \neq i, j, k = 1, 2, \dots, n$  不被  $\{x_i, x_j\}$  所控制.

**情形3** 二元子集中的一个顶点在  $V(K_n)$ , 另一个顶点在  $V'(K_n)$ . 假设  $\{v_i, x_j\}, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$  是这样一个二元子集, 若  $i \neq j$ , 则  $\{v_i, x_j\}$  是  $\mu(K_n)$  的一个弱凸集, 但不是  $\mu(K_n)$  的一个控制集, 因为  $x_i$  没有被控制. 若  $i = j$ , 则  $\{v_i, x_j\}$  是  $\mu(K_n)$  的一个控制集, 但不是  $\mu(K_n)$  的一个弱凸集, 因为此时  $d_{\mu(K_n)}(v_i, x_i) = 2$ , 而它们之间的最短路的内部顶点不在  $\{v_i, x_i\}$  中, 与弱凸集的定义矛盾.

**情形4** 二元子集中的一个顶点是  $\{u\}$ , 另一个顶点在  $V(K_n)$  或  $V'(K_n)$  中. 假设  $\{u, x_i\}, i = 1, 2, \dots, n$  或  $\{u, v_i\}, i = 1, 2, \dots, n$  是这样一个二元子集, 则  $\{u, x_i\}$  是  $\mu(K_n)$  的一个弱凸集, 但不是  $\mu(K_n)$  的一个控制集, 因为  $v_i$  没有被控制. 而  $\{u, v_i\}$  是  $\mu(K_n)$  的一个控制集, 但不是  $\mu(K_n)$  的一个弱凸集, 因为此时  $d_{\mu(K_n)}(u, v_i) = 2$ , 而它们之间的最短路的内部顶点不在  $\{u, v_i\}$  中, 与弱凸集的定义矛盾. 综上所述,  $\gamma_{wcon}(\mu(K_n)) \geq 3$ . 故结论成立.

由控制集的定义可知,  $\{v_i, v_j, x_k\}, i \neq j \neq k, i, j, k = 1, 2, \dots, n$  首先是  $\mu(K_n)$  的一个控制集, 又由于这个集合中任意两个点之间的最短路有且仅有一条且最短路的长度为1, 由凸集的定义,  $\{v_i, v_j, x_k\}$  又是  $\mu(K_n)$  的一个凸集, 因此  $\gamma_{con}(\mu(K_n)) \leq 3$ . 由性质1和以上的讨论可知  $\gamma_{con}(\mu(K_n)) \geq \gamma_{wcon}(\mu(K_n)) = 3$ , 知  $\gamma_{con}(\mu(K_n)) \geq 3$ . 所以  $\gamma_{con}(\mu(K_n)) = 3$ .

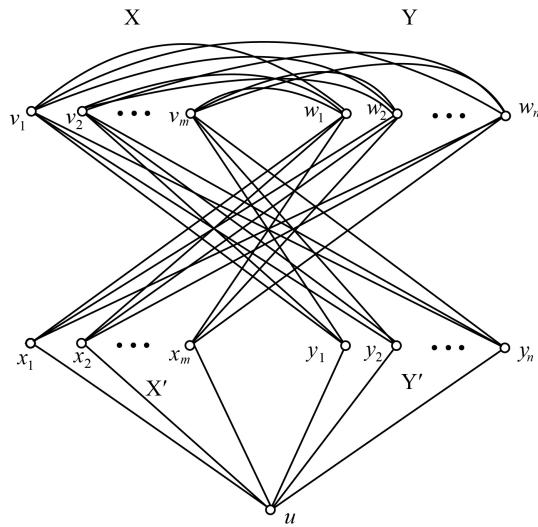
**定理 2:** 令  $K_{m,n}$  是完全二部图. 则  $\gamma(\mu(K_{m,n})) = \gamma_{wcon}(\mu(K_{m,n})) = \gamma_{con}(\mu(K_{m,n})) = 3$ .

**证明** 假设  $X$  和  $Y$  是完全二部图的两个点子集. 令  $X = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ ,  $Y = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ .  $X$  集合的拷贝点为  $X' = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ,  $Y$  集合的拷贝点为  $Y' = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  (见图 2). 对任意的  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $\{u, x_i, y_j\}$  显然是  $\mu(K_{m,n})$  的一个控制集, 故  $\gamma(\mu(K_{m,n})) \leq 3$ . 又  $\mu(K_{m,n})$  中的任意一个单点集显然不能控制除它以外的其它所有点. 因此  $\gamma(\mu(K_{m,n})) \geq 2$ . 现只需证明  $\mu(K_{m,n})$  的任意一个二元子集都不是  $\mu(K_{m,n})$  的控制集即可. 根据  $\mu(K_{m,n})$  中点的位置, 分为以下四种情形:

**情形1** 二元子集的两个点都位于  $X$  (或  $Y$ ). 不失一般性, 假设  $\{v_i, v_j\}, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, m$  是位于  $X$  的一个二元子集, 则  $X$  集的拷贝点和  $u$  点不能被控制; 同理, 若  $\{w_i, w_j\}, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$  是位于  $Y$  的一个二元子集, 则  $Y$  集的拷贝点和  $u$  点不能被控制;  $\{v_i, w_j\}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$  是位于  $X \cup Y$  的一个二元子集, 则  $u$  点不能被控制.

**情形2** 二元子集的两个点都位于  $X'$  或  $Y'$ . 假设  $\{x_i, x_j\}, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, m$  是位于  $X'$  的一个二元子集, 则  $X, Y$  的拷贝点和  $X'$  中除了  $x_i, x_j$  之外的点都不能被控制;  $\{y_i, y_j\}, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$  是位于  $Y'$  的一个二元子集, 则  $X, Y$  的拷贝点和  $Y'$  中除了  $y_i, y_j$  之外的点都不能被控制.  $\{x_i, y_j\}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$  是位于  $X' \cup Y'$  的一个二元子集, 则  $X'$  中除了  $x_i$  之外的点和  $Y'$  中除了  $y_j$  之外的点都不能被控制.

**情形3** 二元子集中的一个顶点在  $X \cup Y$ , 另一个顶点在  $X' \cup Y'$ . 假设  $\{v_i, x_j\}, i, j = 1, 2, \dots, m$  是这样一个二元子集, 则  $X$  中除了  $v_i$  之外的点和  $X'$  中除了  $x_j$  之外的点都不能被控制; 若  $\{w_i, y_j\}, i, j = 1, 2, \dots, n$  是这样一个二元子集, 则  $Y$  中除了  $w_i$  之外的点和  $Y'$  中除了  $y_j$  之外的点都不能被控制; 若  $\{v_i, y_j\}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$  是这样一个二元子集, 则  $X'$  不能被控制; 若  $\{w_i, x_j\}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$  是这样一个二元子集, 则  $Y'$  不能被控制.



**Figure 2.** Mycielskian graph of complete bipartite graph  $K_{m,n}$

**图 2.** 完全二部图  $K_{m,n}$  的 Mycielskian 图

**情形4** 二元子集中的一个顶点是  $\{u\}$ , 另一个顶点在  $X \cup Y$  或  $X' \cup Y'$  中. 假设  $\{u, v_i\}, i = 1, 2, \dots, m$  是这样一个二元子集, 则  $X$  中除了  $v_i$  之外的点都不能被控制; 若  $\{u, w_j\}, j = 1, 2, \dots, n$  是这样一个二元子集, 则  $Y$  中除了  $w_j$  之外的点都不能被控制; 若  $\{u, x_i\}, i = 1, 2, \dots, m$  是这样一个二元子集, 则  $X$  中的点都不能被控制; 若  $\{u, y_j\}, j = 1, 2, \dots, n$  是这样一个二元子集, 则  $Y$  中的点都不能被控制. 综上所述,  $\gamma(\mu(K_{m,n})) \geq 3$ . 故结论成立.

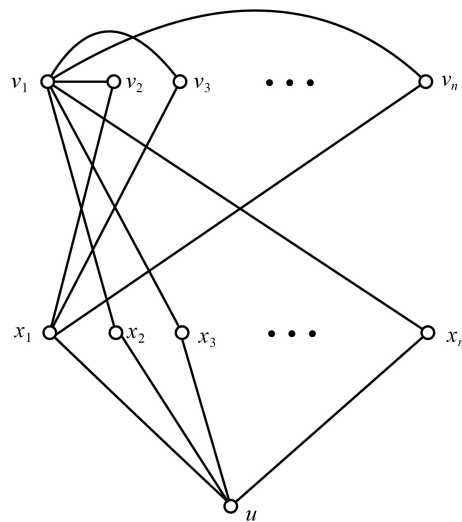
由控制集的定义可知,  $\{u, x_i, y_j\}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$  首先是  $\mu(K_{m,n})$  的一个控制集, 又由于这个集合中  $u$  点与其它两个点之间的最短路有且仅有一条且最短路的长度为1,  $d_{\mu(K_{m,n})}(x_i, y_j) = 2$ , 而  $x_i$  和  $y_j$  的一条最短路上的点  $u$  也在这个集合中, 由弱凸集的定义,  $\{u, x_i, y_j\}$  又是  $\mu(K_{m,n})$  的一个弱凸集, 因此  $\gamma_{wcon}(\mu(K_{m,n})) \leq 3$ . 由性质1 和以上的讨论可知  $\gamma_{wcon}(\mu(K_{m,n})) \geq \gamma(\mu(K_{m,n})) = 3$ , 知  $\gamma_{wcon}(\mu(K_{m,n})) \geq 3$ . 所以  $\gamma_{wcon}(\mu(K_{m,n})) = 3$ .

由于  $\{u, x_i, y_j\}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$  这个集合中  $u$  点与其它两个点之间的最短路有且仅有一条且最短路的长度为1,  $d_{\mu(K_{m,n})}(x_i, y_j) = 2$ , 而  $x_i$  和  $y_j$  的所有最短路上的点  $u$  也在这个集合中, 由凸集的定义,  $\{u, x_i, y_j\}$  又是  $\mu(K_{m,n})$  的一个凸集, 因此  $\gamma_{con}(\mu(K_{m,n})) \leq 3$ . 由性质1 和以上的讨论可知  $\gamma_{con}(\mu(K_{m,n})) \geq \gamma_{wcon}(\mu(K_{m,n})) = 3$ , 知  $\gamma_{con}(\mu(K_{m,n})) \geq 3$ . 所以  $\gamma_{con}(\mu(K_{m,n})) = 3$ .

**定理 3:** 令  $K_{1,n-1}$  是星图, 则,  $\gamma(\mu(K_{1,n-1})) = 2, \gamma_{wcon}(\mu(K_{1,n-1})) = \gamma_{con}(\mu(K_{1,n-1})) = 3$ .

**证明** 假设  $K_{1,n-1}$  的顶点集为  $V(K_{1,n-1}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 其中  $v_1$  是  $K_{1,n-1}$  的中心点, 其拷贝点集为  $V'(K_{1,n-1}) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .  $v_1$  可以控制星图中其它所有点和拷贝点集中的  $\{x_2, x_3, \dots, x_n\}$  (见图3).  $\{v_1, x_1\}$  显然是  $\mu(K_{1,n-1})$  的控制集. 故  $\gamma(\mu(K_{1,n-1})) \leq 2$ . 又  $\mu(K_{1,n-1})$  中的任意一个单点集显然不能控制除它以外的其它所有点. 因此  $\gamma(\mu(K_{1,n-1})) \geq 2$ . 综上所述,  $\gamma(\mu(K_{1,n-1})) = 2$ .

由  $\mu(K_{1,n-1})$  的结构可知, 对于任意的  $j = 1, 2, \dots, n$ , 有  $d_{\mu(K_{1,n-1})}(v_1, x_j) = 1(j \neq 1), d_{\mu(K_{1,n-1})}(u, x_j) = 1, d_{\mu(K_{1,n-1})}(v_1, u) = 2$ , 且  $ux_jv_1(j \neq 1)$  是  $u$  和  $v_1$  之间的一条最短路. 则  $\{u, x_j, v_1\} j \neq 1, j =$



**Figure 3.** Mycielskian graph of star graph  $K_{1,n-1}$

**图 3.** 星图  $K_{1,n-1}$  的 Mycielskian 图

$2, \dots, n$ , 显然是  $\mu(K_{1,n-1})$  的一个弱凸控制集, 故  $\gamma_{wcon}(\mu(K_{1,n-1})) \leq 3$ . 由性质1 和  $\gamma(\mu(K_{1,n-1})) = 2$  可知  $\gamma_{wcon}(\mu(K_{1,n-1})) \geq 2$ . 现只需证明  $\mu(K_{1,n-1})$  的任意一个二元子集都不是  $\mu(K_{1,n-1})$  的弱凸控制集即可. 根据  $\mu(K_{1,n-1})$  中点的位置, 分为以下四种情形:

**情形1** 二元子集的两个点都位于  $V(K_{1,n-1})$ . 不失一般性, 假设  $\{v_i, v_j\}, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$  是位于  $V(K_{1,n-1})$  的一个二元子集, 则  $\{v_i, v_j\}$  不是  $\mu(K_{1,n-1})$  的一个控制集, 因为点  $u$  不被  $\{v_i, v_j\}$  所控制. 则  $\{v_i, v_j\}$  不是  $\mu(K_{1,n-1})$  的弱凸控制集.

**情形2** 二元子集的两个点都位于  $V'(K_{1,n-1})$ . 假设  $\{x_i, x_j\}, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$  是位于  $V'(K_{1,n-1})$  的一个二元子集, 则  $\{x_i, x_j\}$  不是  $\mu(K_{1,n-1})$  的控制集, 因为  $V'(K_{1,n-1})$  中除了  $x_i$  和  $x_j$  之外的点都没有被控制, 也不是  $\mu(K_{1,n-1})$  的一个弱凸集, 因为  $d_{\mu(K_{1,n-1})}(x_i, x_j) = 2$ , 而  $x_i$  和  $x_j$  的所有最短路的内部顶点都不在  $\{x_i, x_j\}$  中. 则  $\{x_i, x_j\}$  不是  $\mu(K_{1,n-1})$  的弱凸集控制集.

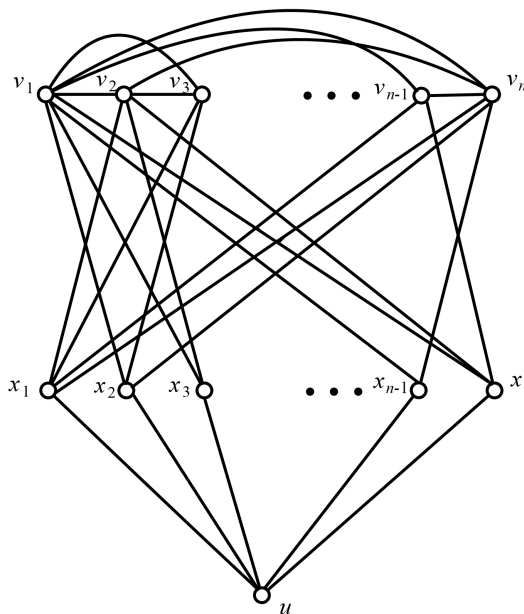
**情形3** 二元子集中的一个顶点在  $V(K_{1,n-1})$ , 另一个顶点在  $V'(K_{1,n-1})$ . 假设这个二元子集是  $\{v_1, x_1\}$ , 由于  $d_{\mu(K_{1,n-1})}(v_1, x_1) = 2$  而它们之间的最短路的内部顶点不在  $\{v_1, x_1\}$  中, 则  $\{v_1, x_1\}$  不是  $\mu(K_{1,n-1})$  的弱凸控制集; 若这个二元子集是  $\{v_1, x_j\}, j = 2, \dots, n$ , 则  $x_1$  不能被控制; 若对任意的  $i, j \neq 1, i, j = 2, 3, \dots, n$ , 这个二元子集是  $\{v_i, x_j\}$ , 则这个集合中的点不能控制  $\mu(K_{1,n-1})$  中的所有点. 综上所述, 一个顶点在  $V(K_{1,n-1})$ , 另一个顶点在  $V'(K_{1,n-1})$  中的二元子集不是  $\mu(K_{1,n-1})$  的弱凸控制集.

**情形4** 二元子集中的一个顶点是  $\{u\}$ , 另一个顶点在  $V(K_{1,n-1})$  或  $V'(K_{1,n-1})$  中. 假设这个二元子集是  $\{u, x_j\}, j = 1, 2, \dots, n$  则  $\{u, x_j\}$  是  $\mu(K_{1,n-1})$  的一个弱凸集, 但不是  $\mu(K_{1,n-1})$  的一个控制集, 因为这个集合不能控制  $\mu(K_{1,n-1})$  中的所有点; 若二元子集是  $\{u, v_1\}$ , 则点  $u$  和点  $v_1$  之间的最短路上的点不在这个集合内; 若二元子集是  $\{u, v_j\}, j \neq 1, j = 2, 3, \dots, n$ , 则  $V(K_{1,n-1})$  中的点  $v_2, v_3, \dots, v_n$ , 不能被控制. 综上所述, 一个顶点是  $\{u\}$ , 另一个顶点在  $V(K_{1,n-1})$  或  $V'(K_{1,n-1})$  中的二元子集不是  $\mu(K_{1,n-1})$  的弱凸控制集. 综上所述,  $\gamma_{wcon}(\mu(K_{1,n-1})) \geq 3$ . 故结论成立.

由控制集的定义可知,  $\{u, x_1, x_j\}, j \neq 1, j = 2, 3, \dots, n$  首先是  $\mu(K_{1,n-1})$  的一个控制集, 又由于点  $u$  与其它两个点之间的最短路有且仅有一条且最短路的长度为1,  $d_{\mu(K_{1,n-1})}(x_1, x_j) = 2$  且这两个点之间的最短路上的点也在  $\{u, x_1, x_j\}$  中, 由凸集的定义,  $\{u, x_1, x_j\}$  又是  $\mu(K_{1,n-1})$  的一个凸集, 因此  $\gamma_{con}(\mu(K_{1,n-1})) \leq 3$ . 由性质1和以上的讨论可知  $\gamma_{con}(\mu(K_{1,n-1})) \geq \gamma_{wcon}(\mu(K_{1,n-1})) = 3$ , 知  $\gamma_{con}(\mu(K_{1,n-1})) \geq 3$ . 所以  $\gamma_{con}(\mu(K_{1,n-1})) = 3$ .

**定理 4:** 令  $W_n$  是个轮图, 则  $\gamma(\mu(W_n)) = 2, \gamma_{wcon}(\mu(W_n)) = \gamma_{con}(\mu(W_n)) = 3$ .

**证明** 假设  $W_n$  的顶点集  $V(W_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 其中  $v_1$  是中心点, 其拷贝点集  $V'(W_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .  $v_1$  可以控制  $V(W_n)$  中的所有点和  $V'(\mu(W_n))$  中的拷贝点  $\{x_2, x_3, \dots, x_n\}$  (见图 4). 显然  $\{v_1, x_1\}$  是  $\mu(W_n)$  的一个控制集. 故  $\gamma(\mu(W_n)) \leq 2$ . 又  $\mu(W_n)$  中的任意一个单点集显然不能控制除它以外的其他所有点. 因此  $\gamma(\mu(W_n)) \geq 2$ . 综上所述,  $\gamma(\mu(W_n)) = 2$ .



**Figure 4.** Mycielskian graph of wheel graph  $W_n$

**图 4.** 轮图  $W_n$  的 Mycielskian 图

由  $\mu(W_n)$  的结构可知, 对于任意的  $j = 2, \dots, n$ , 有  $d_{\mu(W_n)}(v_1, x_j) = 1, d_{\mu(W_n)}(u, x_j) = 1, d_{\mu(W_n)}(v_1, u) = 2$ , 且  $ux_jv_1$  是  $u$  和  $v_1$  之间的一条最短路. 则  $\{u, x_j, v_1\}$  显然是  $\mu(W_n)$  的一个弱凸控制集, 故  $\gamma_{wcon}(\mu(W_n)) \leq 3$ . 由性质1 和  $\gamma(\mu(W_n)) = 2$  可知,  $\gamma_{wcon}(\mu(W_n)) \geq 2$ . 现只需证明  $\mu(W_n)$  的任意一个二元子集都不是  $\mu(W_n)$  的弱凸控制集即可. 根据  $\mu(W_n)$  中点的位置, 分为以下四种情形:

**情形1** 二元子集的两个点都位于  $V(W_n)$ . 不失一般性, 假设  $\{v_i, v_j\}, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$  是位于  $V(W_n)$  的一个二元子集, 则  $\{v_i, v_j\}$  不是  $\mu(W_n)$  的一个控制集, 因为无论取哪两个点  $u$  都不能被  $\{v_i, v_j\}$  所控制. 则  $\{v_i, v_j\}$  不是  $\mu(W_n)$  的弱凸控制集.

**情形2** 二元子集的两个点都位于  $V'(W_n)$ . 假设  $\{x_i, x_j\}, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$  是位于  $V'(W_n)$  的一个二元子集, 则  $\{x_i, x_j\}$  不是  $\mu(W_n)$  的控制集, 因为  $V'(W_n)$  中除了  $x_i$  和  $x_j$  之外的点都没有被控



制,也不是 $\mu(W_n)$ 的一个弱凸集,因为 $d_{\mu(W_n)}(x_i, x_j) = 2$ ,而 $x_i$ 和 $x_j$ 的所有最短路的内部顶点都不在 $\{x_i, x_j\}$ 中.则 $\{x_i, x_j\}$ 不是 $\mu(W_n)$ 的弱凸集控制集.

**情形3**二元子集中的一个顶点在 $V(W_n)$ ,另一个顶点在 $V'(W_n)$ .假设这个二元子集是 $\{v_1, x_1\}$ ,由于 $d_{\mu(W_n)}(v_1, x_1) = 2$ 而它们之间的最短路的内部顶点不在 $\{v_1, x_1\}$ 中,则 $\{v_1, x_1\}$ 不是 $\mu(W_n)$ 的弱凸控制集;若这个二元子集是 $\{v_1, x_j\}, j = 2, \dots, n$ ,则 $x_1$ 不能被控制;若这个二元子集是 $\{v_i, x_j\}, i, j \neq 1$ ,则这个集合中的点不能控制 $\mu(W_n)$ 中的所有点.综上所述,一个顶点在 $V(W_n)$ ,另一个顶点在 $V'(W_n)$ 中的二元子集不是 $\mu(W_n)$ 的弱凸控制集.

**情形4**二元子集中的一个顶点是 $\{u\}$ ,另一个顶点在 $V(W_n)$ 或 $V'(W_n)$ 中.假设这个二元子集是 $\{u, x_j\}, j = 1, 2, \dots, n$ 则 $\{u, x_j\}$ 是 $\mu(W_n)$ 的一个弱凸集,但不是 $\mu(W_n)$ 的一个控制集,因为这个集合不能控制 $\mu(W_n)$ 中的所有点;若二元子集是 $\{u, v_1\}$ ,则点 $u$ 和点 $v_1$ 之间的最短路上的点不在这个集合内;若二元子集是 $\{u, v_j\}, j \neq 1$ ,则点 $u$ 和点 $v_j$ 之间的最短路上的点不在这个集合内且 $\{u, v_j\}$ 不能控制 $\mu(W_n)$ 中的所有点.综上所述,一个顶点是 $\{u\}$ ,另一个顶点在 $V(W_n)$ 或 $V'(W_n)$ 中的二元子集不是 $\mu(W_n)$ 的弱凸控制集.综上所述可知, $\gamma_{wcon}(\mu(W_n)) \geq 3$ .故结论成立.

由控制集的定义可知,对任意的 $j \neq 1, j = 1, 2, \dots, n, \{u, x_1, x_j\}$ 首先是 $\mu(W_n)$ 的一个控制集,又由于点 $u$ 与其他两个点之间的最短路由且仅有一条且最短路的长度为1, $d_{\mu(W_n)}(x_1, x_j) = 2$ 且这两个点之间的最短路上的点也在 $\{u, x_1, x_j\}$ 中,由凸集的定义, $\{u, x_1, x_j\}$ 又是 $\mu(W_n)$ 的一个凸集,因此 $\gamma_{con}(\mu(W_n)) \leq 3$ .由性质1和以上的讨论可知 $\gamma_{con}(\mu(W_n)) \geq \gamma_{wcon}(\mu(W_n)) = 3$ ,知 $\gamma_{con}(\mu(W_n)) \geq 3$ .所以 $\gamma_{con}(\mu(W_n)) = 3$ .

## 基金项目

国家自然科学基金项目(11761070, 61662079); 2021年新疆维吾尔自治区自然基金联合项目(2021D01C078); 2020年新疆师范大学一流专业、一流课程项目资助。

## 参考文献

- [1] Topp, J. (2002) Personal Communication. Gdańsk University of Technology, Gdańsk.
- [2] Lemańska, M. (2004) Weakly Convex and Convex Domination Numbers. *Opuscula Mathematica*, **24**, 181-188.
- [3] Raczek, J. (2004) NP-Completeness of Weakly Convex and Convex Dominating Set Decision Problems. *Opuscula Mathematica*, **24**, 189-196.
- [4] Raczek, J. and Lemańska, M. (2010) A Note on the Weakly Convex and Convex Domination Numbers of a Torus. *Discrete Applied Mathematics*, **158**, 1708-1713.  
<https://doi.org/10.1016/j.dam.2010.06.001>
- [5] Lemańska, M. (2010) Nordhaus-Gaddum Results for Weakly Convex Domination Number of a Graph. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **30**, 257-263.  
<https://doi.org/10.7151/dmgt.1491>

- [6] Dettlaff, M., Kosari, S., Lemańska, M. and Sheikholeslami, S.M. (2016) Weakly Convex Domination Subdivision Number of a Graph. *Filomat*, **30**, 2101-2110.  
<https://doi.org/10.2298/FIL1608101D>
- [7] Rosicka, M. (2019) Convex and Weakly Convex Domination in Prism Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **39**, 741-755. <https://doi.org/10.7151/dmgt.2207>
- [8] Dettlaff, M., Lemańska, M. and Osula, D. (2019) On the Connected and Weakly Convex Domination Numbers. arXiv:1902.07505v1
- [9] Mycielski, J. (1995) Sur le coloriage des graphs. *Colloquium Mathematicum*, **3**, 161-162.  
<https://doi.org/10.4064/cm-3-2-161-162>