Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(10), 3254-3260
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1010341

Hans汉斯

基于独立但不同分布样本的系数正则化回归算法的研究

常欣欣，王 鑫

安阳工学院，河南 安阳

收稿日期：2021年9月8日；录用日期：2021年9月29日；发布日期：2021年10月11日

摘 要

本文分析了基于独立但不同分布样本的系数正则化回归学习算法。全文的框架不同于以往的经典核学习方法，核函数不再要求满足半正定性；对于样本输出，令其满足弱化的矩假设条件。文章使用积分算子的方法得到了满意的与容量无关的误差界，最后通过选取合适的正则化参数得到较为满意的学习率。

关键词

系数正则化回归，非正定核，矩假设条件，积分算子，学习率

Analysis of Coefficient Regularized Regression with Non-Identically and Independently Sampling

Xinxin Chang, Xin Wang

Anyang Institute of Technology, Anyang Henan

Received: Sep. 8th, 2021; accepted: Sep. 29th, 2021; published: Oct. 11th, 2021

Abstract

This paper considers the error analysis of coefficient regularization with non-identically and independently sampling. The framework under investigation is different from classical kernel learning. The kernel function no longer satisfies the positive semidefiniteness; we carry out the error analysis with output sample values satisfying a generalized moment hypothesis. Satisfactory capacity independently error bounds are derived by the techniques of integral operator for this learning al-

文章引用: 常欣欣, 王鑫. 基于独立但不同分布样本的系数正则化回归算法的研究[J]. 应用数学进展, 2021, 10(10): 3254-3260. DOI: 10.12677/aam.2021.1010341

gorithm, finally, a satisfactory learning rate is obtained by selecting appropriate regularization parameters.

Keywords

Coefficient Regularization Regression, Indefinite Kernel, Unbounded Hypothesis, Integral Operator, Learning Rates

1. 引言

统计学习理论中的最小二乘回归问题陈述如下：

设 X 为一个紧子集，$Y=R$。ρ 为 $Z:X\times Y$ 上未知的概率测度，$z=\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^m\in Z^m$ 为服从 ρ 的一组独立同分布的取样。在回归学习中定义关于函数 $f:X\to Y$ 的期望风险泛函，

$$\varepsilon(f)=E\left(f(x)-y\right)^2=\int_Z\left(f(x)-y\right)^2\mathrm{d}\rho$$

回归函数定义为

$$f_\rho(x)=E(y|x)=\int_Y y\mathrm{d}\rho(y|x),x\in X$$

记 $\rho(y|x)$ 为 ρ 在 $X=x$ 时的条件分布，回归函数刻画了输出值 y 与输入值 x 之间的依赖关系。实际上，由于 ρ 是未知的，所以 f_ρ 无法直接求得，于是我们的目标是利用样本 z 产生关于 f_ρ 的一个最佳逼近。

在这篇文章里，我们学习 l^2 系数正则化算法：

$$f_{z,\lambda}=f_{\alpha_z}\text{ 其中 }\alpha_z=\arg\min_{\alpha\in R^T}\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T\left(f_\alpha(x_t)-y_t\right)^2+\lambda T\sum_{t=1}^T\alpha_t^2\right\},\lambda>0 \tag{1.1}$$

有关该算法的研究可以参看文献[1] [2]。

2. 相关定义

在本章中，考虑基于 Z 上的概率分布 ρ_t，对任意的 $t\ge1$，ρ_t 在 x 处的条件分布为 $\rho(\cdot|x)$。第 t 个样本 $z_t=(x_t,y_t)$ 的选取依赖于 ρ_t。我们选取样本序列 $z_t=(x_t,y_t)$ 来自于强平稳过程。令 ρ_X 和 ρ_X^t 分别为 ρ 和 ρ_t 在 X 上的边缘测度。接下来的假设和文献[3]中一样，边缘分布 ρ_X^t 收敛到 Holder 空间 $C^s(X)$ 的对偶空间 $\left(C^s(X)\right)^*$ 中的 ρ_X。

Holder 空间 $C^s(X)\ (0\le s\le1)$ 包含 X 上所有的连续函数，并且具有以下的有界范数：

$$\|f\|_{C^s(x)}=\|f\|_\infty+|f|_{C^s(x)}$$

其中

$$|f|_{C^s(x)}:=\sup_{x\ne y\in X}\frac{|f(x)-f(y)|}{\left(d(x,y)\right)^s}.$$

接下来给出的定义是对序列 ρ_X^t 的处理。

定义 2.1 令 $0\le s\le 1$，则序列 ρ_X^t 以指数形式收敛到 $\left(C^s\left(X\right)\right)^*$ 中的 ρ_X，如果存在 $C_1>0$，$0<\alpha<1$ 使下列式子成立：

$$\left\|\rho_X^{(t)}-\rho_X\right\|_{\left(C^s(X)\right)^*}\le C_1\alpha^t,\forall t\in N \tag{2.1}$$

根据对偶空间 $\left(C^s\left(X\right)\right)^*$ 的定义，上式也可以表示为：

$$\left|\int_X f\left(x\right)\mathrm{d}\rho_X^{(i)}-\int_X f\left(x\right)\mathrm{d}\rho_X\right|\le C_1\alpha^i\left\|f\right\|_{C^s(x)},\forall f\in C^s\left(X\right),i\in N.$$

根据积分算子的定义，有

$$L_{K,\rho_X}f\left(x\right)=\int_X K\left(x,u\right)f\left(u\right)\mathrm{d}\rho_X\left(u\right),L_{K,\rho_X^t}f\left(x\right)=\int_X K\left(x,u\right)f\left(u\right)\mathrm{d}\rho_X^{(t)}\left(u\right),$$

为了进行误差分析，假设核函数 $\tilde{K}$ 满足序数 $s\left(0\le s\le 1\right)$ 的核条件：

定义 2.2 若对一些常数 $k_s>0$，且 $\tilde{K}\in C^s\left(X\times X\right)$，满足对所有的 $u,v\in X$，有

$$\left\|\tilde{K}_u-\tilde{K}_v\right\|_{\tilde{K}}\le k_s\left(d\left(u,v\right)\right)^s. \tag{2.2}$$

称 Mercer 核 $\tilde{K}$ 满足序数 $s\left(0\le s\le 1\right)$ 的核条件。

满足序数 $s\left(0\le s\le 1\right)$ 的核条件称称 Mercer 核 $\tilde{K}$ 使得对任意的 $f\in H_{\tilde{K}}$，且 $u,v\in X$，有

$$\left|f\left(u\right)-f\left(v\right)\right|=\left|\left\langle f,\tilde{K}_u-\tilde{K}_v\right\rangle_{\tilde{K}}\right|\le\left\|f\right\|_{\tilde{K}}\left\|\tilde{K}_u-\tilde{K}_v\right\|_{\tilde{K}}\le k_s\left\|f\right\|_{\tilde{K}}\left(d\left(u,v\right)\right)^s$$

所以，$f\in C^s\left(X\right)$ 并且 $\left\|f\right\|_{C^s(x)}\le\left(k+k_s\right)\left\|f\right\|_{\tilde{K}}$。

对于样本 Z，假设其满足弱化的矩假设条件：存在两个常数 $\tilde{M}>0$，及 $p\ge 2$，使得

$$\int_Z\left|y\right|^p\le\tilde{M}^2 \tag{2.3}$$

文献[4]，文献[5]，文献[6]中对样本输出的要求均是满足弱化的矩假设条件。

本文的目标是估计 $f_{Z,\lambda}$ 与 f_ρ 之间的误差，用 RKHS $H_{\tilde{K}}$ 逼近 f_ρ，定义：

$$f_{\lambda,\rho_X}=\arg\min_{f\in\mathrm{H}_{\tilde{K}}}\left\{\int_Z\left(f\left(x\right)-f_\rho\left(x\right)\right)^2\mathrm{d}\rho\left(x,y\right)+\lambda\left\|f\right\|_{\tilde{K}}^2\right\}. \tag{2.4}$$

但由于样本 Z 是不同分布的，引入

$$f_{\lambda,\bar{\rho}_X^{(m)}}=\left(\lambda I+L_{\tilde{K},\bar{\rho}_X^{(m)}}\right)^{-1}L_{\tilde{K},\bar{\rho}_X^{(m)}}f_\rho \tag{2.5}$$

其中 $\bar{\rho}_X^{(m)}=\dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^m\rho_X^{(i)}$。

然后整体的误差就可以分解成三部分：

$$\left\|f_{Z,\lambda}-f_\rho\right\|_\rho=\left\|f_{Z,\lambda}-f_{\lambda,\bar{\rho}_X^{(m)}}\right\|_\rho+\left\|f_{\lambda,\bar{\rho}_X^{(m)}}-f_{\lambda,\rho_X}\right\|_\rho+\left\|f_{\lambda,\rho_X}-f_\rho\right\|_\rho$$

不等式右侧的三部分分别称为样本误差、测量误差和正则化误差。

对于算法的学习，最重要的步骤就是进行误差分析。接下来，首先会给出本文最重要的一个定理，然后对其进行证明。下面将分几步对误差进行分析。第一，对于样本误差，主要的困难是样本是不同分布且输出是无界的，本文通过引入一个中间积分算子的方法来解决.第二，本文用一个新的方法得到了较小的测量误差，从而使算法整体的误差界变小。

3. 主要定理及其证明

3.1. 主要定理

下面给出本文的主要结论：

定理 3.1 假设弱化的矩有界假设条件(2.3)成立； ρ_X^t 满足条件(2.1)，并且 $\tilde{K}$ 满足条件(2.2)； $L_{\tilde{K},\rho_X}^{-r} f_\rho \in L_{\rho_X}^2$ ，对于 $1/2 < r \le 3/2$ ，令 $\lambda = T^{-\theta}$ $(0<\theta<1/3)$ ，则有

$$E\left\| f_{Z,\lambda} - f_\rho \right\|_\rho \le C_k'' T^{-\min\{1/2-(3/2)\theta,(r-1/2)\theta\}},$$

这里的 C_k'' 跟 k,s,α 有关，和 T 无关的常数。其具体的表达式会在 3.2 部分给出。

该定理的证明会在下面的误差分析中给出。

3.2. 误差分析

首先，分析正则误差 $\left\| f_{\lambda,\rho_X} - f_\rho \right\|_\rho$ 。

关于正则误差的分析，已经在很多关于学习理论的文献中分析过，本文将省略它的证明过程并直接给出结果。

命题 3.1 假设 $L_{\tilde{K},\rho_X}^{-r} f_\rho \in L_{\rho_X}^2$ ，并且对 $r>0$ ，下列正则误差的界成立：

$$\left\| f_{\lambda,\rho_X} - f_\rho \right\|_\rho \le C_q \lambda^q$$

其中， $C_q = \left(1+k^{2r-2}\right)\left\| L_{\tilde{K},\rho_X}^{-r} f_\rho \right\|_\rho, q = \min\{r,1\}$ ，并且，当 $1/2 < r \le 3/2$ ，有

$$\left\| f_{\lambda,\rho_X} - f_\rho \right\|_{\tilde{K}} \le C_r \lambda^{r-1/2},$$

这里， $C_r = \left\| L_{\tilde{K},\rho_X}^{-r} f_\rho \right\|_\rho$ 。

接下来分析 $\left\| f_{\lambda,\bar{\rho}_X^{(I)}} - f_{\lambda,\rho_X} \right\|_{\tilde{K}}$ ，它是由不同的测量引起的，所以我们称其为侧量误差，可以参看文献[7]。在给出结果之前，我们需要以下 2 个引理。

引理 3.1 对任意的 $f,g \in C^s(X)$，有

$$\|fg\|_{C^s(X)} \le \|f\|_{C^s(X)} \times \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \times |g|_{C^s(X)}$$

引理 3.2 假设 $\tilde{K}$ 满足核条件(2.2)，则有

$$\left\| L_{\tilde{K},\bar{\rho}_X^{(I)}} - L_{\tilde{K},\rho_X} \right\| \le k\left(k+2k_s\right)\left\| \bar{\rho}_X^{(I)} - \rho_X \right\|_{\left(C^s(X)\right)^*}$$

证明：对任意的 $h \in C^s(X)$，则有

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(L_{\tilde{K},\bar{\rho}_X^{(I)}} - L_{\tilde{K},\rho_X} \right) h \right\|_{\tilde{K}}^2 \\
&= \int_X h(x) \left\{ \int_X h(t) \tilde{K}(x,t) \mathrm{d}\left(\bar{\rho}_X^{(I)} - \rho_X \right)(t) \right\} \times \mathrm{d}\left(\bar{\rho}_X^{(I)} - \rho_X \right)(x) \\
&\le \left\| h(u) \int_X h(v) \tilde{K}(u,v) \mathrm{d}\left(\bar{\rho}_X^{(T)} - \rho_X \right) \right\|_{\left(C^s(X)\right)^*} \times \left\| \bar{\rho}_X^{(T)} - \rho_X \right\|_{\left(C^s(X)\right)^*} \\
&\le \left\{ \|h\|_{C^s(X)} \times \left\| \int_X h(v) \tilde{K}(u,v) \mathrm{d}\left(\bar{\rho}_X^{(T)} - \rho_X \right) \right\|_\infty \right. \\
&\quad \left. + \|h\|_\infty \times \left| \int_X h(v) \tilde{K}(u,v) \times \mathrm{d}\left(\bar{\rho}_X^{(T)} - \rho_X \right) \right|_{C^s(X)} \right\} \times \left\| \bar{\rho}_X^{(T)} - \rho_X \right\|_{\left(C^s(X)\right)^*}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

记

$$I=\left\|\int_X h(v)\tilde{K}(u,v)\mathrm{d}\left(\bar{\rho}_X^{(T)}-\rho_X\right)\right\|_{\infty},$$

$$II=\left|\int_X h(v)\tilde{K}(u,v)\mathrm{d}\left(\bar{\rho}_X^{(T)}-\rho_X\right)\right|_{C^s(X)}$$

现在我们需要分别估计 I 和 II。对于 I，很容易有

$$\begin{aligned}I&=\max_{x\in X}\left|\int_X h(v)\tilde{K}(u,v)\mathrm{d}\left(\bar{\rho}_X^{(T)}-\rho_X\right)\right|\\&\le\max_{x\in X}\left\|h(\cdot)\tilde{K}(u,\cdot)\right\|_{C^s(X)}\times\left\|\bar{\rho}_X^{(T)}-\rho_X\right\|_{(C^s(X))^*}\\&\le\max_{x\in X}\left[\|h\|_{C^s(X)}\times k^2+\|h\|_{\infty}\times\left|\tilde{K}(u,\cdot)\right|_{C^s(X)}\right]\times\left\|\bar{\rho}_X^{(T)}-\rho_X\right\|_{(C^s(X))^*}\\&\le\left[k^2\|h\|_{C^s(X)}+kk_s\|h\|_{\infty}\right]\times\left\|\bar{\rho}_X^{(T)}-\rho_X\right\|_{(C^s(X))^*}\end{aligned}\tag{3.2}$$

要分析 II，考虑

$$\begin{aligned}&\left|\int_X h(v)\left[\tilde{K}(u_2,v)-\tilde{K}(u_1,v)\right]\mathrm{d}\left(\bar{\rho}_X^{(T)}-\rho_X\right)\right|\\&\le\left\|h(v)\left[\tilde{K}(u_2,v)-\tilde{K}(u_1,v)\right]\right\|_{C^s(X)}\times\left\|\bar{\rho}_X^{(T)}-\rho_X\right\|_{(C^s(X))^*}\\&\le\left[\|h\|_{C^s(X)}\times\left\|\tilde{K}(u_2,v)-\tilde{K}(u_1,v)\right\|_{\infty}+\|h\|_{\infty}\left|\tilde{K}(u_2,v)-\tilde{K}(u_1,v)\right|_{C^s(X)}\right]\times\left\|\bar{\rho}_X^{(T)}-\rho_X\right\|_{(C^s(X))^*}\end{aligned}\tag{3.3}$$

因为

$$\left|\left[\tilde{K}(u_2,v_2)-\tilde{K}(u_1,v_1)\right]-\left[\tilde{K}(u_2,v_1)-\tilde{K}(u_1,v_1)\right]\right|\le k_s^2d^s(u_1,u_2)d^s(v_1,v_2)$$

则有

$$\left|\tilde{K}(u_2,v)-\tilde{K}(u_1,v)\right|_{C^s(X)}\le k_s^2d^s(u_1,u_2),$$

$$\left|\tilde{K}(u_2,v)-\tilde{K}(u_1,v)\right|\le k\cdot k_sd^s(u_1,u_2)\tag{3.4}$$

得

$$\begin{aligned}II&=\left|\int_X h(v)\tilde{K}(u,v)\mathrm{d}\left(\bar{\rho}_X^{(T)}-\rho_X\right)\right|_{C^s(X)}\\&\le\left(kk_s\|h\|_{C^s(X)}+k_s^2\|h\|_{\infty}\right)\left\|\bar{\rho}_X^{(T)}-\rho_X\right\|_{(C^s(X))^*}\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}&\left\|\left(L_{\tilde{K},\bar{\rho}_X^{(T)}}-L_{\tilde{K},\rho_X}\right)h\right\|_{\tilde{K}}^2\\&\le\left\{\|h\|_{C^s(X)}\left[k^2\|h\|_{C^s(X)}+kk_s\|h\|_{\infty}\right]+\|h\|_{\infty}\left[kk_s\|h\|_{C^s(X)}+k_s^2\|h\|_{\infty}\right]\right\}\times\left\|\bar{\rho}_X^{(T)}-\rho_X\right\|_{(C^s(X))^*}^2\\&=\left(k\|h\|_{C^s(X)}+k_s\|h\|_{\infty}^2\right)\left\|\bar{\rho}_X^{(T)}-\rho_X\right\|_{(C^s(X))^*}^2\end{aligned}$$

当条件(2.2)满足时，在文献[8]中已经证明，$H_{\tilde{K}}$ 包含在 $C^s(X)$ 中，并且有下列式子成立

$$\|h\|_{C^s(X)}\le(k+k_s)\|h\|_{\tilde{K}},\forall h\in H_{\tilde{K}}$$

然后有

$$\left\|\left(L_{\tilde{K},\bar{\rho}_X^{(T)}}-L_{\tilde{K},\rho_X}\right)h\right\|_{\tilde{K}}\leq k\left(k+2k_s\right)\|h\|_{\tilde{K}}\left\|\bar{\rho}_X^{(T)}-\rho_X\right\|_{\left(C^s(X)\right)^*}$$

证明结束。

命题 3.2 假设 $L_{\tilde{K},\rho_X}^{-r}f_\rho\in L_{\rho_X}^2\,(1/2<r<2/3)$； $\tilde{K}$ 满足核条件(2.2)，则测量误差满足

$$\left\|f_{\lambda,\bar{\rho}_X^{(T)}}-f_{\lambda,\rho_X}\right\|_{\tilde{K}}\leq\frac{C_2\lambda^{r-3/2}}{T} \tag{3.6}$$

其中 $C_k=k\left(k+2k_s\right),C_2=C_1C_kC_r\alpha/(1-\alpha)$

证明：

$$\begin{aligned}\left\|f_{\lambda,\bar{\rho}_X^{(T)}}-f_{\lambda,\rho_X}\right\|_{\tilde{K}}&=\left\|\left(\lambda I+L_{\tilde{K},\bar{\rho}_X^{(T)}}\right)^{-1}\left\{\left(L_{\tilde{K},\bar{\rho}_X^{(T)}}-L_{\tilde{K},\rho_X}\right)f_\rho+\left(L_{\tilde{K},\rho_X}-L_{\tilde{K},\bar{\rho}_X^{(T)}}\right)f_{\lambda,\rho_X}\right\}\right\|_{\tilde{K}}\\&=\left\|\left(\lambda I+L_{\tilde{K},\bar{\rho}_X^{(T)}}\right)^{-1}\left(L_{\tilde{K},\bar{\rho}_X^{(T)}}-L_{\tilde{K},\rho_X}\right)\left(f_\rho-f_{\lambda,\rho_X}\right)\right\|_{\tilde{K}}\\&\leq\frac{1}{\lambda}\left\|\left(L_{\tilde{K},\bar{\rho}_X^{(T)}}-L_{\tilde{K},\rho_X}\right)\left(f_\rho-f_{\lambda,\rho_X}\right)\right\|_{\tilde{K}}\end{aligned}$$

应用引理 3.2，令 $h=f_\rho-f_{\lambda,\rho_X}$ ，得

$$\left\|f_{\lambda,\bar{\rho}_X^{(T)}}-f_{\lambda,\rho_X}\right\|_{\tilde{K}}\leq\frac{1}{\lambda}k\left(k+2k_s\right)\left\|\bar{\rho}_X^{(T)}-\rho_X\right\|_{\left(C^s(X)\right)^*}\left\|f_{\lambda,\rho_X}-f_\rho\right\|_{\tilde{K}}$$

根据 $\bar{\rho}_X^{(T)}$ 的定义和(2.1)式，有

$$\left\|\bar{\rho}_X^{(T)}-\rho_X\right\|_{\left(C^s(X)\right)^*}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left\|\rho_X^{(t)}-\rho_X\right\|_{\left(C^s(X)\right)^*}\leq\frac{C_1\alpha}{T\left(1-\alpha\right)}$$

最后联立命题，即得结论。

接下来分析样本误差，这里不再给予具体证明，详细证明过程可参考文献[9]。

命题 3.3 $f_{Z,\lambda}$ 由(1.1)给出；假设输出满足矩有界假设条件(2.3)；并且边缘分布序列 $\rho_X^{(t)}\in N$ ，且满足条件(2.1)，则

$$E\left\|f_{Z,\lambda}-f_{\lambda,\bar{\rho}_X^{(T)}}\right\|_\rho\leq\frac{C_k'}{\lambda^{3/2}T^{1/2}}$$

其中 $C_k'=2\sqrt{6}Mk^2+2\sqrt{10}Mk^3+C_3/(1-\alpha),C_3=\alpha C_1kM\left(k+2|k|_{C^s(X\times Y)}\right)\times(k+1)$

最后，证明定理 3.1。

证明：由命题 3.3，有

$$E\left\|f_{Z,\lambda}-f_{\lambda,\bar{\rho}_X^{(T)}}\right\|_\rho\leq\frac{C_k'}{\lambda^{3/2}T^{1/2}}$$

当 $1/2<r<3/2$ ，由命题 3.2，有

$$\left\|f_{\lambda,\bar{\rho}_X^{(T)}}-f_{\lambda,\rho_X}\right\|_{\tilde{K}}\leq\frac{C_2\lambda^{r-3/2}}{T}$$

并且由命题 3.1，有

$$\left\|f_{\lambda,\rho_X}-f_\rho\right\|_{\tilde{K}}\leq C_r\lambda^{r-1/2},$$

因为

$$\|f\|_{\rho} \le \|f\|_{\infty} \le k\|f\|_{\tilde{K}}, \forall f \in H_{\tilde{K}}$$

联立三个误差界，并令 $\lambda = T^{-\theta}\left(0 < \theta < 1/3\right)$，即可证明定理 3.1，其中 $C_k'' = \left(C_2 + C_r\right)k + C_k'$。

参考文献

[1] 郭芹, 孙红卫. 基于弱相关抽样的系数正则化的一致性分析[J]. 济南大学学报(自然科学版), 2010, 24(1): 99-103.

[2] Sun, H.W. and Wu, Q. (2011) Least Square Regression with Indefinite Kernels and Coefficient Regularization. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **30**, 96-109. https://doi.org/10.1016/j.acha.2010.04.001

[3] Nie, W.L. and Wang, C. (2016) Error Analysis of ERM Algorithm with Unbounded and Non-Identical Sampling. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **4**, 156-168. https://doi.org/10.4236/jamp.2016.41019

[4] Chu, X.R. and Sun, H.W. (2013) Regularized Least Square Regression with Unbounded and Dependent Sampling. *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, 900-914.

[5] Chu, X.R. and Sun, H.W. (2012) Coefficient Regularization with Unbounded Sampling. *Journal of Computational Information Systems*, **8**, 1613-1621.

[6] Gao, Q. and Ye, P.X. (2016) Coefficient-Based Regularized Regression with Dependent and Unbounded Sampling. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, **14**, No. 5. https://doi.org/10.1142/S0219691316500399

[7] Vapnik, V. (1979) Estimation of Dependent Based on Empirical Data. Nauka, Moscow.

[8] Sun, H.W. and Guo, Q. (2011) Coefficient Regularized Regression with Non-IID Sampling. *International Journal of Computer Mathematics*, **88**, 3113-3125. https://doi.org/10.1080/00207160.2011.587511

[9] Cai, J. (2013) Coefficient-Based Regression with Non-Identical Unbounded Sampling. *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, Article ID: 134727. https://doi.org/10.1155/2013/134727