

考虑不同时段接触数和疫苗接种因素的 COVID-19动态SEIR模型

张傲轩¹, 于洁², 杜佳惠², 马自玲², 赵秉新^{2*}

¹宁夏大学物理与电子电气工程学院, 宁夏 银川

²宁夏大学数学统计学院, 宁夏 银川

收稿日期: 2021年9月13日; 录用日期: 2021年10月6日; 发布日期: 2021年10月18日

摘要

随着COVID-19的肆虐传播, 全球大部分国家都采取了相应的应对措施, 通过构建合理的数学模型, 可以科学地分析传染病在不同地区的发展趋势并对发展阶段进行合理的评估, 具有重要的现实意义。自2020年12月初, 部分国家开始接种新冠疫苗。本文建立了考虑不同时段接触数和疫苗接种因素的SEIRV模型, 并对疫情的发展做了模拟。利用英国疫情数据进行验证, 模型拟合结果与实际情况吻合的很好, 表明模型具有较好的拟合能力。此外, 根据新冠疫苗的接种特点, 分析了接种率和接种时间对疫情的影响, 结果表明第一针接种率和接种时间的影响较大, 居民应尽可能普遍、尽早地接种疫苗。

关键词

COVID-19, SEIR模型, 疫苗接种, 数值模拟

Dynamic SEIR Model of COVID-19 Considering Exposure and Vaccination at Different Time Periods

Jingxuan Zhang¹, Jie Yu², Jiahui Du², Ziling Ma², Bingxin Zhao^{2*}

¹School of Physics and Electronic-Electrical Engineering, Ningxia University, Yinchuan Ningxia

²School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan Ningxia

Received: Sep. 13th, 2021; accepted: Oct. 6th, 2021; published: Oct. 18th, 2021

*通讯作者。

文章引用: 张傲轩, 于洁, 杜佳惠, 马自玲, 赵秉新. 考虑不同时段接触数和疫苗接种因素的 COVID-19 动态 SEIR 模型 [J]. 应用数学进展, 2021, 10(10): 3308-3316. DOI: 10.12677/aam.2021.1010347

Abstract

With the spread of COVID-19, most countries in the world have taken corresponding measures to deal with it. It is of great practical significance to scientifically analyze the development trend of infectious diseases in different regions and reasonably evaluate the development stages through the construction of reasonable mathematical models. Starting in early December 2020, some countries began to vaccinate against COVID-19. In this paper, a SEIRV model considering exposure and vaccination at different time periods was established, and the development of the epidemic was simulated. The results of the model fit well with the actual situation by using the epidemic data of the UK, indicating that the model has good fitting ability. In addition, according to the vaccination characteristics of the new coronavirus vaccine, the effects of vaccination rate and vaccination time on the epidemic were analyzed. The results showed that the first vaccination rate and vaccination time had a greater impact, and the population should be vaccinated as widely and as soon as possible.

Keywords

COVID-19, SEIR Model, Vaccination, The Numerical Simulation

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

新型冠状病毒肺炎(COVID-19)以其高传播效率、严重感染后果以及捉摸不定的变异时间对人类健康造成持续不断的威胁。在全球共同抗击新冠肺炎的过程中,相关科研人员从不同角度对 COVID-19 进行了分析与研究。

流行病的数学建模可以描述传染病的传播,并预测其未来的发展方向,这一研究对于控制传染病传播的公共政策的定义至关重要。疫情发展初期,许多学者利用模型对 COVID-19 传播的分析与预测做出了定量研究,对疫情防控起到了积极作用。早期相关团队[1]-[6]对传统的 SEIR 模型进行改进,应用于 COVID-19 防控的预测和评估,通过调整参数,探讨了影响疫情的关键因素和不同地区防控隔离等手段对疫情的控制,包括去除率、每日接触易感者的平均感染人数和每天接触易感者的平均暴露人数,结合环境和社会距离建立了高精度的数学模型。Zisad 等[7]结合了 SEIR (易感性、暴露性、感染性、去除性)流行病学模型和神经网络,构建出比一般 SEIR 模型更准确的综合模型。Ivorra 等[8]在 COVID-19 上建立了一个划分模型,将检测到的病例占实际感染病例总数的比例作为一个重要因素。谭键滨等[9]提出了可估计未隔离感染者数和时变可再生数的 P-SIHR 概率图模型,模型能够对在干预政策下未来疫情发展情况进行有效预测。Liu 等[10]通过对意大利的疫情控制措施与中国广东省进行比较,建立了 SSEIR 模型。Xu 等人[11]提出了一种广义分数阶 SEIQR 模型,并对 COVID-19 在美国的流行趋势进行预测分析。

近期,疫苗接种计划的进行对 COVID-19 的流行趋势产生一定的影响。很多学者利用数学建模对疫苗的影响进行分析,王昕炜等[12]在 SEIR 模型的基础上,引入了时滞参数刻画出了潜伏期的特性。同时,将传染系数改写为季节性变化参数,并通过引入疫苗接种和时变的成功免疫率,建立了含有时滞的时变受控 SEIR 模型。Balsa 等[13]量化了疫苗接种水平,同时考虑继续应用预防措施,通过 Carlo 方法应用于

SEIR 随机流行病模型, 模拟 COVID-19 疾病在社区中的传播。Wintachai 等[14]建立了包括疫苗接种率、预防和治疗疫苗的有效性等参数并对模型的全球和局部稳定性行数字模拟, 结果表明随着美国人口每天接种疫苗 0.1%, 预防和治疗疫苗的接种率至少达到 20%, 基本再生数 R_0 从 2.99 (无疫苗)减少到 1。Rajaei 等[15]提出了两个控制方案, 以防止 COVID-19 在疫苗开发前后爆发。第一项战略旨在通过将社会疏远和住院治疗作为两项主要控制措施, 减少和根除接触和感染者的数量。第二项战略建议在疫苗开发后实施, 除第一战略中的先前投入外, 疫苗接种率作为第三控制投入。并通过构建非线性数学模型对其进行验证。Li 等[16]考虑免疫、再感染和疫苗接种, 建立了可以预测感染人数数量和监控不断变化的参数轨迹的提出了一个依赖时间的 SEVIS 模型。Ghostine 等[17]建立了考虑感染的七个阶段: 易感性(S)、暴露(E)、传染性(I)、隔离(Q)、康复(R)、死亡(D)和接种疫苗(V)的扩展 SEIR 模型。并带入沙特阿拉伯的实际数据进行数值模拟, 结果表明该模型有能力在两周时间尺度内准确预测流行病发展。Freeman 等[18]通过调查英国接种疫苗的情况发现自 2020 年 12 月英国开始实施 COVID-19 疫苗接种计划以来, 民众的犹豫率似乎已大幅下降。在 2020 年 10 月, 一半的人口希望尽快接种疫苗, 根据英国政府的官方数据, 已有 63% 的英国人接种至少一剂疫苗, 有 21% 的人接种两剂。

本文基于新型冠状病毒肺炎传播的特点, 对英国的真实疫情数据[19] [20]进行考察。根据实际情况, 建立了考虑不同时段接触数和疫苗接种因素的 SEIRV 模型。根据英国实际的防控政策, 考虑疫苗接种率和疫苗效果、接种时间对疫情的影响。

2. 模型建立与分析

考虑疫苗接种因素的 SEIR 模型

将 T 时刻的人群分为: 易感者 S (Susceptible Individuals), 潜伏期的感染者(或无症状感染者) E (Exposed Individuals), 患病期感染者 I 以及移除者 R (Removed Individuals)。 S_{v1} 为接种第一针的易感者, S_{v2} 为接种两针的易感者。

基于此, 在接种疫苗前($T < 317$), 构建考虑不同时间段接触人数的 SEIR 模型:

$$\begin{cases} S'(T) = -\frac{r\beta}{N}S(T)I(T) - \frac{r\beta}{N}S(T)E(T) \\ E'(T) = \frac{r\beta}{N}S(T)I(T) - \frac{r\beta}{N}S(T)E(T) - \alpha E(T) \\ I'(T) = \alpha E(T) - \gamma I(T) - \eta I(T) \\ R'(T) = \gamma I(T) + \eta I(T) \end{cases} \quad (1)$$

其中, 参数 r 是每日每人平均接触数(随时间段变化), 表示感染率, 表示潜伏者向感染者的转化率, 表示病死率, 表示治愈率。

在开始接种疫苗第一针到第二针期间($317 \leq T < 347$), 方程改写为:

$$\begin{cases} S'(T) = -\frac{r\beta}{N}S(T)I(T) - \frac{r\beta}{n}S(T)E(T) - \lambda_1 S(T) \\ E'(T) = \frac{r\beta}{N}S(T)[I(T) + E(T)] - \alpha E(T) + \frac{r\beta}{N}(1 - \kappa_1)S_{v1}(T)[I(T) + E(T)] \\ I'(T) = \alpha E(T) - \gamma I(T) - \eta I(T) \\ R'(T) = \gamma I(T) + \eta I(T) \\ S'_{v1}(T) = \lambda_1 S(T) - \frac{r\beta}{N}(1 - \kappa_1)S_{v1}(T)[I(T) + E(T)] \end{cases} \quad (2)$$

开始接种第二针时($T \geq 347$):

$$\begin{cases} S'(T) = \frac{r\beta}{N}S(T)I(T) - \frac{r\beta}{N}S(T)E(T) - \lambda_1 S(T) \\ E'(T) = \frac{r\beta}{N}S(T)[I(T) + E(T)] - \alpha E(T) + \frac{r\beta}{N}(1-\kappa_1)S_{v1}(T)[I(T) + E(T)] \\ \quad + \frac{r\beta}{N}(1-\kappa_2)S_{v2}(T)[I(T) + E(T)] \\ I'(T) = \alpha E(T) - \gamma I(T) - \eta I(T) \\ R'(T) = \gamma I(T) + \eta I(T) \\ S'_{v1}(T) = \lambda_1 S(T) - \frac{r\beta}{N}(1-\kappa_1)S_{v1}(T)[I(T) + E(T)] - \lambda_2 S_{v1}(T-30) \\ S'_{v2}(T) = \lambda_2 S_{v1}(T-30) - \frac{r\beta}{N}(1-\kappa_2)S_{v2}(T)[I(T) + E(T)] \end{cases} \quad (3)$$

其中, λ_1 为每日第一针接种率, λ_2 为每日第二针接种率, κ_1 , κ_2 别为接种一针、两针所具有的保护率。

3. 结果与讨论

3.1. 模型的拟合结果

根据英国疫情数据[19][20]可得到治愈率和因病死亡率随时间发展的图形(图 1)。

从图 1 可以看出, 英国在新冠肺炎爆发初期的治愈率就达到峰 0.0245, 由于患病人数暴增, 经济水平有限, 大多数病人未得到及时救治, 导致治愈率在第 47 天(2020/03/07)快速下降, 在第 101 天(2020/04/30)后趋于稳定; 英国疫情爆发初期死亡率达到 0.0028, 由于疫情突然爆发并未及时采用有效措施, 导致死亡率在第 0~72 天(2020/01/22~2020/04/01)快速增长, 并且达到峰值 0.0167 之后开始下降, 随着第 317 天(2020/12/02)疫苗的全面接种以及对疫情的有效防控, 死亡率逐渐下降并趋于 0。

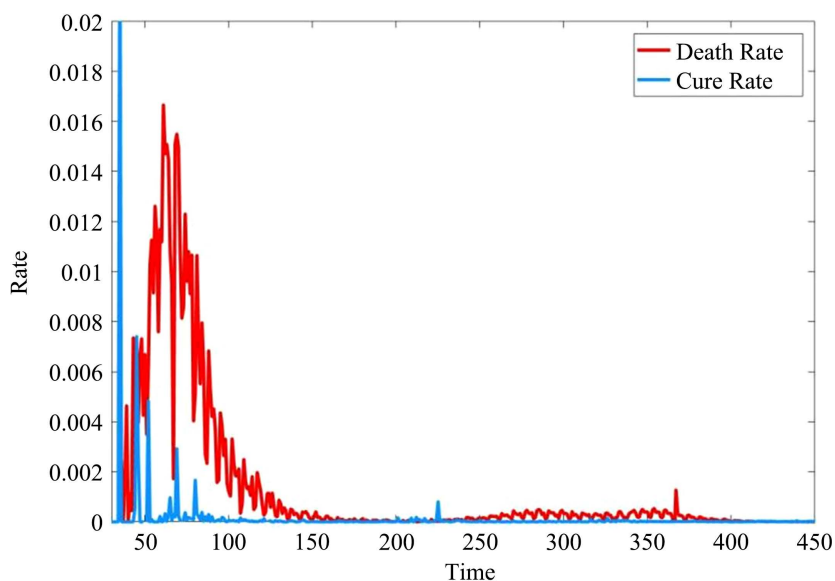


Figure 1. Curve of cure rate and curve of death rate with time

图 1. 治愈率和死亡率随时间变化的曲线图

以上是英国数据的真实情况，现在将一些合适的参数代入模型进行模拟。取初始值 $N = 66000000$ ， $I_0 = 3$ ， $E_0 = 30$ ， $S_0 = N - I_0 - E_0$ ， $R_0 = 0$ 。根据前期临床试验结果显示，疫苗接种第一针后，约 75% 的人产生免疫效果，全程接种完疫苗 28 天后，约 90% 的人能产生较好的免疫效果，可取参数 $K_1 = 0.75$ 、 $K_2 = 0.90$ 。根据已公布的数据并经过计算，可取参数 $\alpha = 0.0714$ 、 $\beta = 0.047$ 、 $\lambda_1 = 0.00518$ 、 $\lambda_2 = 0.005263$ 。值得注意的是，这里的 r (每人每日有效接触人数) 并不能很好地确定下来，且通过观察实际的感染者曲线，我们初步判断在不同时期内有不同的取值，并且这也对应着英国采取了一系列控制居民接触的措施。经过多次模拟后，我们确定了合理的 r ，如表 1 所示。

Table 1. The value of r in different time periods

表 1. 不同时间段内 r 的取值

时段	r
2020.1.22~2020.2.25	4.800
2020.2.25~2020.4.21	0.770
2020.4.22~2020.8.25	0.050
2020.8.26~2020.9.30	0.540
2020.10.1~2020.10.23	0.640
2020.10.24~2020.12.1	0.190
2020.12.2~2020.12.31	0.548
2021.01.01~2021.4.17	0.032

基于表 1 中不同时间段内 r 的取值，模拟出感染者随时间的增长曲线，与实际感染者曲线和对比及误差曲线分别如图 2 和图 3 所示。

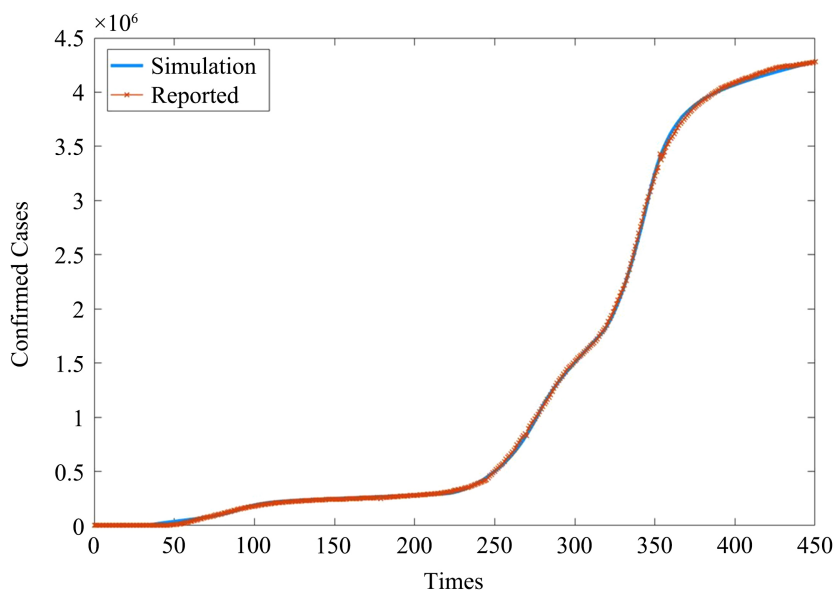


Figure 2. Comparison of analogue and actual infected people

图 2. 感染者的模拟与实际对比图

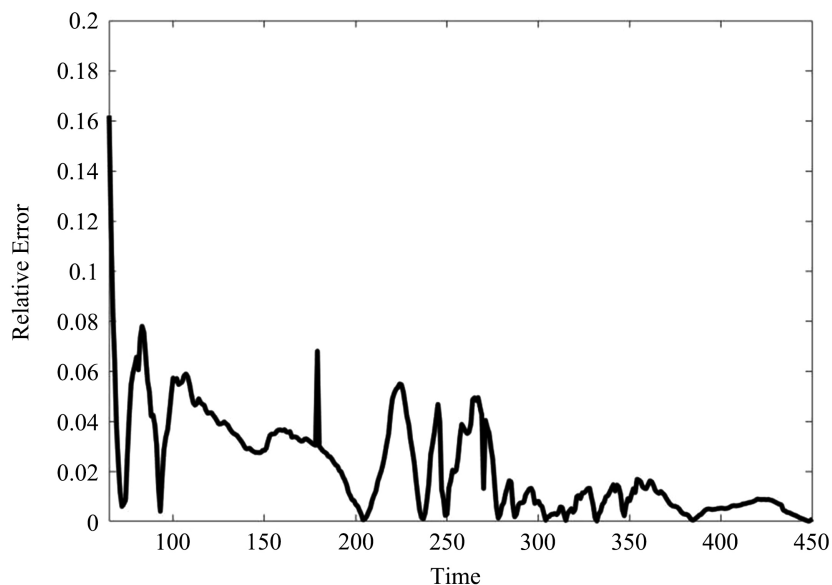


Figure 3. Relative error between analogue value and actual value
图 3. 模拟值与实际值的相对误差

首先给出模拟与真实对比(图 2): 感染者的模拟与实际对比图显示了在疫情爆发初期, 无防控措施时预测值的感染人数要显著高于实际感染人数; 随后实际的感染者人数与预测人数增长趋势一致, 模型的精确度符合我们的预期。图 3 反应了模拟值与实际值的相对误差情况, 疫情爆发初期由于各种因素影响, 相对误差较大, 随着时间的增长相对误差逐渐减小最终趋于稳定。

根据 2020 年 1 月 22 日至 2021 年 4 月 17 日期间, 针对英国统计数据, 利用统计数据的各种增量进行具体的数据拟合, 如每日治愈率, 每日致死率, 感染人数的模拟与实际对比等进行拟合。从拟合结果来看, 基本符合实际疫情发展规律; 随着疫苗的接种和医院的治疗能力不断提升, 使得确诊人数不断下降以及日治愈率不断趋于稳定, 日病死率在一段时间内达到峰值后急速下降后趋于稳定, 并保持在在一个较低的水平。根据拟合出来的动态参数和预估计的初始值, 模拟值与真实值的对比图(图 2)中的拟合结果与实际结果对比可以看出: 现有感染人数数量在随时间的变化不断上升后趋于稳定, 这与真实的统计数据整体趋势基本保持一致, 说明该模型有效。

3.2. 接种率 λ 和接种时间的影响

疫苗的接种对疫情的发展趋势起着至关重要的作用, 接下来我们使用统计假设检验考虑对应于不同疫苗接种率水平的确诊病例, 分析接种率和接种时间 T 对疫情的影响。

首先讨论第一针接种率随时间发展对确诊人数的影响(图 4)。

如图 4 所示, 获得了时间为 453 天内第一次接种疫苗后的确诊病例的时间序列。从图中可以看出, 随着第一针疫苗接种率从 0.00118 上升至 0.00918, 确诊病例数以及增长速率均有明显的下降。第一针疫苗的接种率对新冠疫情的影响较大, 对于疫情的控制起着关键作用, 因此建议居民普遍接种第一针疫苗。

根据疫苗的接种特点, 讨论第二针接种率随时间发展对确诊人数的影响(图 5)。

如图 5 所示, 在接种第一次疫苗和不考虑疫苗接种副作用及其他因素的影响的情况下, 接种第二针。接种率从 0.00127 上升至 0.00927 时, 对不同疫苗接种率水平的确诊病例的平均值进行比较, 可以看出确诊病例的变化不大, 所以第二针接种率对于新冠疫情的影响微乎其微。

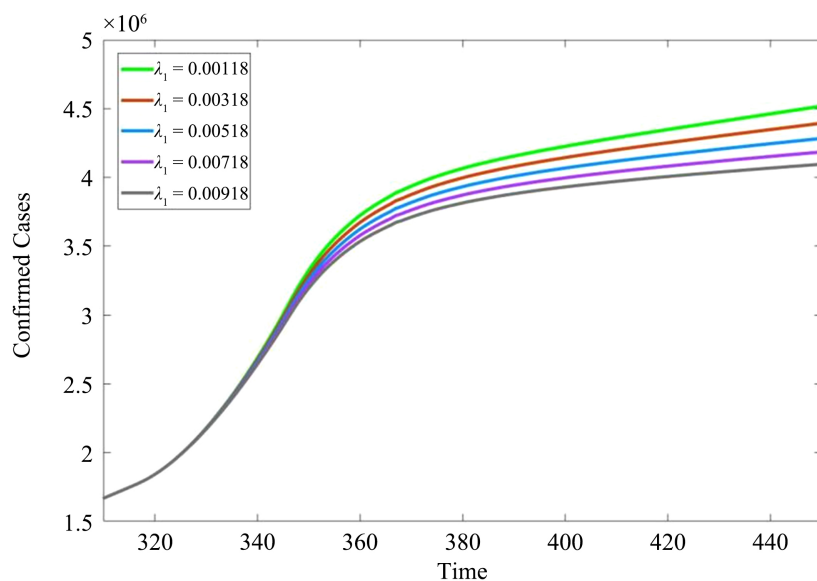


Figure 4. Comparison of λ_1 influence

图 4. λ_1 的影响对比图

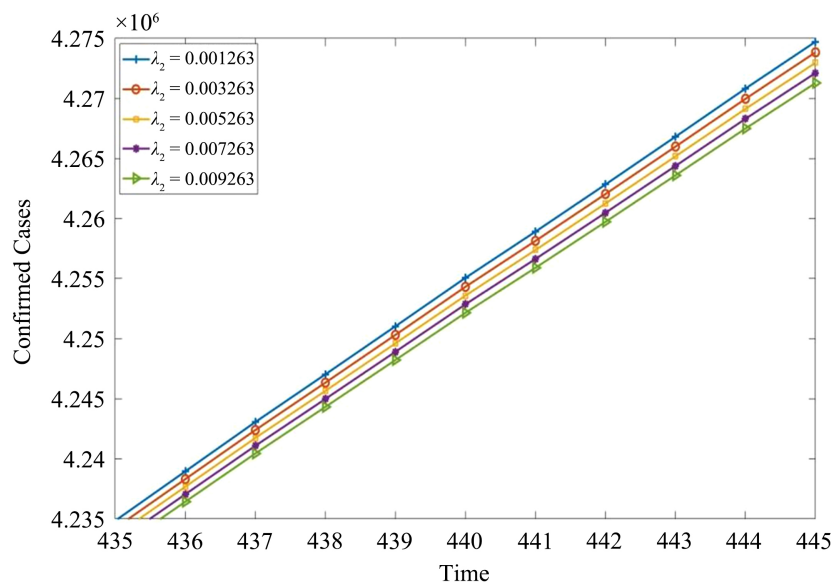


Figure 5. Comparison of λ_2 influence

图 5. λ_2 的影响对比图

接下来以一周为步长单位对疫苗的接种时间进行调整，讨论接种时间对确诊人数发展的影响(图 6)。如图 6 所示，若接种时间调整为以一周为步长，即接种时间越早，接种覆盖率越高，很大程度上抑制了 COVID-19 对群体身体的伤害，致使确诊病例数目不断减少，因此越早接种越有利于疫情的控制。

根据对接种率和接种时间的分析讨论，我们给出接种时间越早越好、接种人数越多越好的建议，且相比于第二针来说，第一针接种的影响较显著，因此居民应尽快接种疫苗，尽早实现疫苗的全面接种。但接种疫苗只能适当减缓病例增长速度，并不能很好地抑制疫情发展，当结合多种策略(隔离等)来控制疫情。

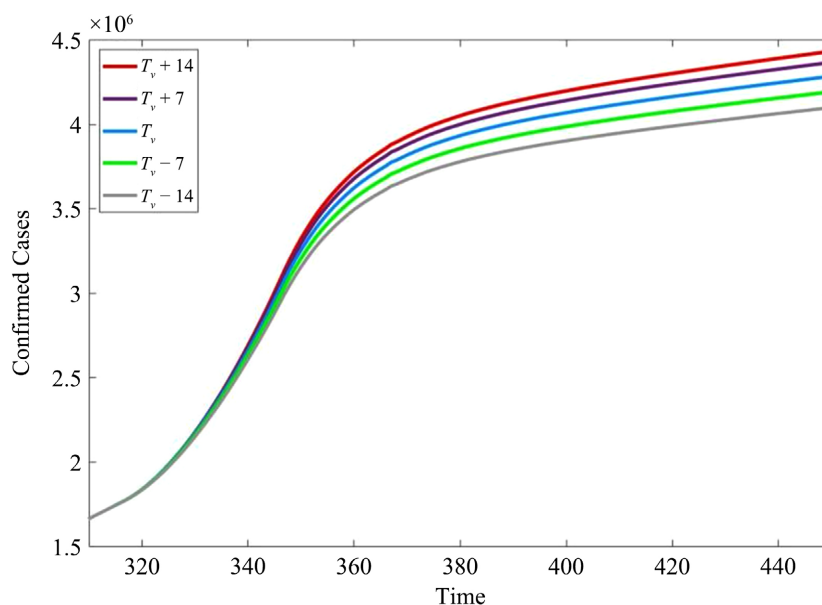


Figure 6. Comparison of vaccination time influence
图 6. 疫苗接种时间的影响对比图

4. 总结

本文提出了一个考虑不同时段接触数和疫苗接种因素的 SEIRV 模型, 根据不同时段每人每日有效接触数 r 的取值不同等特性, 模拟出感染者的增长曲线; 考虑对应于不同疫苗接种率水平的确诊病例, 分析接种率和接种时间对疫情的影响。模型能较准确地模拟出疫情的发展趋势并可以分析出疫苗的接种因素对疫情的发展影响, 因此模型解释性好, 普适性高。此文章主要代入英国的真实数据进行分析, 此模型还适用于相似情况的部分国家。

基金项目

大学生创新创业训练项目(国家级)(项目编号: G2020107490029)。

参考文献

- [1] Sun, D., Duan, L., Xiong, L., *et al.* (2020) Modeling and Forecasting the Spread Tendency of the COVID-19 in China. *Advances in Difference Equations*, **2020**, Article No. 489. <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02940-2>
- [2] Mwalili, S., Kimathi, M., Ojiambo, V., *et al.* (2020) SEIR Model for COVID-19 Dynamics Incorporating the Environment and Social Distancing. *BMC Research Notes*, **13**, 352. <https://doi.org/10.1186/s13104-020-05192-1>
- [3] Lyra, W., Do Nascimento, J.D., Belkhiria, J., *et al.* (2020) COVID-19 Pandemics Modeling with Modified Determinist SEIR, Social Distancing, and Age Stratification: The Effect of Vertical Confinement and Release in Brazil. *PLoS ONE*, **15**, e0237627. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0237627>
- [4] 翟羿江, 蔺小林, 李建全, 梁卫平. 基于存在基础病易感者的 SEIR 模型对 COVID-19 传播的研究[J]. *应用数学和力学*, 2021, 42(4): 413-421.
- [5] Gu, B. (2021) Forecast and Analysis of COVID-19 Epidemic Based on Improved SEIR Model. *Journal of Physics: Conference Series*, **1802**, Article ID: 042050. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1802/4/042050>
- [6] Efimov, D. and Ushirobira, R. (2021) On an Interval Prediction of COVID-19 Development Based on a SEIR Epidemic Model. *Annual Reviews in Control*, **51**, 477-487. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2021.01.006>
- [7] Zisad, S., Hossain, M., Hossain, M., *et al.* (2021) An Integrated Neural Network and SEIR Model to Predict COVID-19. *Algorithms*, **14**, 94. <https://doi.org/10.3390/a14030094>

-
- [8] Ivorra, B., Ferrández, M.R., VelaPérez, M., *et al.* (2020) Mathematical Modeling of the Spread of the Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) Taking into Account the Undetected Infections. The Case of China. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, **88**, Article ID: 105303. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105303>
- [9] 谭键滨, 蒋宇康, 田婷, 等. P-SIHR 概率图模型: 一个可估计未隔离感染者数的适用于 COVID-19 的传染病模型 [J]. *应用数学学报*, 2020, 43(2): 365-382.
- [10] Liu, P.Y., He, S., Rong, L.B., *et al.* (2020) The Effect of Control Measures on COVID-19 Transmission in Italy: Comparison with Guangdong Province in China. *Infectious Diseases of Poverty*, **9**, 130. <https://doi.org/10.1186/s40249-020-00730-2>
- [11] Xu, C., Yu, Y., Chen, Y., *et al.* (2020) Forecast Analysis of the Epidemics Trend of COVID-19 in the USA by a Generalized Fractional-Order SEIR Model. *Nonlinear Dynamics*, **101**, 1621-1634. <https://doi.org/10.1101/2020.04.24.20078493>
- [12] 王昕炜, 彭海军, 钟万颢. 具有潜伏期时滞的时变 SEIR 模型的最优疫苗接种策略[J]. *应用数学和力学*, 2019, 40(7): 701-712.
- [13] Balsa, C., Lopes, I., Guarda, T., *et al.* (2021) Computational Simulation of the COVID-19 Epidemic with the SEIR Stochastic Model. *Computational and Mathematical Organization Theory*. <https://doi.org/10.1007/s10588-021-09327-y>
- [14] Wintachai, P. and Prathom, K. (2021) Stability Analysis of SEIR Model Related to Efficiency of Vaccines for COVID-19 Situation. *Heliyon*, **7**, e06812. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2021.e06812>
- [15] Arman, R., Mahsa, R., Vahid, A. and Mojtaba, S. (2021) State Estimation-Based Control of COVID-19 Epidemic before and after Vaccine Development. *Journal of Process Control*, **102**, 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2021.03.008>
- [16] Li, Y., Ge, L., Zhou, Y., *et al.* (2021) Toward the Impact of Non-Pharmaceutical Interventions and Vaccination on the COVID-19 Pandemic with Time-Dependent SEIR Model. *Frontiers in Artificial Intelligence*, **4**, Article ID: 648579. <https://doi.org/10.3389/frai.2021.648579>
- [17] Ghostine, R., Gharamti, M., Hassrouny, S., *et al.* (2021) An Extended SEIR Model with Vaccination for Forecasting the COVID-19 Pandemic in Saudi Arabia Using an Ensemble Kalman Filter. *Mathematics*, **9**, 636. <https://doi.org/10.3390/math9060636>
- [18] Freeman, D., Loe, B., Yu, L., *et al.* (2021) Effects of Different Types of Written Vaccination Information on COVID-19 Vaccine Hesitancy in the UK (OCEANS-III): A Single-Blind, Parallel-Group, Randomised Controlled Trial. *The Lancet Public Health*, **6**, E416-E427. [https://doi.org/10.1016/S2468-2667\(21\)00096-7](https://doi.org/10.1016/S2468-2667(21)00096-7)
- [19] IASC (2020) The Humanitarian Data Exchange. <https://data.humdata.org>
- [20] 1 Pint 3 Acres. Global COVID-19 Tracker & Interactive Charts. <https://coronavirus.1point3acres.com>