Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(11), 3673-3678**
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1011389

Hans汉斯

G-Brown运动驱动的非线性随机泛函微分方程解的存在唯一性

梁伟生，苏华燕，李光洁*

广东外语外贸大学数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2021年10月5日；录用日期：2021年10月26日；发布日期：2021年11月8日

摘 要

目前，关于证明G-Brown运动驱动的非线性随机泛函微分方程解的全局存在唯一性的成果相对较少。本文利用G-Lyapunov函数方法获得了一类G-Brown运动驱动的非线性随机泛函微分方程解的全局存在唯一性的充分条件。最后，通过一个例子说明所得出的结论。

关键词

非线性随机泛函微分方程，G-Brown运动，存在唯一性

The Existence and Uniqueness of Solutions to Nonlinear Stochastic Functional Differential Equations Driven by G-Brownian Motion

Weisheng Liang, Huayan Su, Guangjie Li*

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong

Received: Oct. 5th, 2021; accepted: Oct. 26th, 2021; published: Nov. 8th, 2021

Abstract

There are not so many results on the existence and uniqueness of solutions to nonlinear stochastic functional differential equations driven by G-Brownian motion (G-SFDEs). By G-Lyapunov function

*通讯作者。

文章引用: 梁伟生，苏华燕，李光洁. G-Brown 运动驱动的非线性随机泛函微分方程解的存在唯一性[J]. 应用数学进展, 2021, 10(11): 3673-3678. DOI: 10.12677/aam.2021.1011389

technique, the existence and uniqueness of the global solution to a G-SFDE is obtained. Finally, an example is presented to illustrate the obtained theory.

Keywords

Nonlinear Stochastic Functional Differential Equations, G-Brownian Motion, The Existence and Uniqueness

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

随机微分方程常用来刻画随机微分系统，且已广泛地应用于科学工业中(见文献[1] [2])。但实际中，许多随机微分系统的演化不仅依赖于当前状态的信息而且和过去状态的信息也相关，对于这样的情形一般用随机泛函微分方程来描述。随机泛函微分方程也已被广泛地应用于生物工程、化学工程等领域(见文献[3] [4] [5] [6])。

为了解决不确定性问题、风险度量问题以及金融中的超对冲超定价问题等，彭在文献[7]和[8]中提出了一类非线性期望(即 G-期望)。在 G-期望框架理论下，彭进一步介绍了 G-Brown 运动及其 Itô 积分。自此，G-Brown 运动驱动的随机微分方程的研究逐渐得到了学者们的关注。Faizullah 等人在文献[9]中利用比较定理、Gronwall 不等式以及 Burkholder-Davis-Gundy 不等式讨论了 G-Brown 运动驱动的随机泛函微分方程解的存在唯一性。后来，Faizullah 在文献[10]中利用 Picard 逼近方法证明了 G-Brown 运动驱动的随机泛函微分方程解的存在唯一性。陈和杨在文献[11]中利用 G-期望理论探讨了 G-Brown 运动驱动的中立型随机泛函微分方程解的存在唯一性。陈等人在文献[12]中研究了 G-Brown 运动驱动的高度非线性随机时滞微分方程解的存在唯一性。本文考虑用一个弱的条件替代方程系数满足的线性增长条件，然后利用 G-Lyapunov 函数方法给出了所研究的 G-Brown 运动驱动的随机泛函微分方程解的存在唯一性的充分条件。

该文结构如下：第 2 节给出所需的预备知识；第 3 节证明了所研究方程解的存在唯一性；最后，用一个例子说明所得的结果。

2. 预备知识

记 R^n 表示 n-维的欧式空间。若 $x \in R^n$，$|x|$ 表示欧式范数。记 $R=(-\infty,+\infty)$，$R^+=[0,+\infty)$。对任意的 $a,b \in R$，$a \vee b$ 表示二者中的最大值。令 $\tau>0$，$C([-\tau,0];R)$ 表示所有定义在 $[-\tau,0]$ 上的实值连续函数 φ 的全体，且其上的范数为 $\|\varphi\|=\sup_{-\tau\le\theta\le0}|\varphi(\theta)|$。$U([-\tau,0];R^+)$ 表示所有定义在 $[-\tau,0]$ 上 Borel 可测的有界非负函数 $\eta(s)$ 且满足 $\int_{-\tau}^{0}\eta(s)\mathrm{d}s=1$ 的全体。I_B 表示集合 B 的示性函数。

关于定义在次线性空间 $(\Omega,\mathcal{H},\hat{E})$ 上的 G-正态分布、G-期望、G-Brown 运动以及相关的 Itô 积分和 G-Brown 运动二次变差过程的详细介绍可进一步参阅文献[7]和[8]。本文研究的是 1-维 G-Brown 运动 $(\omega(t))_{t\ge0}$，且对任意的 $a \in R$，$G(a)=\frac{1}{2}\hat{E}[a\omega^2(1)]=\frac{1}{2}(\bar{\sigma}^2a^+-\underline{\sigma}^2a^-)$，其中 $\hat{E}[\omega^2(1)]=\bar{\sigma}^2$，

$-\hat{E}\left[-\omega^2(1)\right]=\underline{\sigma}^2\ \ (0\le\underline{\sigma}\le\bar{\sigma}<\infty)$。$\mathcal{F}_t$ 表示由 G-Brown 运动 $(\omega(t))_{t\ge 0}$ 生成的滤子。对 $\forall T\in\mathbf{R}^n$，$[0,T]$ 上的一个分割 $\pi_T=\{t_0,t_1,\cdots,t_N\}$ 满足 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_N=T$，$\mu(\pi_T)=\max\{|t_{i+1}-t_i|:i=0,1,\cdots,N-1\}$。给定 $p\ge 1$，定义

$$M_G^{p,0}([0,T])=\left\{\eta_t=\sum_{j=0}^{N-1}\xi_j I_{[t_j,t_{j+1})}(t):\xi_j\in L_G^p(\Omega_{t_j})\right\}.$$

$M_G^p([0,T])$ 表示 $M_G^{p,0}([0,T])$ 在范数 $\|\eta\|_{M_G^{p,0}([0,T])}=\left(\frac{1}{T}\int_0^T\hat{E}\left[|\eta_t|^p\right]\mathrm{d}t\right)^{1/p}$ 下的完备空间。接下来给出一个命题(见文献[8])。

命题 1 如果 $\hat{E}$ 是 G-期望，那么存在定义在 $(\Omega,\mathfrak{B}(\Omega))$ 的概率测度 P 的弱紧集 $\mathcal{P}$ 使得对所有的 $X\in\mathcal{H}$，有 $\hat{E}[X]=\max_{P\in\mathcal{P}}E_P[X]$，其中 $E_P[.]$ 是关于概率测度 P 的线性期望。

注： 一个集合 $A\in\mathfrak{B}(\Omega)$ 被称为是极集如果 $\hat{C}(A)=0$，其中 $\hat{C}(A)=\sup_{P\in\mathcal{P}}P(A)$。除去一个极集后若一个性质是恒成立的，则称该性质是拟必然(q.s.)成立的。

考虑如下形式的 G-Brown 运动驱动的非线性随机泛函微分方程：

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t),x_t,t)\mathrm{d}t+g(x(t),x_t,t)\mathrm{d}\langle\omega\rangle(t)+h(x(t),x_t,t)\mathrm{d}\omega(t),\ t\ge 0 \tag{1}$$

初始值

$x_0=\varphi=\{\varphi(\theta):-\tau\le\theta\le 0\}$ 是 $\mathcal{F}_0$-可测的，$C([-\tau,0];R)$-值随机变量，且满足 $\varphi\in M_G^2([-\tau,0];R)$。(2)

这里 $x(t)$ 表示随机过程在 t 时刻的值，$x_t=\{x(t+\theta):-\tau\le\theta\le 0\}$，$f,g,h:R\times R\times R^+\to R$ 是连续的函数。

接下来，考虑方程(1)的系数不满足线性增长条件而满足非线性增长条件。为了讨论方程(1)的全局解的存在唯一性，先假设该方程系数满足如下的局部 Lipschitz 条件。

(A1) 对任意的 $k>0$，存在一个常数 $L_k>0$ 使得对 $\forall t\ge 0$ 和 $\varphi,\phi\in C([-\tau,0];R)$，有

$$\begin{aligned}&|f(\varphi(0),\varphi,t)-f(\phi(0),\phi,t)|\vee|g(\varphi(0),\varphi,t)-g(\phi(0),\phi,t)|\\&\vee|h(\varphi(0),\varphi,t)-h(\phi(0),\phi,t)|\le L_k\|\varphi-\phi\|\end{aligned},$$

其中，$\|\varphi\|\vee\|\phi\|\le k$。

令 $C^{2,1}(R\times R^+;R^+)$ 表示关于变量 x 二阶连续可导，关于变量 t 一阶连续可导的全体非负函数 $V(x,t)$ 的全体。给定 $\forall V(x,t)\in C^{2,1}(R\times R^+;R^+)$，定义算子

$$LV(x,y,t)=V_t(x,t)+V_x(x,t)f(x,y,t)+G\left(2g(x,y,t)V_x(x,t)+V_{xx}(x,t)h^2(x,y,t)\right),$$

其中，$V_t(x,t)=\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}$，$V_x(x,t)=\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}$，$V_{xx}(x,t)=\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$。

3. 主要结果

定理 假设条件(A1)成立。给定初始值(2)。若存在一个函数 $V(x,t)\in C^{2,1}(R\times R^+;R^+)$，$\eta\in U([-\tau,0];R^+)$ 和 $W\in C(R\times[-\tau,\infty);R^+)$，非负数 C 以及正常数 α_1 和 α_2 (且 $\alpha_1\ge\alpha_2$)满足对 $\forall t\ge 0$，有

$$\liminf_{|x|\to\infty,0\le t<\infty}V(x,t)=\infty, \tag{3}$$

$$LV(\varphi(0),\varphi,t)\le C-\alpha_1W(\varphi(0),t)+\alpha_2\int_{-\tau}^0\eta(\theta)W(\varphi(\theta),t+\theta)\mathrm{d}\theta \tag{4}$$

成立，则方程(1)存在唯一的全局解 $x(t)(t \ge -\tau)$。

证明 给定初始值(2)。由条件(A1)知方程(1)在 $[-\tau,\tau_e]$ 上有唯一的最大局部解 $x(t)$，其中 τ_e 是爆破时间。若要证 $x(t)$ 是全局的，则只需证 $\tau_e=\infty$ q.s..令 k_0 是一个充分大的整数且使得 $\|x_0\|=\|\varphi\|=\sup_{-\tau\le s\le 0}|\varphi(s)|<k_0$。对任意的整数 $k>k_0$，定义停时 $\tau_k=\inf\{t\in[0,\tau_e):|x(t)|\ge k\}$。规定 $\inf\varnothing=\infty$，这里 $\varnothing$ 是一个空集。由 τ_k 的定义可知 τ_k 是一个单调递增的序列且 $\tau_\infty=\lim_{k\to\infty}\tau_k\le\tau_e$。利用 Itô 公式，对 $\forall t>0$，有

$$
\begin{aligned}
V(x(t),t)=&V(x(0),0)+\int_0^t LV(x(s),x_s,s)\mathrm{d}s+\int_0^t V_x(x(s),s)h(x(s),x_s,s)\mathrm{d}\omega(s)\\
&+\int_0^t V_x(x(s),s)g(x(s),x_s,s)\mathrm{d}\langle\omega\rangle(s)+\frac{1}{2}\int_0^t V_{xx}(x(s),s)h^2(x(s),x_s,s)\mathrm{d}\langle\omega\rangle(s)\\
&-\int_0^t G\left(2g(x(s),x_s,s)V_x(x(s),s)+V_{xx}(x(s),s)h^2(x(s),x_s,s)\right)\mathrm{d}s\\
=&V(x(0),0)+\int_0^t LV(x(s),x_s,s)\mathrm{d}s+G_t
\end{aligned}, \tag{5}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
G_t=&\int_0^t V_x(x(s),s)h(x(s),x_s,s)\mathrm{d}\omega(s)+\int_0^t V_x(x(s),s)g(x(s),x_s,s)\mathrm{d}\langle\omega\rangle(s)\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t V_{xx}(x(s),s)h^2(x(s),x_s,s)\mathrm{d}\langle\omega\rangle(s)\\
&-\int_0^t G\left(2g(x(s),x_s,s)V_x(x(s),s)+V_{xx}(x(s),s)h^2(x(s),x_s,s)\right)\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

是 G-鞅(见文献[8])。对(5)式两边同时取期望得

$$
\hat{E}V(x(t\wedge\tau_k),t\wedge\tau_k)=V(x(0),0)+\hat{E}\int_0^{t\wedge\tau_k} LV(x(s),x_s,s)\mathrm{d}s.
$$

由(4)可得

$$
\begin{aligned}
\hat{E}V(x(t\wedge\tau_k),t\wedge\tau_k)\le&\hat{E}V(x(0),0)+Ct-\alpha_1\hat{E}\int_0^{t\wedge\tau_k}W(x(s),s)\mathrm{d}s\\
&+\alpha_2\hat{E}\int_0^{t\wedge\tau_k}\int_{-\tau}^0\eta(\theta)W(x(s+\theta),s+\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s
\end{aligned}. \tag{6}
$$

注意

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{t\wedge\tau_k}\int_{-\tau}^0\eta(\theta)W(x(s+\theta),s+\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s\\
&=\int_0^{t\wedge\tau_k}\int_{s-\tau}^s\eta(u-s)W(x(u),u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\
&=\int_{-\tau}^{t\wedge\tau_k}\left(\int_{u\vee 0}^{(u+\tau)\wedge(t\wedge\tau_k)}\eta(u-s)\mathrm{d}s\right)W(x(u),u)\mathrm{d}u\\
&\le\int_{-\tau}^{t\wedge\tau_k}\left(\int_u^{u+\tau}\eta(u-s)\mathrm{d}s\right)W(x(u),u)\mathrm{d}u\\
&=\int_{-\tau}^{t\wedge\tau_k}\left(\int_{-\tau}^0\eta(r)\mathrm{d}r\right)W(x(u),u)\mathrm{d}u\\
&=\int_{-\tau}^{t\wedge\tau_k}W(x(s),s)\mathrm{d}s
\end{aligned}. \tag{7}
$$

将(7)式代入(6)式可得

$$
\begin{aligned}
\hat{E}V(x(t\wedge\tau_k),t\wedge\tau_k)\le&\hat{E}V(x(0),0)+Ct-\alpha_1\hat{E}\int_0^{t\wedge\tau_k}W(x(s),s)\mathrm{d}s\\
&+\alpha_2\hat{E}\int_{-\tau}^0 W(x(s),s)\mathrm{d}s+\alpha_2 E\int_0^{t\wedge\tau_k}W(x(s),s)\mathrm{d}s
\end{aligned}.
$$

因 $\alpha_1 \ge \alpha_2$，所以

$$\hat{E}V\left(x\left(t\wedge\tau_k\right),t\wedge\tau_k\right) \le \hat{E}V\left(x(0),0\right)+Ct+\alpha_2\hat{E}\int_{-\tau}^{0}W\left(x(s),s\right)\mathrm{d}s .$$

令 $V_k = \liminf_{|x|\ge k,0\le t<\infty} V(x,t)$ （$\forall k \ge k_0$）。从而可得对 $\forall P\in\mathcal{P}$，有

$$\begin{aligned}P\left(\tau_k \le t\right)V_k &\le \hat{E}\left(I_{\{\tau_k\le t\}}V\left(x\left(\tau_k\right),\tau_k\right)\right)\\ &\le \hat{E}V\left(x(0),0\right)+Ct+\alpha_2\hat{E}\int_{-\tau}^{0}W\left(x(s),s\right)\mathrm{d}s\end{aligned}.$$

当 $k\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}P\left(\tau_\infty \le t\right) &= \lim_{k\to\infty}P\left(\tau_k\le t\right)\\ &\le \lim_{k\to\infty}\frac{\hat{E}V\left(x(0),0\right)+Ct+\alpha_2\hat{E}\int_{-\tau}^{0}W\left(x(s),s\right)\mathrm{d}s}{V_k}.\\ &=0\end{aligned}$$

即 $P\left(\tau_\infty > t\right)=1$。由 t 的任意性知 $P\left(\tau_\infty=\infty\right)=1$ a.s.进一步可得

$$\hat{C}\left(\tau_\infty=\infty\right)=\sup_{P\in\mathcal{P}}P\left(\tau_\infty=\infty\right)=1.$$

也就是

$$\tau_\infty=\infty \quad \text{q.s.}$$

证毕。

4. 例子

令 $\tau=1$ 和 $\eta(\theta)=1,\theta\in[-1,0]$。考虑如下形式的 G-Brown 运动驱动的随机泛函微分方程：

$$\mathrm{d}x(t)=\left(-3x(t)+\int_{-1}^{0}\left|x(t+\theta)\right|\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}t+x(t)\mathrm{d}\langle\omega\rangle(t)+\sin\left(x(t)\right)\mathrm{d}\omega(t) \tag{8}$$

$\forall t\ge 0$，这里 $\omega(t)$ 是 1-维的 G-Brown 运动且 $\omega(1)\sim N\left(0,\left[\frac{1}{2},1\right]\right)$。易验证方程(8)满足条件(A1)。取 $V(x,t)=x^2$。由

$$LV(x,y,t)=V_t(x,t)+V_x(x,t)f(x,y,t)+G\left(2g(x,y,t)V_x(x,t)+V_{xx}(x,t)h^2(x,y,t)\right),$$

可得

$$\begin{aligned}LV\left(x(t),x_t,t\right)&=2x(t)\left(-3x(t)+\int_{-1}^{0}\left|x(t+\theta)\right|\mathrm{d}\theta\right)+G\left(4x^2(t)+2\sin^2\left(x(t)\right)\right)\\ &\le -2x^2(t)+\int_{-1}^{0}\left|x(t+\theta)\right|^2\mathrm{d}\theta\end{aligned}.$$

由此可知 $C=0$，$\alpha_1=2$，$\alpha_2=1$。从而由第 3 节中的定理可知，当给定初始条件后方程(8)存在唯一的全局解 $x(t)(t\ge -1)$。

基金项目

国家自然科学基金项目(No.11901398)。

参考文献

[1] Mao, X. (1997) Stochastic Differential Equations and Application. Horwood Publishing, Chichester.

[2] Arnold, L. (2007) Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. World Scientific, Singapore.

[3] Mohammed, S.E.A. (1984) Stochastic Functional Differential Equations. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA.

[4] Mao, X. (1996) Razumikhin-Type Theorems on Exponential Stability of Stochastic Functional Differential Equations. *Stochastic Processes and their Applications*, **65**, 233-250. https://doi.org/10.1016/S0304-4149(96)00109-3

[5] Hussein, A.K. (2020) Well-Posedness and Exponential Estimates for the Solutions to Neutral Stochastic Functional Differential Equations with Infinite Delay. *Journal of Systems Science and Information*, **8**, 50-62. https://doi.org/10.21078/JSSI-2020-434-13

[6] Shen, G., Xu, W. and Zhu, D. (2020) The Stability with General Decay Rate of Neutral Stochastic Functional Hybrid Differential Equations with Lévy Noise. *Systems & Control Letters*, **143**, 104742. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2020.104742

[7] Peng, S. (2007) *G*-Expectation, *G*-Brownian Motion and Related Stochastic Calculus of Itô Type. In: Benth, F.E., Di Nunno, G., Lindstrøm, T., Øksendal, B. and Zhang, T., Eds., *Stochastic Analysis and Applications*. *Abel Symposia*, Vol. 2. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-70847-6_25

[8] Peng, S. (2010) Nonlinear Expectations and Stochastic Calculus under Uncertainty. ArXiv:1002.4546.

[9] Faizullah, F., Farkhanda, F. and Hussain, F. (2016) A Note on the Existence Results for Stochastic Functional Differential Equations Driven by G-Brownian Motion. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, **13**, 8249-8253. https://doi.org/10.1166/jctn.2016.5965

[10] Faizullah, F. (2017) Existence and Uniqueness of Solutions to SFDEs Driven by G-Brownian Motion with Non-Lipschitz Conditions. *Journal of Computational Analysis and Applications*, **23**, 344-354.

[11] Chen, Z. and Yang, D. (2020) Nonlocal Stochastic Functional Differential Equations Driven by G-Brownian Motion and Mean Random Dynamical Systems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **43**, 7424-7441. https://doi.org/10.1002/mma.6480

[12] Fei, C., Fei, W.Y. and Yan, L.T. (2019) Existence and Stability of Solutions to Highly Nonlinear Stochastic Differential Delay Equations Driven by G-Brownian Motion. *Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities*, **34**, 184-204. https://doi.org/10.1007/s11766-019-3619-x