Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(10), 3464-3468
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1010365

Hans汉斯

有限非交换单群上的10度1-正则Cayley图

李婉婷，凌　波*

云南民族大学数学与计算机科学学院，云南　昆明

收稿日期：2021年9月21日；录用日期：2021年10月14日；发布日期：2021年10月25日

摘　要

称Cayley图$\Gamma = Cay(G,S)$是1-正则的，如果Γ的全自同构群$Aut(\Gamma)$作用在其弧集上正则。称Γ是正规的，如果$G \lhd Aut(\Gamma)$。在本文中，我们证明了有限非交换单群上的连通10度1-正则Cayley图一定是正规的。

关键词

1-正则图，正规Cayley图，非交换单群

On 10-Valent 1-Regular Cayley Graphs on Finite Nonabelian Simple Groups

Wanting Li, Bo Ling*

School of Mathematics and Computer Sciences, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: Sep. 21st, 2021; accepted: Oct. 14th, 2021; published: Oct. 25th, 2021

Abstract

A Cayley graph $\Gamma = Cay(G,S)$ is said to be 1-regular, if the full automorphism group $Aut(\Gamma)$ of Γ acts regularly on the arc set of Γ. And Γ is called normal if $G \lhd Aut(\Gamma)$. In this paper, we prove 10-valent 1-regular Cayley graphs on finite nonabelian simple groups must be normal.

Keywords

1-Regular Graph, Normal Cayley Graph, Nonabelian Simple Group

*通讯作者。

文章引用: 李婉婷, 凌波. 有限非交换单群上的 10 度 1-正则 Cayley 图[J]. 应用数学进展, 2021, 10(10): 3464-3468.
DOI: 10.12677/aam.2021.1010365

1. 引言

假定本文中的图均是有限，连通，简单的无向图。

设Γ是一个图，将图Γ的顶点集，边集，弧集，全自同构群分别记作$V(\Gamma)$，$E(\Gamma)$，$Arc(\Gamma)$，$Aut(\Gamma)$。用$val(\Gamma)$表示Γ的度数。

设$X \le Aut(\Gamma)$，令s为一个正整数。我们称图Γ为(X,s)-弧传递或者(X,s)-*正则*，若X传递或者正则地作用在图Γ的s-弧的集合上，其中s-弧是$s+1$个顶点的序列$(v_0,v_1,\cdots,v_s)$，使得$(v_{i-1},v_i)\in E(\Gamma)$且$v_{i-1}\ne v_{i+1}$，其中$1\le i\le s-1$。特别地，若$X = Aut(\Gamma)$，则称$(X,s)$-弧传递图或者$(X,s)$-正则图为$s$-弧传递图或$s$-正则图。另外，也称1-正则图为弧正则图。一般情况下，点传递图即为0-弧传递图，弧传递图或对称图即为1-弧传递图。

设G是有限群，将其单位元记为1。取G中集合S使得$1\notin S$且$S=S^{-1}:=\{s^{-1}\mid s\in S\}$，定义有限群$G$关于子集$S$的Cayley无向图$\Gamma := Cay(G,S)$，其中：

$$V(\Gamma):=G, E(\Gamma):=\{\{g,sg\}\mid g\in G, s\in S\}.$$

显然，Γ的度数为$|S|$。Γ连通$\Leftrightarrow$ $G=\langle S\rangle$。我们可以将群G看作为$Aut(\Gamma)$的正则子群。反之，图Γ同构于群G的Cayley图$\Leftrightarrow$ $Aut(\Gamma)$中包含一个正则子群，且该子群同构于G (参见文献[1]，性质16.3)。称Cayley图$\Gamma = Cay(G,S)$是*正规的*，若$G \lhd Aut(\Gamma)$；否则称Cayley图Γ是*非正规的*。

正规Cayley图的概念是由徐明曜教授在1998年第一次提出，可参见文献[2]。对于决定Cayley图的全自同构群的问题，正规Cayley图的概念在其中占据着十分重要的地位。自然地，有限非交换单群上的Cayley图的正规性研究在学术界受到了广泛关注和重视，并且对于有限非交换单群上的小度数d度弧传递Cayley图的正规性分类研究，已经有较多突出性的结论，可参见文献[3]-[9]。而在具有较高对称性的图中，1-正则图是一类特殊的对称图，它一直是一个有意义的研究对象。值得一提的是，小度数d度1-正则图的点稳定子群的阶就是d，那么其结构自然而然就被确定了。

本文主要目的是通过考虑有限非交换单群上的10度1-正则Cayley图的正规性，对该类图进行完全分类，得出了如下结论：

定理1.1. 设G为一个有限非交换单群，Γ为G上的10度1-正则Cayley图，则$G \lhd Aut(\Gamma)$。

2. 预备知识

设G是有限群，Ω是至少包含两个点的集合，G作用在Ω上传递。下列引理是证明传递群G为本原置换群的一个充分必要条件，可参见文献[10]。

引理2.1. Ω上传递群G是本原的$\Leftrightarrow$点稳定子G_i是G的极大子群，其中$i\in\Omega$。 ■

下面是关于传递置换群的一个经典结论，我们称之为Frattini论断，可参见文献[10]。

引理2.2. 设G为Ω上的传递置换群，H为G的子群。则H作用在Ω上传递$\Leftrightarrow$ $G=HG_v$，其中点$v\in\Omega$，G_v是点v在G中的点稳定子。 ■

设X是一个有限群，H为X的一个无核子群。定义G关于H的*陪集图*$\Gamma := \mathrm{Cos}(X,H,g)$如下：

$$V(\Gamma):=[X:H],$$

$$E(\Gamma):=\{(Hx,Hdx)\mid d\in HgH\}.$$

其中 $g\in X-H$ 满足 $g^2\in H$。接下来的引理是关于陪集图的一些基本结论，其证明过程可由上述定义以及文献[11]得出。

引理 2.3. 设 $\Gamma=\mathrm{Cos}(X,H,g)$，易知 Γ 是 X-弧传递图，并且有如下结论：

1) $val(\Gamma)=|H:H\cap H^g|$；

2) Γ 为无向图 $\Leftrightarrow$ 存在一个 2-元素 $g\in X\setminus H$ 使得 $g^2\in H$；

3) Γ 为连通图 $\Leftrightarrow$ $\langle H,g\rangle=X$；

4) 若 X 中包含一个作用在 $V(\mathrm{Cos}(X,H,g))$ 上正则的子群 G，于是有 $\mathrm{Cos}(X,H,g)\cong Cay(G,S)$，其中 $S=G\cap HgH$。

另一方面，每一个 X-弧传递图 Σ 均同构于一个陪集图 $\mathrm{Cos}(X,X_v,g)$，其中 $g\in N_X(X_{vw})$ 是一个满足 $g^2\in X_v$ 的 2-元素，$v\in V(\Sigma)$，$w\in\Sigma(v)$。 ■

设 Γ 是 X-点传递图，其中 $X\le Aut(\Gamma)$。又设 X 中含有正规子群 N，且 N 作用在 $V(\Gamma)$ 上是不传递的。记 V_N 为 N-轨道的集合(即 $V_N:=\{\alpha^N\mid\alpha\in V(\Gamma)\}$)。由 N 诱导的 Γ 的正规商图 Γ_N 定义为：$V(\Gamma_N)=V_N$；$E(\Gamma_N)=\{\{B,C\}\mid$ 存在 $u\in B,v\in C$ 使得 $\{u,v\}\in E(\Gamma)\}$。由文献[12] [13]可得下列结论：

引理 2.4. 设 Γ 是 G-点传递的局部本原图，其中 $G\le Aut(\Gamma)$。若 $N\lhd G$ 作用在 $V(\Gamma)$ 上至少有 3 个轨道，则以下结论成立：

1) N 在 $V(\Gamma)$ 上是半正则的，$G/N\le Aut\Gamma_N$，此时 Γ 为商图 Γ_N 的正则覆盖；

2) $G_\alpha\cong(G/N)_\gamma$，其中 $\alpha\in V(\Gamma)$，$\gamma\in V(\Gamma_N)$；

3) Γ 是一个 (G,s)-传递图 $\Leftrightarrow$ Γ_N 是一个 $(G/N,s)$-传递图，其中 $1\le s\le 5$ 或 $s=7$。 ■

对于级数不超过 10 的本原置换群，由文献[14]中本原置换群的分类结果，易得出下列结论：

引理 2.5. 设 T 是 Ω 上的本原置换群，K 为某点 $w\in\Omega$ 的点稳定子群。若 T 是非交换单群，K 非可解并且 $|\Omega|10$，则 $(T,K,|\Omega|)=(A_{10},A_9,10)$。 ■

3. 定理 1.1.的证明

设 G 为有限非交换单群，$\Gamma:=Cay(G,S)$ 为 G 上的 10 度 1-正则 Cayley 图。记 $A:=Aut(\Gamma)$ 为图 Γ 的全自同构群，A_v 为点 $v\in V(\Gamma)$ 在 A 中的点稳定子。因为 Γ 是 10 度 1-正则 Cayley 图，于是该图的点稳定子 A_v 的阶必为 10，即 $|A_v|=10$。接下来，我们分别考虑 A 中存在非平凡的可解正规子群和不存在非平凡的可解正规子群，以此来完成定理 1.1.的证明。

引理 3.1. 若 A 中不存在非平凡的可解正规子群，则 $G\lhd A$。

证明： 假设结论不成立。

令 N 是 A 的极小正规子群，于是 N 非可解，$N=T^d\,(d\ge1)$，T 是非交换单群。由 $N\cap G\lhd G$ 和群 G 的单性，可知 $N\cap G=1$ 或 G。若 $N\cap G=1$。由引理 2.2.可知 $A=GA_v$，又 $G\cap A_v=1$，可知 $|N||A_v|=10$，意味着正规子群 N 可解，矛盾于引理的条件“A 中不存在非平凡的可解正规子群”。于是 $N\cap G=G$，即 $G\le N$。若此时有 $G=N$，$G\lhd A$，矛盾。因此 $G<N$。但若有 $d\ge2$，$N=T_1\times T_2\times\cdots\times T_d$，$T_i\cong T$ 是非交换单群。则由 $T_1\cap G\lhd G$ 和群 G 的单性，可知 $T_1\cap G=1$ 或 G。若 $T_1\cap G=1$，可推出 $|T_1||N_v||A_v|=10$，T_1 可解，这与引理中的“A 中不存在非平凡的可解正规子群”矛盾了。又若 $T_1\cap G=G$，$G\le T_1$，意味着 $T_2\cap G=1$，同样可以推出矛盾。因而 $d=1$，$N=T$ 是非交换单群。设 K 为 T 的极大真子群，满足 $K\ge G$。又设 $\Omega=[T:K]$，记 $n:=|\Omega|$。由引理 2.2.可知 $T=GT_v$，$T_v\ne1$ 且 $T_v=A_v\cap T\le A_v$，则 $|T_v||10$。又因为 $G\cap T_v=1$，则 $n=|\Omega|=|T:K||T:G||10$。现考虑 T 依右乘作用在 Ω 上。由于 T 为非交换单群，可知该作

用是忠实的且传递的。一方面，易知 K 为 Ω 中某点的点稳定子，又 K 为 T 的极大子群，则由引理 2.1.可知 T 为作用在 Ω 上的本原置换群。另一方面，T 为非交换单群，且 $K \ge G$，K 必定非可解。那么 T，K，$|\Omega|$ 满足引理 2.5.中的条件，即 $(T,K,|\Omega|)=(A_{10},A_9,10)$。注意到交错群 A_{n-1} 中不存在指数小于 $n-1$ 的真子群，也就是说，$|K:G|\ge n-1$，则 $n(n-1)\le|T:K|\cdot|K:G|=|T:G|\le 10$，从而有 $K=G$。由引理 2.3.和 MAGMA (见文献[15])可知此时并不存在图。于是假设不成立，此时有 $G \lhd A$。 ■

接下来，考虑全自同构群 A 中存在非平凡的可解正规子群。

引理 3.2. 若 A 中存在非平凡的可解正规子群，则 $G \lhd A$。

假设结论不成立。令 M 是 A 中最大的可解正规子群，推出 $M char A$，并且 $M \ne 1$。由 $M\cap G \lhd G$ 和 G 的非交换单性可知 $M\cap G=1$，$|M|\,|\,10$。注意到 $|V(\Gamma)|=|G|$ 中至少包含 3 种素因子，则由轨道的相关定义和公式可知 M 作用在 $V(\Gamma)$ 上的轨道个数多于 2 个。再由引理 2.4. (1)，此时 M 在 $V(\Gamma)$ 上是半正则的。

令自然同态 $\psi: A\to A/M$，设 $\bar{A}=A/M$，$\bar{\Gamma}=\Gamma_M$。由引理 2.4. (3)可知，商图 $\bar{\Gamma}$ 是 $\bar{A}$-弧传递的。又设 $\bar{N}$ 是 $\bar{A}$ 的一个极小正规子群，N 是 $\bar{N}$ 在 $\psi: A\to A/M$ 下的原像。由 M 的定义可知 $\bar{N}$ 必定非可解，$\bar{N}=T_1\times T_2\times\cdots\times T_d=T^d\ (d\ge 1)$，$T$ 是非交换单群。

设 $\bar{G}=GM/M$，由同构定理可知 $\bar{G}\cong G$，$\bar{G}$ 也是非交换单群。由于 $\bar{N}\cap\bar{G}\lhd\bar{G}$，可知 $\bar{N}\cap\bar{G}=1$ 或 $\bar{G}$。若 $\bar{N}\cap\bar{G}=1$，则 $|\bar{N}|\,|\,10$，$\bar{N}$ 可解，矛盾。因此 $\bar{N}\cap\bar{G}=\bar{G}$，$\bar{G}\le\bar{N}$。由于 $\bar{G}$ 是非交换单群，$|\bar{G}|$ 必定整除 $\bar{N}$ 中某合成因子的阶，即知 $|\bar{G}|\,\big|\,|T_1|$。但若有 $d\ge 2$，则 $|T_2|\,\big|\,|\bar{N}:\bar{G}|\,\big|\,|\overline{A_v}|$，而 $\overline{A_v}$ 是 $\{2,5\}$-群(其中 $\bar{v}\in V\bar{\Gamma}$)，可知此时 T_2 可解，矛盾。因而 $d=1$，$\bar{N}$ 是非交换单群。另一方面，由于 $\bar{N}$ 的任意性，以上推理叙述也说明了 $\bar{N}$ 是 $\bar{A}$ 唯一的非可解的极小正规子群，进而有 $\bar{N} char \bar{A}$，$N char A$。

如果 $\bar{G}=\bar{N}$。显然有 $N=M:G$。若 G 中心化 M，则 $N=M\times G$，所以 $G char N char A$，矛盾于 G 在 A 不正规。因此 G 不中心化 M。推出 $Aut(M)$ 是非可解的。又 $|M|\,|\,10$，$|M|=1,2,5$ 或 10，这意味着 $Aut(M)$ 可解，矛盾。因此，$\bar{G}<\bar{N}$。从而 $|\bar{N}:\bar{G}|\,|\,5$。设 $\bar{K}$ 是 $\bar{N}$ 中包含 $\bar{G}$ 的极大真子群。令 $\bar{\Omega}=[\bar{N}:\bar{K}]$。由引理 2.5.可知，$(\bar{N},\bar{K},|\bar{\Omega}|)=(A_{10},A_9,10)$。由于 $\bar{G}\le\bar{K}$，$|\bar{\Omega}|=|\bar{N}:\bar{K}|\le|\bar{N}:\bar{G}|\,|\,5$，则 $(\bar{N},\bar{K},|\bar{\Omega}|)\ne(A_{10},A_9,10)$，矛盾。 ■

综合引理 3.1.和引理 3.2.的证明可知，无论 A 中是否存在非平凡的可解正规子群，都有 $G\lhd A$，即定理 1.1.得证。

基金项目

国家自然科学基金项目(12061089，11701503)；云南省科技厅面上项目(2018FB003)。

参考文献

[1] Biggs, N. (1992) Algebraic Graph Theory. 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge.

[2] Xu, M.Y. (1998) Automorphism Groups and Isomorphisms of Cayley Digraphs. *Discrete Mathematics*, **182**, 309-319. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(97)00152-0

[3] Du, J.L. and Feng, Y.Q. (2019) Tetravalent 2-Arc-Transitive Cayley Graphs on Non-Abelian Simplegroups. *Communications in Algebra*, **47**, 4565-4574. https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1549661

[4] Du, J.L., Feng, Y.Q. and Zhou, J.X. (2017) Pentavalent Symmetric Graphs Admitting Vertex-Transitivenon-Abelian Simple Groups. *European Journal of Combinatorics*, **63**, 134-145. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2017.03.007

[5] Fang, X.G., Wang, J., Zhou, S.M. (2021) Classification of Tetravalent 2-Transitive Nonnormal Cayley Graphs of Finite Simple Groups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 104, 263-271. https://doi.org/10.1017/S0004972720001446

[6] Li, C.H. (1996) Isomorphisms of Finite Cayley Graphs. Ph.D. Thesis, The University of Western Australia, Crawley.

[7] Li, J.J., Ling, B. and Ma, J.C. (2017) On Tetravalent S-Regular Cayley Graphs. *Journal of Algebra and Its Applications*, **16**, Article ID: 1750195. https://doi.org/10.1142/S021949881750195X

[8] Xu, S.J., Fang, X.G., Wang, J. and Xu, M.Y. (2005) On Cubic *S*-Arc-Transitive Cayley Graphs of Finite Simple Groups. *European Journal of Combinatorics*, **26**, 133-143. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2003.10.015

[9] Xu, S.J., Fang, X.G., Wang, J. and Xu, M.Y. (2007) 5-Arc Transitive Cubic Cayley Graphs on Finite Simple Groups. *European Journal of Combinatorics*, **28**, 1023-1036. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2005.07.020

[10] Dixon, J.D. and Mortimer, B. (1996) Permutation Groups. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0731-3

[11] Li, J.J. and Lu, Z.P. (2009) Cubic *S*-Transitive Cayley Graphs. *Discrete Mathematics*, **309**, 6014-6025. https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.05.002

[12] Praeger, C.E. (1992) An O'Nan-Scott Theorem for Finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-Arc-Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **s2-47**, 227-239. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-47.2.227

[13] Li, C.H. and Pan, J.M. (2008) Finite 2-Arc-Transitive Abelian Cayley Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **29**, 148-158. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2006.12.001

[14] Roney-Dougal, C.M. (2005) The Primitive Permutation Groups of Degree Less than 2500. *Journal of Algebra*, **292**, 154-183. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.04.017

[15] Bosma, W., Cannon, C. and Playoust, C. (1997) The MAGMA Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125