

平面 $4 \cdot 8^2$ 格子图的消防员问题

邢之尧^{1*}, 边红^{1†}, 于海征², 魏丽娜¹

¹新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

²新疆大学数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2021年10月23日; 录用日期: 2021年11月13日; 发布日期: 2021年11月29日

摘要

消防员问题 (Firefighter Problem) 是一个离散的动态传播模型, 与疫情控制、谣言传播、森林防火等实际问题密切相关, 它最早是由著名计算机理论学家 Hartnell 在 1995 年的第 25 届组合数学与计算大会上首次提出的。令 $G = (V(G), E(G))$ 是 n ($n \geq 2$) 个顶点的连通图。假设火在图 G 中任意一个顶点 v 处燃起, 消防员则选择未着火的顶点去保护(一旦某个顶点被保护, 则在整个过程中都将处于被保护状态), 然后火蔓延到 v 的未加保护且没着火的邻点。依次下去, 火和消防员交替地在图 G 上移动, 直到火不能继续蔓延, 整个过程结束, 消防员的任务是使最后获救的点数最多。令 $sn(v)$ 表示当图 G 中的顶点 v 作为火源点时一个消防员所能保护的最多顶点数。图 G 的存活率 $\rho(G)$ 定义为 $\frac{\sum_{v \in V(G)} sn(v)}{n^2}$, 即当火随机地在图 G 的一个顶点燃起时, 一个消防员最多能保护的顶点数的平均值。本文首先研究有限平面 $4 \cdot 8^2$ 格子图的存活率, 分析格子图中点存活数的变化规律并给出有限 $4 \cdot 8^2$ 格子图的存活率的确切值; 从而证明了对于无限平面 $4 \cdot 8^2$ 格子图, 每个回合使用一个消防员经过有限次保护后可以控制火的蔓延。

关键词

消防员问题, 存活数, 存活率, 平面 $4 \cdot 8^2$ 格子图

The Firefighter Problem of Plane $4 \cdot 8^2$ Grids

* 第一作者。

† 通讯作者。

Zhiyao Xing^{1*}, Hong Bian^{1†}, Haizheng Yu², Lina Wei¹

¹School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

²College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Received: Oct. 23rd, 2021; accepted: Nov. 13th, 2021; published: Nov. 29th, 2021

Abstract

Firefighter Problem can be viewed as a discrete dynamic propagation model, which is closely related to the propagation of viruses, rumours or epidemics. Firefighter Problem was introduced by Hartnell at the 25th Manitoba Conference on Combinatorial Mathematics and Computing. Let G be a connected graph with $n(n \geq 2)$ vertices. Assume that a fire breaks out at a vertex v of G , a firefighter (or defender) chooses a set of vertices not yet on fire to protect; once a vertex has been chosen by the firefighter, it is considered protected or safe from any further moves of the fire. The process ends when the fire can no longer spread. Let $sn(v)$ denote the maximum number of vertices in G that the firefighter can save when a fire breaks out at vertex v , which can be referred to as the surviving number for v . The surviving rate $\rho(G)$ of graph G is defined to be the average percentage of vertices that can be saved when a fire randomly breaks out at one vertex of graph, *i.e.*, $\frac{\sum_{v \in V(G)} sn(v)}{n^2}$. In this paper, we firstly study the surviving rate of finite $4 \cdot 8^2$ grids, and present the exact value of the surviving rate of finite $4 \cdot 8^2$ grids. Moreover, we prove that when fire breaks out at any vertex in infinite $4 \cdot 8^2$ grids, using one firefighter in each turn can control the spread of a fire after a limited amount of protection.

Keywords

Firefighters Problem, Surviving Number, Surviving Rate, Plane $4 \cdot 8^2$ Grids Graph

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

新冠肺炎 (COVID-19) 大流行被广泛认为是现代医学史上面临的最危及生命的问题, 它正在扰乱世界各地的人类健康和经济. 它的起源虽未有定论, 但已迅速在国内、外蔓延. 截至 2020 年 4 月 3 日, 全球确诊病例为 1,116,643 例, 其中包括 59,158 例死亡 (根据世界仪表信息). 截止到目前, 都还没有针对这种新疾病的具体特效药物. 而消防员问题 (Firefighter Problem) 是一个离散的动态传播模型, 与疫情控制、谣言传播、森林防火等实际问题密切相关, 它最早是由著名计算机理论学家 Hartnell 在 1995 年的第 25 届组合数学与计算大会上首次提出的 [1]. 假设在时间 $t = 0$ 时刻, 图 $G = (V(G), E(G))$ 中任意一个顶点 v 作为火源点, 对于每一个单位时间 $(i, i + 1]$, $i \geq 0$, 一个消防员保护一个未燃烧的点 (这个点一旦被保护, 则在整个过程中都将处于被保护状态), 然后火蔓延到 v 的未加保护且没有着火的邻点. 依次下去, 火和消防员交替地在图 G 上移动, 直到火不能继续蔓延, 整个过程结束. 最后, 图 G 中的顶点有三种状态, 分别是烧着的顶点、被保护的顶点和既没有烧着也没有被保护的顶点, 没有烧着的点称为被获救的点. 由于在整个过程中, 只有消防员有干预策略, 而火并没有采取策略, 它只是蔓延到它的邻点, 所以消防员问题也可以看成是一个人的组合游戏. 传统的流行病模型都是假设群体之间是相互混杂的, 个体之间相互联系并且可以把疾病传播给彼此. 然而, 最近流行病学家试图将空间信息也包含在他们的模型中. 因此, 消防员问题在某种意义上可以看成没有治愈的新冠疾病的传播模型. 事实上, 由于在现实生活中有效的疫苗是有限的并且疫苗的管理人员也是有限的, 因此, 每一步只允许有限个没有感染的人接种疫苗. 那么一个很自然的问题就是如何接种使得最后感染的人数达到最少?

自 Hartnell 提出消防员问题后, 许多衍生的概念和问题相继被提出. 2009 年王维凡等人 [2] 率先引入图的存活率的概念, 并对树、外可平面图和哈林图等特殊图类研究了单人防火问题. 令 $sn(v)$ 表示在图 G 中当点 v 作为火源点一个消防员在整个保护过程结束后可以保护点的最多顶点数, 称为点 v 的存活数. 由此, 图 G 的存活数 $sn(G)$ 被定义为当火随机地在图 G 中任意一个顶点爆发时, 一个消防员最多可以保护的顶点数, 即 $sn(G) = \sum_{v \in V(G)} sn(v)$. 图 G 的存活率定义如下: $\rho(G) = \frac{sn(V(G))}{n^2}$, 表示一个消防员最多可以保护的顶点数.

设 k 是正整数, k -消防员问题就是要求消防员每一步保护 k 个未加防护且没有被烧着的点, 直到火不再蔓延整个过程结束 (即若一个消防员选择一个顶点进行防护, 则每一步需要 k 个消防员). 类似地, 用 $sn_k(v)$ 表示图 G 中当顶点 v 作为火源点时用 k 个消防员最多可以保护的顶点数. 图 G 的 k -存活数 $sn_k(G)$ 被定义为随机地选择 G 中的某个点为火源点, 那么 k 个消防员最多可以保护的顶点数, 即 $sn_k(G) = \sum_{v \in V(G)} sn_k(v)$, 图 G 的 k -存活定义为: $\rho_k(G) = \frac{sn_k(V(G))}{n^2}$. 显然, k -消防员问题是消防员问题的推广.

在不同图类消防员问题相继被研究. 在 1995 年 Hartnell 等人在文献 [1] 就已经证明了对于二部图消防员问题是 NP -完全问题. Ng 和 Raff 在 2008 年 [3] 证明, 如果可用的消防员数量在时间 t 中是周期性变化的, 并且每个时间周期的平均消防员个数大于 $\frac{3}{2}$, 那么对于二维无限格子图中, 任意有限个顶点开始燃烧的火灾都可以被控制. 2010 年 Finbow 等人 [4] 探究了如下特殊图的存活率, 如: 平面图、围长比较大的平面图, 不含 K_4 minor 子式的图和 d -退化图等, 并证明了如下结果:

- 1) 几乎所有图的 k -存活率任意趋于 0.
- 2) 对于围长至少是 9 的平面图 G , 有 $\rho(G) \geq \frac{2}{35}$.

- 3) 对于不含 K_4 minor 子式的图, 有 $\rho_2(G) \geq \frac{1}{16}$.
 4) 对于 d -退化图 G , 有 $\rho_{2d-1}(G) \geq \frac{2}{5d}$.
 5) 对于平面图 G , 有 $\rho_5(G) \geq \frac{2}{15}$.

在 2017 年 Adjashvili 等人 [5] 研究了数的消防员问题和资源最少的防火控制问题, 并证明了对于树的消防员问题有一个 PTAS 算法.

本文主要研究了平面 $4 \cdot 8^2$ 格子图的消防员问题. 首先研究有限平面 $4 \cdot 8^2$ 格子图的存活率, 分析格子图中点存活数的变化规律并给出有限 $4 \cdot 8^2$ 格子图的存活率的确切值, 从而证明了对于无限平面 $4 \cdot 8^2$ 格子图, 每个回合使用一个消防员经过有限次保护后可以控制火的蔓延.

2. 主要结果

2.1. 有限 $4 \cdot 8^2$ 格子图

2000 年, Shrock 和 Wu 在文献 [6] 给出了平面 $4 \cdot 8^2$ 格子 $G^t(n, m)$ 的生成数数目和渐进常数的计算公式. 本节中基于平面 $4 \cdot 8^2$ 格子图考虑在有限情况下任意一个点作为起始火源点并且每个回合只用一个消防员去保护其他点. $G^t(n, m)$ 中 m 表示小正方形的层数, n 表示每层小正方形的个数, 根据图的构造可以看出每一层正八边形的个数为 $n + 1$. 令 l 表示点的层数, 可以得到关系式 $l = 3m + 4$. 容易看出这类格子图是由一些正八边形粘贴组成, 图中只有二度或者三度点, 并且粘贴类型与六角格子图类似, 粘贴方式如图 1 所示:

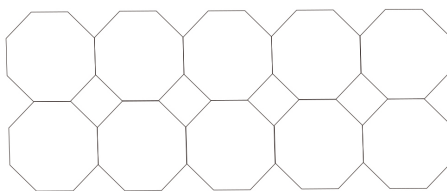


Figure 1. The grid graph $G^t(4, 1)$

图 1. $G^t(4, 1)$ 格子图

引理 2.1 对于有限平面 $4 \cdot 8^2$ 格子, 比较好的保护策略就是被消防员保护的点形成一个包围圈 C .

证明 因为考虑的是有限格子图, 所以图是有边界的. 根据方位把防火墙分为东部、西部、南部、北部. 最终目的是用防火墙和格子图边界重合形成一个包围圈 C .

在 $t = 0$ 时假设火爆发在图 G 中任意一个点 v ; $t = 1$ 时消防员选择 v 的任一邻点去保护使得消防员在火源邻近位置; $t = 2$ 时火蔓延到点 v 没有被保护和没有燃烧的邻点. 放置消防员在合适的位置上为了确保这些消防员对控制火的蔓延是有效地. 继续上述过程, 直到消防员保护的点组成的防火墙与格子图的边界重合在一起形成一个包围圈 C , 那么火将不再蔓延. 如图 2 中, 点旁边的数字表示在时间 $t = 0, 1, 2, \dots, 9$ 对这个点所进行的操作. 图中红色的点表示被火蔓延的点(其中标号为 0 的红色点为火源点), 蓝色的点表示被消防员保护的点.

因为平面 $4 \cdot 8^2$ 格子图具有对称性, 所以消防员保护点形成包围圈时, 可以发现在固定点的

层数时有些点具有相同的存活数并且有类似的保护策略. 例如, 点 $v_2^i, v_2^{i+1}, \dots, v_2^{i+j}$ 都在同一层, 并且它们的存活数依次为 $sn(v_2^i), sn(v_2^{i+1}), \dots, sn(v_2^{i+j})$, 那么可以得到等式 $sn(v_2^i) = sn(v_2^{i+1}) = \dots = sn(v_2^{i+j})$.

根据平面 $4 \cdot 8^2$ 格子图的粘贴方式和构造, 可以定义三种不同的点集, 并且以下的证明过程都使用这种点集的分类.

$$V_2^1 = \{v \in V_2 \mid v \text{ 邻接一个二度点和一个三度点, 或者邻接的都是二度点}\}.$$

$$V_3^1 = \{v \in V_3 \mid v \text{ 邻接二度点和三度点}\}.$$

$V_3^2 = \{v \in V_3 \mid v \text{ 邻接的都是三度点}\}$, 这里 V_2 表示在 $G^t(n, m)$ 中度数为 2 的点集, V_3 具有类似定义点集.

首先证明 $G^t(n, 3)$ 的存活率并且在 $G^t(n, 3)$ 中详细叙述这个保护过程.

定理 2.2 对于 $G^t(n, 3)$, 则 $\rho(G^t(n, 3)) = \frac{324n^2 + 784n + 684}{(18n + 26)^2}$.

证明 令第 1 层点数为 n , 则有第 4, 7, 10 层点数为 $\frac{n}{2} + 1$, 其余层点数都与第 1 层相同, $V(G^t(n, 3)) = 18n + 26 (n \geq 3)$.

情形 1 若火源点是 V_2^1 中的点.

如果 $v_1^1 \in V_2^1$ 是火源点. 在时刻 $t = 1$ 保护 v_1^2 ; $t = 2$ 保护 v_3^1 , 此时火就不再蔓延. 由此可以得到 $sn(v_1^1) = 18n + 24$. 与 v_1^1 有类似保护策略和相同存活数的点有: $v_2^1, v_2^{\frac{n}{2}+1}, v_3^1, v_3^{\frac{n}{2}+1}, v_5^1, v_5^{\frac{n}{2}+1}, v_6^1, v_6^{\frac{n}{2}+1}, v_8^1, v_8^{\frac{n}{2}+1}, v_9^1, v_9^{\frac{n}{2}+1}, v_{11}^1, v_{11}^{\frac{n}{2}+1}, v_{12}^1, v_{12}^{\frac{n}{2}+1}; v_1^2, \dots, v_1^n; v_{13}^1, \dots, v_{13}^n$.

情形 2 若火源点是 V_3^1 中的点.

如果 $v_2^2 \in V_3^1$ 是火源点. 在时刻 $t = 1$ 保护 v_3^2 ; $t = 2$ 保护 v_1^4 ; $t = 3$ 保护 v_2^1 , 此时火不再蔓延. 由此可以得到 $sn(v_2^2) = 18n + 22$. 与点 v_2^2 有类似保护策略和相同存活数的点有: $v_2^3, v_4^2, \dots, v_2^{\frac{n}{2}}; v_{12}^2, v_{12}^3, \dots, v_{12}^{\frac{n}{2}}; v_7^1, v_7^n$.

情形 3 若火源点是 V_3^2 中的点.

子情形 3.1 如果 $v_3^2 \in V_3^2$ 是火源点. 在时刻 $t = 1$ 保护 v_2^2 开始建立一个西部防火墙; $t = 2$ 保护 v_4^4 使得适当延长西部防火墙的长度; $t = 3$ 保护 v_6^6 开始建立一个南部水平方向防火墙; $t = 4$ 保护 v_6^1 使得适当延长南部防火墙的长度并且与格子图的东部边界重合; $t = 5$ 保护 v_1^1 开始建立一个北部防火墙并且与格子图的东部边界重合. 至此这些不同方向的防火墙和格子图的边界彼此都互相重合最终形成包围圈使得火停止蔓延, v_3^2 存活数表达式 $sn(v_3^2) = 18n + 18$. 与点 v_3^2 有类似保护策略和相同存活数的点有: $v_3^{\frac{n}{2}}; v_4^2, v_4^3, \dots, v_4^{n-1}; v_{11}^2, v_{11}^{\frac{n}{2}}; v_{10}^2, v_{10}^3, \dots, v_{10}^{n-1}; v_5^2, v_5^{\frac{n}{2}}, v_6^2, v_6^{\frac{n}{2}}, v_7^2, v_7^{n-1}, v_8^2, v_8^{\frac{n}{2}}, v_9^2, v_9^{\frac{n}{2}}$.

子情形 3.2 如果 $v_3^3 \in V_3^2$ 是火源点. 在时刻 $t = 1$ 保护 v_4^4 开始建立一个西部防火墙; $t = 2$ 保护 v_4^6 开始建立一个东部防火墙; $t = 3$ 保护 v_6^6 使得适当延长西部防火墙的长度并且与东部防火墙重合; $t = 4$ 保护 v_2^2 使得适当延长西部防火墙的长度并且与格子图的北部边界重合; $t = 5$ 保护点 v_3^4 使得适当延长东部防火墙的长度; $t = 6$ 保护 v_1^8 使得东部防火墙与格子图的北部边界重合. 最后这些防火墙与格子图的边界彼此重合并且形成包围圈, v_3^3 存活数表达式 $sn(v_3^3) = 18n + 16$. 与点 v_3^3 有类

似保护策略和相同存活数的点有: $v_3^4, v_5^5, \dots, v_3^{\frac{n}{2}-1}; v_{11}^3, v_{11}^4, \dots, v_{11}^{\frac{n}{2}-1}$.

子情形 3.3 如果 $v_5^3 \in V_3^2$ 是火源点. 在时刻 $t = 1$ 保护 v_6^3 开始建立一个南部防火墙; $t = 2$ 保护 v_4^6 开始建立一个东部防火墙; $t = 3$ 保护 v_5^2 开始建立一个西部防火墙; $t = 4$ 保护 v_4^2 使得适当延长西部防火墙的长度; $t = 5$ 保护 v_1^6 使得适当延长东部防火墙的长度并且与格子图的北部边界重合; $t = 6$ 保护 v_1^1 使得西部防火墙与格子图的北部边界重合. 最后这些防火墙与格子图的边界彼此重合形成一个包围圈并且阻止火的蔓延, v_5^3 存活数表达式 $sn(v_5^3) = 18n + 14$. 与点 v_5^3 有类似保护策略和相同存活数的点有: $v_5^4, v_5^5, \dots, v_5^{\frac{n}{2}-1}; v_9^3, v_9^4, \dots, v_9^{\frac{n}{2}-1}; v_7^3, v_7^{n-2}$.

子情形 3.4 如果 $v_6^3 \in V_3^2$ 是火源点. 在时刻 $t = 1$ 保护 v_5^3 开始建立一个北部防火墙; $t = 2$ 保护 v_7^3 开始建立一个西部防火墙; $t = 3$ 保护 v_9^3 使得适当延长西部防火墙的长度; $t = 4$ 保护 v_4^5 开始建立一个东部防火墙; $t = 5$ 保护 v_7^8 使得适当延长东部防火墙的长度; $t = 6$ 保护 v_{10}^8 进而适当延长东部防火墙的长度; $t = 7$ 保护 v_{12}^4 开始建立一个南部防火墙并且与西部防火墙重合; $t = 8$ 保护 v_{12}^3 使得适当延长南部防火墙的长度; $t = 9$ 保护 v_{10}^3 使得适当延长西部防火墙的长度并且与南部防火墙重合. 最后这些防火墙与格子图的边界彼此重合形成一个包围圈并且阻止火的蔓延. v_6^3 存活数表达式 $sn(v_6^3) = 18n + 11$. 与点 v_6^3 有类似保护策略和相同存活数的点有: $v_6^4, v_6^5, \dots, v_6^{\frac{n}{2}-1}; v_7^4, v_7^5, \dots, v_7^{n-3}; v_8^3, v_8^4, \dots, v_8^{\frac{n}{2}-1}$.

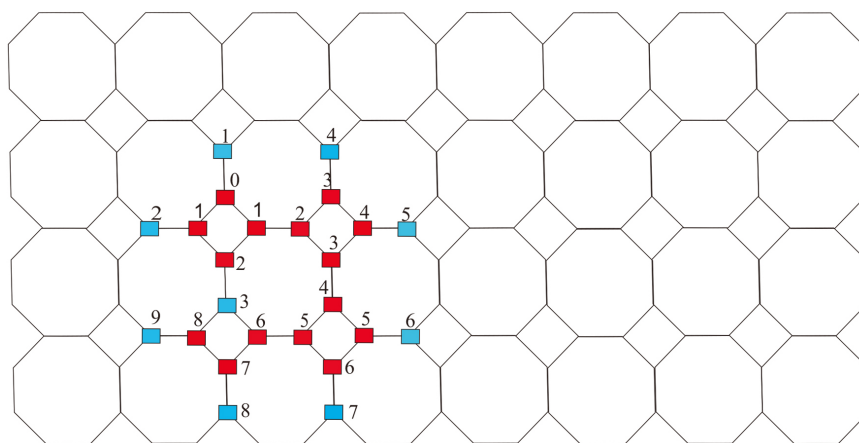


Figure 2. The graph of subcase 3.4

图 2. 子情形 3.4 的示意图

综合上述的推理过程, 可以得到存活数为 $sn(v) = 18n + 24$, $sn(v) = 18n + 22$, $sn(v) = 18n + 18$, $sn(v) = 18n + 16$, $sn(v) = 18n + 14$, $sn(v) = 18n + 11$ 的点对应的个数表达式依次为 $4n + 20$, $2n + 6$, $4n + 14$, $2n - 4$, $2n - 2$, $4n - 8$. 把这些个数进行求和, 最后可以得到 $G^t(n, 3)$ 的存活率. 计算过程表达式如下:

$$\begin{aligned} sn(G^t(n, 3)) &= (4n + 20)(18n + 24) + (2n + 6)(18n + 22) \\ &\quad + (4n + 14)(18n + 18) + (2n - 4)(18n + 16) \\ &\quad + (2n - 2)(18n + 14) + (4n - 8)(18n + 11) \\ &= 324n^2 + 784n + 684 \end{aligned}$$

所以, $\rho(G^t(n, 3)) = \frac{324n^2+784n+684}{(18n+26)^2} \quad (n \geq 3)$.

对于 $m=1, 2$, 可以根据上述 $m=3$ 的情况进行类似的推理证明过程得到如下的结果.

定理 2.3 对于 $G^t(n, 1)$, 则 $\rho(G^t(n, 1)) = \frac{100n^2+228n+172}{(10n+14)^2}$.

证明 在 $G^t(n, 1)$ 格子图中点的个数 $V(G^t(n, 1)) = 10n + 14$. 并且可以得到存活数为 $sn(v) = 10n + 12$, $sn(v) = 10n + 10$, $sn(v) = 10n + 6$, $sn(v) = 10n + 4$ 的点个数通项表达式依次为 $4n + 12$, $2n + 2$, $2n + 4$, $2n - 4$. 最后得到图 $G^t(n, 1)$ 存活数如下计算表达式:

$$\begin{aligned} sn(G^t(n, 1)) &= (4n + 12)(10n + 12) + (2n + 2)(10n + 10) \\ &+ (2n + 4)(10n + 6) + (2n - 4)(10n + 4) \\ &= 100n^2 + 228n + 172 \end{aligned}$$

所以, $\rho(G^t(n, 1)) = \frac{100n^2+228n+172}{(10n+14)^2} \quad (n \geq 2)$.

定理 2.4 对于 $G^t(n, 2)$, 则 $\rho(G^t(n, 2)) = \frac{196n^2+468n+316}{(14n+20)^2}$.

证明 在 $G^t(n, 2)$ 格子图点的个数 $V(G^t(n, 2)) = 14n + 20$. 可以得到存活数为 $sn(v) = 14n + 18$, $sn(v) = 14 + 16$, $sn(v) = 14n + 12$, $sn(v) = 14n + 10$, $sn(v) = 14n + 8$ 的点个数通项表达式依次为 $4n + 16$, $2n + 4$, $4n + 8$, $2n - 4$, $2n - 4$. 最后可以得到图 $G^t(n, 2)$ 存活数如下计算推理过程:

$$\begin{aligned} sn(G^t(n, 2)) &= (4n + 16)(14n + 18) + (2n + 4)(14n + 16) \\ &+ (4n + 8)(14n + 12) + (2n - 4)(14n + 10) \\ &+ (2n - 4)(14n + 8) = 196n^2 + 468n + 316 \end{aligned}$$

所以, $\rho(G^t(n, 2)) = \frac{196n^2+468n+316}{(14n+20)^2} \quad (n \geq 3)$.

当 $m=4$ 时, 可以得到 $G^t(n, 4)$ 的顶点数 $V(G^t(n, 4)) = 22n + 32$, 并且图中所有点对应的存活数种类数与上述 $m=3$ 的情况相同. 通过总结和推广, 对于任意有限的 m 和 n , 可以得到图 $G^t(n, m)$ 的顶点数和 m, n 之间的关系表达式 $V(G^t(n, m)) = 4(m+1)(n+1) + 2(m+n+2)$, 这里 $m, n \in N^+$. 并且可以得到在格子图 $G^t(n, m)$ 中: (1) 存活数为 $sn(v) = (V(G^t(n, m)) - 2)$ 的点数 $4(n+m+2)$; (2) 存活数为 $sn(v) = (V(G^t(n, m)) - 4)$ 的点数 $2(m+n)$; (3) 存活数为 $sn(v) = (V(G^t(n, m)) - 8)$ 的点数 $4n + 6m - 4$; (4) 存活数为 $sn(v) = (V(G^t(n, m)) - 10)$ 的点数 $2n - 4$; (5) 存活数为 $sn(v) = (V(G^t(n, m)) - 12)$ 的点数 $2(m+n) - 8$; (6) 存活数为 $sn(v) = (V(G^t(n, m)) - 15)$ 的点在图中具有如下的位置特征: 这些点位于一个矩形区域中, 这个矩形区域边界上的点和区域里面的点都是符合的点, 而且这个矩形区域边界上的点到格子图边界上度数为 2 的点距离都是 5. 这里的距离是指两点之间最短路的长度.

2.2. 无限平面 $4 \cdot 8^2$ 格子

无限图的消防员问题主要研究在给定消防员数目的前提下是否能在有限时间内将火控制住, 或者消防员如何防护使得最后获救的顶点数最多. 对于无限平面 $4 \cdot 8^2$ 格子图, 关注的重点是如果每个回合只使用一个消防员那么对于任意一个火源点是否可以控制火的蔓延. 根据引理 2.1 的保护思想能否可以找到一个比较好的保护策略使得消防员形成一个包围圈. 下面定理 2.6 证明了这个猜想并且给出了控制火整个过程使用的回合数和燃烧点个数的下界. 令 v_i^j 表示平面 $4 \cdot 8^2$ 格子图中任意一点, 点 v_i^j 坐标及其邻点标记方式如图 3 所示.

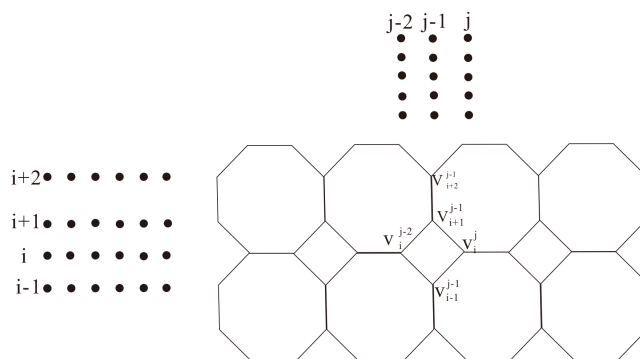


Figure 3. The coordinate of v_i^j and its neighbourhood

图 3. v_i^j 点坐标及其邻点示意图

定理 2.5 对于无限平面 $4 \cdot 8^2$ 格子图如果每个回合使用一个消防员, 那么在第 9 个回合结束这个火就不再蔓延, 而且燃烧点的个数最少为 15.

证明 在无限平面 $4 \cdot 8^2$ 格子图中, 只有三度点存在图中. 使用的保护策略如下: 在时间 $t = 0$, 假设平面 $4 \cdot 8^2$ 格子图中任一点 v_i^j 为火源点; $t = 1$ 放置消防员在 v_{i+1}^{j+1} ; $t = 2$ 消防员放在 v_{i-2}^{j-1} ; $t = 3$ 消防员放在 v_{i-3}^{j-3} 并且适当延长防火墙的长度; $t = 4$ 消防员放在 v_{i+3}^{j+1} 阻止火的蔓延; $t = 5$ 放置消防员在 v_{i+5}^{j-1} 开始建立一个东部防火墙; $t = 6$ 放置消防员在 v_{i+5}^{j-4} 适当延长东部防火墙的长度; $t = 7$ 放置消防员在 v_{i+3}^{j-6} 并且开始建了一个南部防火墙; $t = 8$ 放置消防员在 v_i^{j-6} 适当延长南部防火墙的长度; $t = 9$ 放置消防员在 v_{i-2}^{j-4} 适当延长西部防火墙的长度并且与南部防火墙相重合. 最终这些防火墙彼此相重合形成一个包围圈使得火不再传播. 如图 2 所示, 放置消防员在这些点的位置上可以得到点的存活数为 $sn(v) = V(G^t(n, m)) - 15$.

从无限平面 $4 \cdot 8^2$ 格子图的结构, 可以看出由于正八边形的粘贴方式产生一些小正方形, 而这些小正方形上的着火点在有限次的保护回合后使得回到前面已经被燃烧的点邻近位置, 因此可以减少燃烧点覆盖的区域. 所以希望被放置的消防员可以尽可能回到火源点邻近的位置上, 进而形成一个包围圈使得火不再蔓延. 当火停止蔓延时, 上述使用的保护策略使得燃烧区域只包含 9 个正八边形, 还可以看到这个燃烧区域最外面一圈消防员的个数为 9, 并且这个燃烧区域总共的燃烧点的个数最少为 15, 如图 2 所示.

基金项目

国家自然科学基金项目(11761070, 61662079); 2021年新疆维吾尔自治区自然基金联合项目(2021D01C078); 2020年新疆师范大学一流专业、一流课程项目资助.

参考文献

- [1] Hartnell, B.L. (1995) Firefighter! An Application of Domination. *Presentation at the 25th Manitoba Conference on Combinatorial Mathematics and Computing*, University of Manitoba, Winnipeg, Canada.

- [2] Cai, L.Z. and Wang, W.F. (2009) The Surviving Rate of a Graph for the Firefighter Problem. *Discrete Mathematics*, **23**, 1814-1826. <https://doi.org/10.1137/070700395>
- [3] Ng, K.L. and Raff, P. (2008) A Generalization of the Firefighter Problem on $Z \times Z$. *Discrete Applied Mathematics and Combinatorial Computing*, **156**, 730-745.
- [4] Wang, W., Finbow, S. and Wang, P. (2010) On the Surviving Rate of a Graph. *Theoretical Computer Science*, **411**, 3651-3660. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2010.06.009>
- [5] Adjashvili, D., Baggio, A. and Zenklusen, R. (2017) Firefighting on Trees beyond Integrality Graphs. *Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA2017)*, Barcelona, 16-19 January 2017, 2364-2383. <https://doi.org/10.1137/1.9781611974782.156>
- [6] Shorck, R. and Wu, F.Y. (2000) Spanning Trees on Graphs and Lattices in d Dimensions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **33**, 3881-3902. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/21/303>