Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(10), 3407-3411
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1010358

Hans汉斯

无核的*p*度1-正则Cayley图

凌 波

云南民族大学数学与计算机科学学院，云南 昆明

收稿日期：2021年9月21日；录用日期：2021年10月14日；发布日期：2021年10月22日

摘 要

设$\Gamma = Cay(G,S)$是群G上的Cayley图。称Γ为无核(关于G)的Cayley图，如果G在X中是无核的，其中$G \le X \le Aut\Gamma$。本文对无核的p度1-正则Cayley图进行分类研究，其中p是一个奇素数。

关键词

无核Cayley图，单群，自同构群，正规Cayley图

Core-Free 1-Regular Cayley Graphs of Valency *p*

Bo Ling

School of Mathematics and Computer Sciences, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: Sep. 21st, 2021; accepted: Oct. 14th, 2021; published: Oct. 22nd, 2021

Abstract

Let $\Gamma = Cay(G,S)$ be a Cayley graph of group G. Then Γ is said to be core-free if G is core-free in X, where $G \le X \le Aut\Gamma$. We classify the p-valent 1-regular Cayley graphs in this paper, where p is a prime.

Keywords

Core-Free Cayley Graph, Simple Group, Automorphism Group, Normal Cayley Graph

文章引用: 凌波. 无核的 *p* 度 1-正则 Cayley 图[J]. 应用数学进展, 2021, 10(10): 3407-3411.
DOI: 10.12677/aam.2021.1010358

1. 引言

在群与图研究领域中，1-正则图一直是一个主要研究对象。自 1952 年 R. Frucht 在文献[1]中给出第一个 3 度 1-正则图的例子后，Marusic，Malnic 等人在文献[2] [3]构造出了两类不同的 4 度 1-正则图的无限族。而文献[4]中给出连通 3 度 Cayley 图是 1-正则图的一个充要条件，并利用交错群 A_n 分别构造了连通 3 度 1-正则和 2-正则 Cayley 图的无限族。而文献[5]则显示了 3 度 1-正则图在地图上的一些重要应用。

本文主要尝试对于每一个奇素数 p，分类无核的 p 度 1-正则 Cayley 图。

具体的，设 $\Gamma = Cay(G,S)$ 为 $(X,1)$-正则 Cayley 图，其中 $G \le X \le Aut\Gamma$。记 $H = X_1$。则 H 作用在 S 上正则且 $H \cong Z_p$。本文对 G 在 X 中是无核的情形做分类研究。

2. 引理

由文献[6] (性质 3.2)，有下面的命题：

命题 2.1 设 p 为奇素数，$\Gamma = Cay(G,S)$ 为 p 度 $(X,1)$-正则 Cayley 图，其中 $G \le X \le Aut\Gamma$。设 $H = X_1$。则存在对合 τ 满足 $\tau \in (G \cap X) - N_X(H)$，使得 $\Gamma \cong Cos(X,H,\tau)$，$X = \langle H,\tau \rangle$，$S = G \cap H\tau H$。■

下面的引理给出，当 X 为奇素数级的本原置换群且 H 为其循环正则子群时，则 X 和 H 完全被确定。注意到 $\Gamma = Cay(G,S)$ 为 p 度 $(X,1)$-正则 Cayley 图，由文献[7] (推论 1.2)，得到如下引理：

引理 2。1 设 p 为奇素数，若 X 为 p 级本原置换群且 X 包含循环正则子群 H，则：

1) $(X,p) = (PSL(2,11),11),(M_{11},11),(M_{23},23)$；

2) $PGL(d,q) \le X \le P\Gamma L(d,q)$，且 $p = (q^d - 1)(q-1)$；

3) $X = A_p$ 或者 S_p，其中 $p \ge 5$。

证明： 由文献[7] (推论 1.2)，仅需排除 $(X,p) = (P\Sigma L(2,8),9)$ 和 $H \cong Z_p \le X \le AGL(1,p)$ 的情形。由于 p 为奇素数，所以前者不可能发生。若 $X \le AGL(1,p)$ 为仿射型本原置换群。由于 $AGL(1,p) \cong Z_p : Z_{p-1}$ 且 $X_1 \cong Z_p$，我们有 $|G| = |X : X_1| \le |Z_{p-1}|$ 与 $\Gamma = Cay(G,S)$ 为 $(X,1)$-正则 Cayley 图矛盾。■

下面的引理给出当 X 为 A_p 或者 S_p 时，其极大子群的分类。由文献[8]或者文献[9]，容易得到下面的引理：

引理 2.2 设 $p \ge 5$ 为素数，若 $X = A_p$ 或者 S_p。令 G 为 X 的极大子群满足 $G \ne A_p$。则 $G \cong AGL(1,p) \cap X$ 或者 G 为几乎单型的本原置换群。■

令 N 为 X 的包含在 G 的极大正规子群，也就是，$N = Core_X(G)$。由文献[6] (性质 2.1)有下面的引理：

引理 2.3 设 p 为奇素数，$\Gamma = Cay(G,S)$ 为 p 度 $(X,1)$-正则 Cayley 图，其中 $G \le X \le Aut\Gamma$。令 $N = Core_X(G)$。则：

1) 若 $G = N$，则 $X \le G : Aut(G,S)$ 且 $X_1 \le Aut(G,S)$。

2) 若 $|G:N| = 2$，则存在 $D \subseteq N$，其中 $1 \in D$，$\langle D \rangle = N$ 且 $\Gamma \cong BiCay(N,D)$。

3) $|G:N| > 2$；Γ_N 为 G/N 的无核 $(X/N,1)$-正则 Cayley 图且 Γ 为 Γ_N 的正规覆盖。

此外，$G/N \le X/N \le Aut\Gamma_N$。■

3. 主要结论

定理 3.1 设 $\Gamma = Cay(G,S)$ 为 p 度 1-正则 Cayley 图，其中 p 为奇素数。令 $A = Aut\Gamma$，若 $Core_A(G)=1$，则 Γ 同构意义下为表 1 所列图之一。

Table 1. Core-free 1-regular Cayley graphs of valency p
表 1. 无核 p 度 1-正则 Cayley 图

$Aut\Gamma$	G	$Val\Gamma$	$n(\Gamma)$	备注
M_{11}	M_{10}	11	2	
M_{23}	M_{22}	23	小于等于 15	
A_p	A_{p-1}	p		$p \ge 5$
S_p	S_{p-1}	p		$p \ge 5$
$Soc(Aut\Gamma) = PSL(d,q)$	P_1	p		$(q^d-1)/q-1 = p$

注 3.1 在表 1 最后一行，$A = PSL(d,q)\cdot O$ 其中 $O \le P\Gamma L(d,q)/PSL(d,q)$ 且 d 为素数。$P_1 = \left[q^{d-1}\right]\cdot Z_{(q-1)/(q-1,d)}\cdot PSL(d-1,q)\cdot Z_{(q-1,d-1)}\cdot O$。此外，在表 1 的第四列中，$n(\Gamma)$ 表示互不同构图的个数。

证明： 设 $\Gamma = Cay(G,S)$ 为 p 度 $(X,1)$-正则 Cayley 图，其中 p 为奇素数，$G \le X \le Aut\Gamma$。设 G 在 X 中无核。注意到 $H = X_1 \cong Z_p$。考虑 X 在集合 $[X:G]$ 上的右乘作用，则作用忠实传递。此时，X 为 p 级传递置换群。在这个作用下，X 本原且包含循环正则子群 H。由引理 2.1，我们有以下几个选择 $(X,p) = (PSL(2,11),11),(M_{11},11),(M_{23},23)$，$X = A_p$ 或者 S_p，或者，$PGL(d,q) \le X \le P\Gamma L(d,q)$，且 $p = (q^d-1)(q-1)$。我们首先判断图的存在性，由性质 2.1，仅需考虑 $X - N_X(H)$ 中对合的存在性。

1) 设 $(X,p) = (PSL(2,11),11)$。则 $H = Z_{11}$ 且 G 在 X 中的指数为 11。设 M 为 X 的极大子群满足 $N_X(H) \le M$。由文献[10]，X 的极大子群有：A_5，$Z_{11}:Z_5$，D_{12}。另一方面，$Z_{11} \cong H \le M$，所以 $M \cong Z_{11}:Z_5$。显然有 $M \le N_X(H)$，因而 $N_X(H) = M \cong Z_{11}:Z_5$。注意到 $2 \| PSL(2,11)|$，2 不整除 $|M|$，所以存在对合 $\tau \in X - N_X(H) = PSL(2,11) - Z_{11}:Z_5$。我们声称 $\langle H,\tau\rangle = X$ 若不然，$\langle H,\tau\rangle$ 包含在 X 的一个极大子群 M' 里，由于 $11 \| M'|$ 且 X 的所有极大子群为：A_5，$Z_{11}:Z_5$，D_{12} 因而 $\langle H,\tau\rangle \le Z_{11}:Z_5$，这与 $\tau \notin M = Z_{11}:Z_5$ 矛盾。故，$\langle H,\tau\rangle = X$。另一方面，$|X:G| = |H| = 11$，由 X 的极大子群结构，我们有 $G \cong A_5$。下面我们考虑这种情形下，存在互不同构图的个数。令 $a1 = (3,7,9,4,5)(6,8,12,10,11)$，$b1 = (1,8,2)(3,4,7)(5,12,11)(6,9,10)$。为了方便证明，我们不妨设 $X = PSL(2,11) = \langle a1,b1\rangle$。令 $u1 = a1^{-1}b1a1^2b1a1^{-1} = (1,11,10,2,6,5,3,4,7,9,12)$。则 $H = Z_{11} = \langle u1\rangle$。令 $v1 = b1^{-1}a1^2b1 = (2,6,9,11,5)(3,7,4,10,12)$。则 $N_X(H) = Z_{11}:Z_5 = \langle u1,v1\rangle$。有文献[10]，$X$ 的所有对合在 $N_X(H)$ 的共轭作用下仅有一个轨道，因而同构意义下，这种情况下只存在一个图。此时，我们可以设 $t1 = a1(a1b1)^2 = (1,11)(2,8)(3,5)(4,12)(6,9)(7,10)$。令 $\Gamma_1 = Cos(X,H,t1)$。由 MAGMA 的计算，此时 $\Gamma_1 \cong PGL(2,11)$。由于 $X = PSL(2,11) < Aut\Gamma_1$，因而在这种情形下不存在无核 p 度 1-正则 Cayley 图。

2) 设 $(X,p) = (M_{11},11)$。设 M 为 X 中包含 $N_X(H)$ 的极大子群。由文献[10]，X 的极大子群有：$M_{10}, PSL(2,11), M_9:Z_2, S_5, M_8:S_3$。由于 $H \le M$，也就是 $11 \| M|$，因而 $M \cong PSL(2,11)$。由本定理 1) 的证明我们有 $N_X(H) = Z_{11}:Z_5$。显然存在 2 阶元 $\tau \in X - N_X(H) = M_{11} - Z_{11}:Z_5$，进一步的我们可以在 $M_{11} - PSL(2,11)$ 里面取得 τ。若不然，$PSL(2,11)$ 包含了 M_{11} 的所有对合。设 M_{11} 的所有对合生成的子群为 P，此时 $P \le PSL(2,11)$ 且 $P \lhd M_{11}$，与 M_{11} 为单群矛盾。若 $\langle H,\tau\rangle < M_{11}$，则 $\langle H,\tau\rangle \le M'$，其中 M' 为 M_{11}

的极大子群。又 $H \le M'$，故 $11 \| M'|$，因而 $M' \cong PSL(2,11)$ 这与 $\tau \notin PSL(2,11)$ 矛盾。所以，$\langle H,\tau\rangle = M_{11}$。令 $a2=(1,10)(2,8)(3,11)(5,7)$，$b2=(1,4,7,6)(2,11,10,9)$。令 $X=M_{11}=\langle a2,b2\rangle$。令 $u2=(b2^{-1}a2)^5=(1,10,9,4,2,7,8,5,11,6,3)$，$v2=b2^{-1}(a2b2)^4(b2a2)^2b2(b2a2)^2=(2,7,6,4,10)(3,5,8,9,11)$。则 $H=Z_{11}=\langle u2\rangle$，$N_X(H)=Z_{11}:Z_5=\langle u2,v2\rangle$。令

$$m=b2^{-1}a2b2a2b2^{-1}\left(a2b2^2a2b2^{-1}\right)^2(a2b2)^2=(1,8)(4,10)(5,6)(7,11),$$

$$n=b2^{-1}(a2b2)^2(b2a2)^2b2^{-1}=(1,9,11)(2,3,4)(6,10,8),$$

则 X 的包含 $N_X(H)$ 的极大子群 $M=PSL(2,11)=\langle m,n\rangle$。另一方面，对合 $\tau\in X-M=M_{11}-PSL(2,11)$，因此满足条件的 τ 共 110 个且在 $N_X(H)$ 的共轭作用下恰好为 2 个轨道。不妨设其代表元素为：$t2=a2, t3=b2^2a2b2^2=(1,5)(2,7)(3,9)(8,10)$。下面我们考虑图 $\Gamma_{2,1}=Cos(X,H,t2)$ 和 $\Gamma_{2,2}=Cos(X,H,t3)$。通过 MAGMA 的计算，我们有 $Aut\Gamma_{2,1}=M_{11}$，$Aut\Gamma_{2,2}=M_{11}$ 且 $\Gamma_{2,1}$ 与 $\Gamma_{2,2}$ 互不同构，因此在这种情形下存在两个互不同构的无核 11 度 1-正则 Cayley 图。最后，由于 G 在 X 中的指数为 11，从 X 的所有极大子群结构我们得到 $G\cong M_{10}$。

3) 设 $(X,p)=(M_{23},23)$ 此时，$H=Z_{23}$。另一方面 M_{23} 的所有极大子群为(由[10])：M_{22}，$PSL(3,4):Z_2$，$Z_2^4:A_7$，A_8，M_{11}，$Z_2^4:(Z_3\times A_5):Z_2$，$Z_{23}:Z_{11}$。设 M 为 M_{23} 中包含 $N_{M_{23}}(Z_{23})$ 的极大子群。由于 $H=Z_{23}\le M$，也就是 $23\|M|$。通过计算 M_{23} 极大子群的阶可以得到 $M\cong Z_{23}:Z_{11}$。显然 $Z_{23}:Z_{11}\le N_{M_{23}}(Z_{23})$，所以 $Z_{23}:Z_{11}=N_{M_{23}}(Z_{23})$。此时，与 1) 类似的讨论，我们可以得到存在对合 $\tau\in M_{23}-N_{M_{23}}(Z_{23})$ 使得 $\langle H,\tau\rangle=M_{23}$。注意到 $|X:G|=|H|=23$，通过计算 M_{23} 极大子群在 M_{23} 中的指数得到 $G\cong M_{22}$。另一方面，由 MAGMA 的计算，M_{23} 中所有对合在 $N_{M_{23}}(Z_{23})$ 的共轭作用下恰好产生 15 个轨道。因此，在这种情形下我们得到互不同构图的个数 $n(\Gamma)\le 15$。

4) 设 $PGL(d,q)\le X\le P\Gamma L(d,q)$，且 $p=(q^d-1)(q-1)$。此时 $H=Z_p$ 且 $X\le PSL(d,q)\cdot O$，其中 $O\le P\Sigma L(d,q)/PSL(d,q)$。此时，由文献[11]，我们可以得到 $G\cong\left[q^{d-1}\right]\cdot Z_{(q-1)/(q-1,d)}\cdot PSL(d-1,q)\cdot Z_{(q-1,d-1)}\cdot O$。下面设 M 为 $PSL(d,q)$ 中包含 $N_X(Z_p)$ 的极大子群。则存在 2-元素 $\tau\in X-M$。若不然，M 包含了 $PSL(d,q)$ 的所以 Sylow2-子群。设 $P_1,P_2,\cdots,P_i$ 为 $PSL(d,q)$ 的所有 Sylow2-子群。则显然有 $\langle P_1,P_2,\cdots,P_i\rangle\le M$ 且 $\langle P_1,P_2,\cdots,P_i\rangle\lhd PSL(d,q)$。故 $M=PSL(d,q)$，这与 M 为 $PSL(d,q)$ 的极大子群矛盾。另一方面，由 M 的极大性及 $\tau\notin M$，有 $\langle H,\tau\rangle=X$。此外，由文献[12] (注 10.11)，有 d 必为素数。

5) 设 $X=S_p$ 其中 $p\ge 5$ 为素数。由于 $H=Z_p$ 且 $|X:G|=|H|=p$，因而 $G=S_{p-1}$。也就是 $(X,G)=(S_p,S_{p-1})$。设 M 为 X 的极大子群满足 $N_X(H)\le M$。如果 $M=A_p$。则显然存在奇置换的 2 阶元 $\tau\in S_p-A_p$ (此时 $\tau\notin N_X(H)$)使得 $\langle H,\tau\rangle=X$。因此，陪集图 $Cos(X,H,\tau)$ 即为满足我们条件的 Cayley 图。下面我们假设 $M\ne A_p$。由引理 2.2，$M\cong AGL(1,p)\cap X$ 或者 M 为作用在 $[X:G]$ 的几乎单型本原置换群。我们先假设 $M\cong AGL(1,p)\cap X$。注意到 $AGL(1,p)\cong Z_p:Z_{p-1}$，因而 $M\cong(Z_p:Z_{p-1})\cap X$。此时显然有 $M\le N_X(H)$，所以 $N_X(H)=M\cong(Z_p:Z_{p-1})\cap X$。因为 M 为 X 的极大子群，因而存在对合 $\tau\in X-N_X(H)=X-(Z_p:Z_{p-1})\cap X$ 满足 $\langle H,\tau\rangle=X$。下面我们假设 M 为几乎单型本原置换群。此时亦存在对合 $\tau\in X-M$ 使得 $\langle H,\tau\rangle=X$。若不然，M 包含了 X 的所以 2 阶元。设 X 的所以 2 阶元生成的子群为 P，则 $P\le M$ 且 $P\lhd X$。另一方面，$X=S_p$ 的所有非单位元群正规子群为：S_p，A_p。这使得 $P=M\cong A_p$，与 M 为 X 的极大子群且 $M\ne A_p$ 矛盾。

6) 我们最后设 $X=A_p$，其中 $p\ge 5$ 为素数。由于在 X 中指数为 p 的子群同构于 A_{p-1}，所以 $G\cong A_{p-1}$。设 M 为 X 中包含 $N_X(H)$ 的极大子群。由引理 2.2，我们有 $M\cong AGL(1,p)\cap X=(Z_p:Z_{p-1})\cap X$。显然存在对合 $\tau\in X-M$ 使得 $\langle H,\tau\rangle=X$。若不然，$\langle H,\tau\rangle\le M'$ 其中 M' 为 X 的极大子群。而 $p\ge 5$ 为素数，引理

2.2 显示 M' 只能为 $(Z_p : Z_{p-1}) \cap X$ ，也就是 $M' = M$ 这与 $\tau \notin M$ 矛盾。因而，$Cos(X, H, \tau)$ 即为满足我们条件的 Cayley 图。■

基金项目

国家自然科学基金项目(12061089，11701503)；云南省教育厅科学研究基金项目(2017ZZX086)。

参考文献

[1] Frucht, R. (1952) A One-Regular Graph of Degree Three. *Canadian Journal of Mathematics*, **4**, 240-247. https://doi.org/10.4153/CJM-1952-022-9

[2] Marusic, D. (1997) A Family of One-Regular Graphs of Valency 4. *European Journal of Combinatorics*, **18**, 59-64. https://doi.org/10.1006/eujc.1995.0076

[3] Malnic, A., Marusicm D. and Seifter, N. (1999) Constructing Infinite One-Regular Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **20**, 845-853. https://doi.org/10.1006/eujc.1999.0338

[4] 徐尚进. 具有单群传递作用的小度数图[D]: [博士学位论文]. 北京: 北京大学, 2003.

[5] Marusic, D. and Nedela, R. (1998) Maps and Half-Transitive Graphs of Valency 4. *European Journal of Combinatorics*, **19**, 345-354. https://doi.org/10.1006/eujc.1998.0187

[6] Li, J.J. and Lu, Z.P. (2009) Cubic s-Arc-Transitive Cayley Graphs. *Discrete Mathematics*, **309**, 6014-6025.

[7] Li, C.H. (2003) The Finite Primtive Permutation Groups Containing an Abelian Regular Subgroup. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **87**, 725-747. https://doi.org/10.1112/S0024611503014266

[8] Liebeck, M.W., Praeger, C.E. and Saxl, J. (1987) A Classification of the Maximal Subgroups of the Finite Alternating and Symmetric Groups. *Journal of Algebra*, **111**, 365-383. https://doi.org/10.1016/0021-8693(87)90223-7

[9] Wilson, R.A. (2009) The Finite Simple Groups. Springer, London. https://doi.org/10.1007/978-1-84800-988-2

[10] Conway, J.H., Curtis, R.T., Norton, S.P., Parker, R.A. and Wilson, R.A. (1985) Atlas of Finite Groups. Oxford University Press, London/New York.

[11] Gameron, P.J. (1999) Permutation Groups. Cambridge University Press, Cambridge.

[12] Huppert, B. and Blackburn, N. (1982) Finite Groups III. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-67997-1