

在事件触发协议下线性多智能体系统的集员领导跟随一致性

孙 雷, 王靖雯, 陶家亮

上海理工大学, 理学院, 上海

收稿日期: 2021年10月26日; 录用日期: 2021年11月16日; 发布日期: 2021年11月30日

摘 要

本文研究了事件触发协议下线性多智能体系统的集员领导跟随一致性问题。首先, 用图论来描述多智能体之间的关系。其次, 引入了事件触发协议, 以减少多智能体之间不必要的信息传输。第三, 提出了线性多智能体系统的集员领导跟随一致性的新概念, 以揭示追随者和领导者之间的一致性误差。在集员的框架下, 提出了一种新的集员估计和集员一致的设计结构, 以实现期望的领导者跟随一致性。跟随者和领导者的状态通过集员估计椭圆得到。观测器和控制的增益, 以及椭圆参数可由递归凸优化算法得到。最后, 通过一个数值模拟实例来证明所提方法的可用性。

关键词

多智能体系统, 集员滤波方法, 事件触发协议, 领导跟随一致性

Set-Membership Leader-Following Consensus of Linear Multiagent Systems under Event-Triggered Protocols

Lei Sun, Jingwen Wang, Jialiing Tao

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Oct. 26th, 2021; accepted: Nov. 16th, 2021; published: Nov. 30th, 2021

Abstract

This paper investigated the problem of set-membership leader-following consensus for linear multiagent systems (MASs) under event-triggered protocols. First, the relationship among agents

is described by the graph theory. Second, the event-triggered protocol is introduced to reduce unnecessary information transmission among agents. Third, a new ideal of set-membership leader-following consensus for linear MASs is rendered to reveal the consensus errors between followers and leaders. Based on the structure of set-membership, a new co-design structure of set-membership estimation and set-membership consensus is proposed to carry out the desired leader-following consensus. The states of follower and leader are got by set-membership estimate ellipsoid. The gains of observer and control as well as the ellipsoid parameters are acquired via a recursive convex optimization algorithm. Finally, a numerical simulation example is introduced to demonstrate the availability of the developed method.

Keywords

Multiagent Systems, Set-Membership Approach, Event-Triggered Protocols, Leader-Following Consensus

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在过去的几十年里，由于多智能体系统的一致性在工程领域的广泛应用而备受关注，例如传感器网络、无人机和编队控制[1] [2]。此外，对于多智能体系统的理论研究目前也取得了一定的进展，但值得注意的是目前很多关于多智能体系统的一致性研究，都是在系统的噪声和状态完全可知的假设下[3] [4] [5] [6]。然而在现实生活中，很难捕捉到正确的噪声特征，当然也有少量的文献考虑到了这一问题，如[7] [8] [9]，但这还远远不够。

对于所谓的多智能体系统一致性控制，其一般包括共识控制、编队控制、优化、分布式任务分配、估计和智能协调，在这些问题中，一致性问题是最具有代表性的。它的目标是通过设计合适的分布式控制协议，使所有智能体的状态或输出最终同步。在多智能体系统中往往存在大量的多智能体，为了达到一致性的要求，它们之间需要大量信息交流，而这种交流是需要通过公共网络完成的，由于公共网络中噪声的存在，智能体所接收的数据也通常会存在一些误差，这就会对系统的分析存在一定影响。尽管关于一致性的文献越来越多，但只有少量文献认为噪声是影响系统性能的一个因素。当然，对于非线性的多智能体系统也有类似的研究。这些结果虽然考虑了噪声的影响，但还远远不够。基于这些讨论，自然产生一个问题：若噪声完全陌生，如何处理多智能体系统的一致性，以确保系统达到理想的领导跟随一致性？为了解决这个问题，可考虑将噪声放在一个有界椭球中。此外，由于领导跟随的框架下，跟随者的状态在一定时间后会包含在领导者状态形成的一个安全区域，这个安全区域可作为一个椭圆。综上所述，我们可考虑利用集员滤波的方法来处理领导跟随的一致性。

此外，现有的关于多智能体系统中事件触发的研究大多只关注领导者和直接追随者之间的信息调度，而很少关注与领导者不直接相关的追随者。故在本文中，我们考虑将多智能体分为三类：1) 领导者；2) 直接跟随者，可以直接获取领导者的信息；3) 不能直接获得领导者信息的间接追随者。事件触发机制旨在减少领导者与直接追随者、直接追随者与间接追随者之间不必要的信息交流。本文的研究目标是在事件触发下的线性多智能体系统的集员领导跟随一致性。本文的主要挑战总结如下：1) 对于线性多智能体系统，如何使用局部信息而不是整体信息设计分布式一致性控制协议？2) 估计椭球和共识椭球之间是否存在

在联系? 如果有, 是什么联系? 3) 如何设计事件触发协议, 以确保减少所有智能体之间不必要的数据传输? 4) 如何获得观测器和控制增益以及椭球参数? 本文的主要贡献包括: 1) 为在事件触发协议调度下线性多智能体系统引入了集员领导一致性的概念; 2) 与现有文献相比, 所设计的事件触发协议减少对所有智能体之间不必要的信息传输; 3) 通过递归凸优化算法, 可获得观测器、控制器的增益, 以及椭球和事件触发的协议的参数。

2. 问题描述

本文我们考虑一类由一个领导者和 N 个跟随者组成的多智能体系统, 其中第 i 个跟随者的方程为:

$$x_{i,k+1} = A_k x_{i,k} + B_k u_{i,k} + D_k \omega_{i,k} \quad (1)$$

输出为

$$y_{i,k} = C_k x_{i,k} + E_k \mu_{i,k} \quad (2)$$

其中 $x_{i,k} \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u_{i,k} \in \mathbb{R}^{n_u}$, $y_{i,k} \in \mathbb{R}^{n_y}$ 分别是第 i 个跟随者的状态、控制输入、测量输出。 A_k , B_k , C_k , D_k 和 E_k 都是时变的矩阵。 $\omega_{i,k}$ 和 $\nu_{i,k}$ 分别为系统噪声和测量噪声, 满足下列条件

$$\begin{cases} \bar{\omega}_i = (\omega_{i,k})^T (W_i)^{-1} \omega_{i,k} \\ \bar{\nu}_i = (\nu_{i,k})^T (V_i)^{-1} \nu_{i,k} \end{cases} \quad (3)$$

其中 $W_i = (W_i)^T > 0$, $V_i = (V_i)^T > 0$ 都为已知的矩阵。

领导者的方程为

$$s_{k+1} = A_{1,k} s_k + D_{1,k} \omega_{s,k} \quad (4)$$

测量输出为

$$y_{s,k} = C_{1,k} s_k \quad (5)$$

其中 $s_k \in \mathbb{R}^{n_s}$ 是领导者的状态。 $A_{1,k}$, $C_{1,k}$, $D_{1,k}$ 都是时变的矩阵。 $\omega_{s,k}$ 为系统噪声, 满足 $\bar{\omega}_s = (\omega_{s,k})^T (W_s)^{-1} \omega_{s,k}$, 其中 $W_s = (W_s)^T > 0$ 为已知的矩阵。

定义 1: 如果多智能体系统(1)和(4)满足领导跟随的一致性, 则下式成立

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{i,k} - s_k\| = 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

在现实生活中, 传感器的性能在各个方面都受到很大的影响。因此, 通过传感器获取代理的完整动态信息是不现实的, 一般只能得到部分信息。受此启发, 可为跟随者 i 和领导者 s 分别设计一个状态观测器:

$$\hat{x}_{i,k+1} = A_k \hat{x}_{i,k} + D_k \omega_{i,k} + G_k (y_{i,k} - C_k \hat{x}_{i,k}) \quad (7)$$

$$\hat{s}_{k+1} = A_{1,k} \hat{s}_k + D_{1,k} \omega_{s,k} + \hat{G}_k (y_{s,k} - C_{1,k} \hat{s}_k) \quad (8)$$

其中 $\hat{x}_{i,k}$ 和 \hat{s}_k 分别是跟随者 i 和领导者 s 的估计状态。 G_k 和 \hat{G}_k 是我们所需要设计的状态观测增益矩阵。

为了更好地研究问题, 在本文中我们将多智能体系统分为三类: 1) 领导者; 2) 能直接从领导者处获得信息的直接跟随者; 3) 不能从领导者处获得信息的间接跟随者。此外, 为了减少智能体之间不必要的信息传输, 本文设计了三类的事件触发协议: 1) 对于领导者 s , 若信息满足此协议的触发条件, 则所有

直接跟随者都能收到领导者 s 的信息; 2) 对于领导者与直接跟随者 i , 若信息满足此协议的触发条件, 则跟随者 i 能收到领导者的信息; 3) 对于直接跟随者 i 与间接跟随者 j , 若信息满足此协议的触发条件, 则间接跟随者 j 能收到相应的直接跟随者 i 的信息。假设这三类事件触发协议的触发时间分别为 t_k^s , t_k^{is} , t_k^{ij} , 递归的方式如下所示:

$$t_{k+1}^s = \min \{k \mid k > t, k \in N, f_s(k) \geq 0\} \tag{9}$$

$$t_{k+1}^{is} = \min \{k \mid k > t, k \in N, f_{is}(k) \geq 0\} \tag{10}$$

$$t_{k+1}^{ij} = \min \{k \mid k > t, k \in N, f_{ij}(k) \geq 0\} \tag{11}$$

其中

$$f_s(k) = (h_s(k))^T \Psi_s h_s(k) - \delta_s, \quad h_s(k) = s_k - \hat{s}_k$$

$$f_{is}(k) = (h_{is}(k))^T \Psi_{is} h_{is}(k) - \delta_{is}, \quad h_{is}(k) = x_{i,k} - \hat{x}_{i,k}$$

$$f_{ij}(k) = (h_{ij}(k))^T \Psi_{ij} h_{ij}(k) - \delta_{ij}, \quad h_{ij}(k) = x_{j,k} - \hat{x}_{j,k}$$

δ_s , δ_{is} 和 δ_{ij} 都是已知的正整数, $i, j = 1, 2, \dots, \mathbb{N}$ 。 $\Psi_s = \Psi_s^T \geq 0$, $\Psi_{is} = \Psi_{is}^T \geq 0$ 和 $\Psi_{ij} = \Psi_{ij}^T \geq 0$ 都是未知的权重矩阵。

经过上述讨论, 跟随者 i 的控制输入可为

$$u_{i,k} = K_k \sum_{j \in \mathbb{N}_i} a_{ij} (\hat{x}_{i,k} - \hat{x}_{j,k}) + K_k a_{is} (\hat{x}_{i,k} - \hat{s}_k) \tag{12}$$

其中 $K_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ 是未知的控制器增益。

在不完全知道智能体的状态信息和基于观测器的共识协议(12)下, 我们提出了集员状态估计。

定义 2: 对于(1)所描述的多智能体系统, 如果所有跟随者的状态 $x_{i,k}, i \in \mathcal{A}$ 属于状态椭球 $\mathcal{M}_{i,k+1}$,

$$\mathcal{M}_{i,k+1} = \left\{ (x_{i,k+1} - \hat{x}_{i,k+1})^T \mathcal{U}_{i,k+1}^{-1} (x_{i,k+1} - \hat{x}_{i,k+1}) \leq 1 \right\} \tag{13}$$

对于所有的 $i \in \mathcal{A}$, 有界系统噪声 $\omega_{i,k} \in \mathbb{R}^o$ 和 $v_{i,k} \in \mathbb{R}^v$ 。 $\mathcal{U}_{i,k+1} = \mathcal{U}_{i,k+1}^T > 0$ 为时变矩阵, 这样的椭球我们就称为跟随者 i 的集员估计椭球。

同样地, 对于领导者 s , 我们也有类似的定义。

定义 3: 对于(4)所描述的多智能体系统, 如果所有领导者的状态 s_k 属于状态椭球 \mathcal{H}_{k+1} ,

$$\mathcal{H}_{k+1} = \left\{ (s_{k+1} - \hat{s}_{k+1})^T \mathcal{P}_{k+1}^{-1} (s_{k+1} - \hat{s}_{k+1}) \leq 1 \right\} \tag{14}$$

对于有界系统噪声 $\omega_{s,k} \in \mathbb{R}^o$ 。 $\mathcal{P}_{k+1} = \mathcal{P}_{k+1}^T > 0$ 为时变矩阵, 这样的椭球我们就称为领导者 s 的集员估计椭球。

接下来, 我们为线性多智能体系统提出了一个新的集员领导跟随一致性概念。跟随者的真实状态总是包含在领导者状态的一个置信区域中。

定义 4: 如果存在增益矩阵 G_k , \hat{G}_k 和 K_k , 使得跟随者的状态 $x_{i,k+1}, i \in \mathcal{A}$ 始终包含在一个领导状态椭球 $\mathcal{S}_{i,k+1}$,

$$\mathcal{S}_{i,k+1} = \left\{ (x_{i,k+1} - s_{k+1})^T \mathcal{R}_{i,k+1}^{-1} (x_{i,k+1} - s_{k+1}) \leq 1 \right\} \tag{15}$$

对于所有的 $i \in \mathcal{A}$, 有界系统噪声 $\omega_{i,k} \in \mathbb{R}^\omega$ 和 $v_{i,k} \in \mathbb{R}^v$ 。 $\mathcal{R}_{i,k+1} = \mathcal{R}_{i,k+1}^T > 0$ 为时变矩阵, 这样我们就认为(1)和(4)所描述的多智能体系统实现了领导跟随一致。

跟随者 i 和领导者 s 的初始状态满足下列条件:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i,0} &= \left\{ (x_{i,0} - \hat{x}_{i,0})^T \mathcal{U}_{i,0}^{-1} (x_{i,0} - \hat{x}_{i,0}) \leq 1 \right\} \\ \mathcal{H}_0 &= \left\{ (s_0 - \hat{s}_0)^T \mathcal{P}_0^{-1} (s_0 - \hat{s}_0) \leq 1 \right\} \\ \mathcal{S}_{i,0} &= \left\{ (x_{i,0} - s_0)^T \mathcal{R}_{i,0}^{-1} (x_{i,0} - s_0) \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{U}_{i,0} = \mathcal{U}_{i,0}^T > 0$, $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0^T > 0$, $\mathcal{R}_{i,0} = \mathcal{R}_{i,0}^T > 0$ 都是已知的矩阵。

本文的目标是找到矩阵 $\mathcal{U}_{i,k+1}$, \mathcal{P}_{k+1} , $\mathcal{R}_{i,k+1}$ 。

3. 最终结果

在本节中, 研究了事件触发机制下线性多智能体系统的集员领导一致性问题。

定理 1: 对于存在未知但有界噪声 $\omega_{i,k} \in \mathbb{R}^\omega$, $v_{i,k} \in \mathbb{R}^v$, $\omega_{s,k} \in \mathbb{R}^\omega$ 的(1)和(4)所描述的多智能体系统, 假设在 k 时刻, 跟随者 i 的状态 $x_{i,k}$, 领导者 s 的状态 s_k 始终分别属于 $(x_{i,k} - \hat{x}_{i,k})^T \mathcal{U}_{i,k}^{-1} (x_{i,k} - \hat{x}_{i,k}) \leq 1$, $(s_k - \hat{s}_k)^T \mathcal{P}_k^{-1} (s_k - \hat{s}_k) \leq 1$ 。接下来, 在 $k+1$ 时刻, 跟随者 i 的状态 $x_{i,k+1}$, 领导者 s 的状态 s_{k+1} 分别属于状态估计椭圆 $\mathcal{M}_{i,k+1}$ 和 \mathcal{H}_{k+1} , 如果存在矩阵 $\mathcal{U}_{i,k+1}$, \mathcal{P}_{k+1} , G_k , \hat{G}_k , 以及常数 $\tau_t > 0, t=1,2,\dots,5$, 使得下列矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{U}_{i,k+1} & 0 & \Theta_1 & D_k & -G_k E_k \\ * & \Lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Lambda_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Lambda_3 & 0 \\ * & * & * & * & \Lambda_4 \end{bmatrix} \leq 0 \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{k+1} & 0 & \Theta_2 & D_{1,k} \\ * & \Lambda_5 & 0 & 0 \\ * & * & \Lambda_6 & 0 \\ * & * & * & \Lambda_7 \end{bmatrix} \leq 0 \tag{17}$$

其中

$$\Theta_1 = A_k \mathcal{L}_{i,k} - G_k C_k \mathcal{L}_{i,k}, \quad \Lambda_1 = -1 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$$

$$\Lambda_2 = -\tau_3 I, \quad \Lambda_3 = -\tau_1 W_i^{-1}, \quad \Lambda_4 = -\tau_2 V_i^{-1}$$

$$\Theta_2 = A_{1,k} L_k - \hat{G}_k C_{1,k} L_k, \quad \Lambda_5 = -1 + \tau_4 + \tau_5$$

$$\Lambda_6 = -\tau_5 I, \quad \Lambda_7 = -\tau_4 W_s^{-1}$$

证明: 在 k 时刻, 我们有 $(x_{i,k} - \hat{x}_{i,k})^T \mathcal{U}_{i,k}^{-1} (x_{i,k} - \hat{x}_{i,k}) \leq 1$, 根据 Cholesky 分解, 存在向量 $\alpha_{i,k}$ 满足

$$(\alpha_{i,k})^T (\alpha_{i,k}) = (x_{i,k} - \hat{x}_{i,k})^T \mathcal{U}_{i,k}^{-1} (x_{i,k} - \hat{x}_{i,k}) \leq 1 \tag{18}$$

其中 $x_{i,k} = \hat{x}_{i,k} + \mathcal{L}_{i,k} \alpha_{i,k}$, $\mathcal{U}_{i,k} = \mathcal{L}_{i,k} \mathcal{L}_{i,k}^T$ 。

因此我们可得到跟随者 i 在 $k+1$ 时刻的状态估计误差

$$x_{i,k} - \hat{x}_{i,k} = \Xi_1 \Pi_1 \tag{19}$$

其中 $\Xi_1 = [0 \ \Theta_1 D_k G_k E_k]$, $\Pi_1^T = [1 \ \alpha_{i,k} \omega_{i,k} \nu_{i,k}]$ 。因此(13)可等价

$$\Pi_1^T (-diag \{1, 0, 0, 0\} + \Xi_1^T \mathcal{U}_{i,k+1}^{-1} \Xi_1) \Pi_1 \leq 0 \tag{20}$$

由(3)和(18), 且若 $\Phi_1 = diag \{1, 0, -W_i^{-1}, 0\}$, $\Phi_2 = diag \{1, 0, 0, -V_i^{-1}\}$, $\Phi_3 = diag \{1, -I, 0, 0\}$, 则

$$\begin{cases} \Pi_1^T \Phi_1 \Pi_1 \geq 0 \\ \Pi_1^T \Phi_2 \Pi_1 \geq 0 \\ \Pi_1^T \Phi_3 \Pi_1 \geq 0 \end{cases} \tag{21}$$

利用 S 过程, 我们有

$$-diag \{1, 0, 0, 0\} + \Xi_1^T \mathcal{U}_{i,k+1}^{-1} \Xi_1 + \tau_1 \Phi_1 + \tau_2 \Phi_2 + \tau_3 \Phi_3 \leq 0 \tag{22}$$

最后利用 Schur 引理, 我们有(16)成立。由于(17)的证明类似, 就不再展开。

定理 1 实现了集员估计, 换句话说, 跟随者 i 和领导者 s 的下一步状态的估计误差总是包含在一个有界椭圆中。在此基础上, 我们有以下定理。

定理 2: 对于存在未知但有界噪音 $\omega_{i,k} \in \mathbb{R}^\omega$, $\nu_{i,k} \in \mathbb{R}^\nu$, $\omega_{s,k} \in \mathbb{R}^\omega$ 的(1)和(4)所描述的多智能体系统, 假设在 k 时刻, 跟随者 i 的状态 $x_{i,k}$ 和领导者 s 的状态 s_k 的状态误差始终属于状态一致椭圆 $(x_{i,k} - s_k)^T \mathcal{R}_{i,k}^{-1} (x_{i,k} - s_k) \leq 1$ 。如果存在矩阵 $\mathcal{R}_{i,k+1}$, Ψ_s , Ψ_{is} , Ψ_{ij} , K_k , 以及常数 $\tau_t > 0, t = 6, 7, \dots, 10$, 使得下列矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{R}_{k+1} & \Theta_{11} & A_k Q_k & D_k & -D_{1,k} & 0 & 0 \\ * & \tilde{\Theta}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \tilde{\Theta}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \tilde{\Theta}_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \tilde{\Theta}_4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \tilde{\Theta}_5 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \tilde{\Theta}_6 \end{bmatrix} \leq 0 \tag{23}$$

于是跟随者 i 的状态 $x_{i,k}$ 永远包含在一致性椭圆 \mathcal{S}_{k+1} , 其中

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= A_k s_k - A_{1,k} \hat{s}_k + B_k K_k \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\hat{x}_{i,k} - \hat{x}_{j,k}) \right) + B_k K_k a_{is} (\hat{x}_{i,k} - \hat{s}_k) \\ \tilde{\Theta}_1 &= -1 + \tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9 + \tau_{10} + \delta_s + \delta_{is} + \delta_{ij} \\ \tilde{\Theta}_5 &= -\tau_8 I - \mathcal{L}_{i,k}^T \Psi_{is} \mathcal{L}_{i,k} - \mathcal{L}_{i,k}^T \Psi_{ij} \mathcal{L}_{i,k}, \quad \tilde{\Theta}_3 = -\tau_6 W_i^{-1} \\ \tilde{\Theta}_2 &= -\tau_{10} I, \quad \tilde{\Theta}_4 = -\tau_7 W_s^{-1}, \quad \tilde{\Theta}_6 = -\tau_9 I - L_k^T \Psi_s L_k \end{aligned}$$

证明: 在 k 时刻, 有 $(x_{i,k} - s_k)^T \mathcal{R}_{i,k}^{-1} (x_{i,k} - s_k) \leq 1$, 根据 Cholesky 分解, 我们有 $\mathcal{R}_{i,k} = Q_{i,k} Q_{i,k}^T$ 。定义 $\gamma_{i,k} = -Q_{i,k}^{-1} (x_{i,k} - s_k)$, 因此

$$\gamma_{i,k}^T \gamma_{i,k} = (x_{i,k} - s_k)^T \mathcal{R}_{i,k}^{-1} (x_{i,k} - s_k) \leq 1 \tag{24}$$

故我们可知在在 $k+1$ 时刻的状态跟踪误差

$$x_{i,k} - s_k = \Xi_3 \Pi_3 \tag{25}$$

其中 $\Xi_3 = [\Theta_{11} A_k Q_k D_k - D_{1,k} \ 0 \ 0]$, $\Pi_3^T = [1 \ \gamma_{i,k} \ \omega_{i,k} \ \omega_{s,k} \ \alpha_{i,k} \ \beta_k]$ 。故(13)可等价于

$$\Pi_3^T (-diag \{1, 0, 0, 0, 0\} + \Xi_3^T \mathcal{R}_{k+1}^{-1} \Xi_3) \Pi_3 \leq 0 \tag{26}$$

定义 $\Phi_6 = diag \{1, 0, -W_i^{-1}, 0, 0, 0\}$, $\Phi_7 = diag \{1, 0, -W_s^{-1}, 0, 0, 0\}$, $\Phi_8 = diag \{1, 0, 0, 0, -I, 0\}$, $\Phi_9 = diag \{1, 0, 0, 0, 0, -I\}$, $\Phi_{10} = diag \{1, -I, 0, 0, 0, 0\}$, 则下列不等式是成立的

$$\begin{aligned} \Pi_3^T \Phi_6 \Pi_3 &\geq 0 \\ \Pi_3^T \Phi_7 \Pi_3 &\geq 0 \\ \Pi_3^T \Phi_8 \Pi_3 &\geq 0 \\ \Pi_3^T \Phi_9 \Pi_3 &\geq 0 \\ \Pi_3^T \Phi_{10} \Pi_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{27}$$

另一方面, 如果事件触发协议满足 $f_s(k) < 0$, $f_{is}(k) < 0$, $f_{ij}(k) < 0$, 则信息不会传输, 因此我们有

$$\begin{cases} (h_s(k))^T \Psi_s h_s(k) < \delta_s \\ (h_{is}(k))^T \Psi_{is} h_{is}(k) < \delta_{is} \\ (h_{ij}(k))^T \Psi_{ij} h_{ij}(k) < \delta_{ij} \end{cases}$$

若假设 $\Omega_i = [\Omega_i^{pq}]_{6 \times 6}$, $i=1,2,3$ 是对称矩阵, 其中 $\Omega_1^{11} = \delta_s$, $\Omega_1^{66} = -L_k^T \Psi_s L_k$, $\Omega_2^{11} = \delta_{is}$, $\Omega_2^{55} = -\mathcal{L}_k^T \Psi_{is} \mathcal{L}_k$, $\Omega_3^{11} = \delta_{ij}$, $\Omega_3^{55} = -\mathcal{L}_k^T \Psi_{ij} \mathcal{L}_k$, 其余部分都是 0 矩阵, 因此上式可等价于

$$\begin{cases} \Pi_3^T \Omega_1 \Pi_3 \geq 0 \\ \Pi_3^T \Omega_2 \Pi_3 \geq 0 \\ \Pi_3^T \Omega_3 \Pi_3 \geq 0 \end{cases} \tag{28}$$

利用 S 过程, 我们有

$$-diag \{1, 0, 0, 0, 0, 0\} + \Xi_3^T \mathcal{R}_{i,k+1}^{-1} \Xi_3 + \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \tau_6 \Phi_6 + \tau_7 \Phi_7 + \tau_8 \Phi_8 + \tau_9 \Phi_9 + \tau_{10} \Phi_{10} \leq 0 \tag{29}$$

最后由 Schur 引理, (23)成立。

值得注意的是, 定理 1 和 2 给出了确定椭球的规则, 包括跟随者 i 和领导者 s 的真实状态, 以及集员一致性的控制, 但没有给出最优椭球。因此, 通过凸优化方法, 将所提出的事件触发机制下线性多智能体系统的集员领导一致性问题转化为寻优问题, 从而求解最优椭球

$$\min_{\mathcal{U}_{i,k+1}, \mathcal{P}_{k+1}, \mathcal{R}_{i,k+1}} T_r(\Gamma_{k+1}) \tag{30}$$

其中 $\Gamma_{k+1} = diag \{U_{i,k+1}, \mathcal{P}_{k+1}, \mathcal{R}_{i,k+1}\}$ 。

本文所设计的凸优化算法如表 1 所示

Table 1. Recursive convex optimization
表 1. 递归的凸优化算法

算法 1: 递归的凸优化算法

- 1) 初始条件: $\{x_{i,0}, s_0, \hat{x}_{i,0}, \hat{s}_0, W_i, W_s, V_i, \mathcal{U}_{i,0}, \mathcal{P}_0, \mathcal{R}_{i,0}, T_n\}$;
- 2) 由式(30)获得 $\mathcal{U}_{i,k+1}, \mathcal{P}_{k+1}, \mathcal{R}_{i,k+1}, \Psi_s, \Psi_{is}, \Psi_{ij}, K_k, G_k, \hat{G}_k$;
- 3) 判断 $f_s(k), f_{is}(k), f_{ij}(k)$ 的值是否满足相应的要求, 若满足, 输出相应的值, 否则不输出;
- 4) 由(1)和(4)分别计算 $x_{i,k+1}, s_{k+1}$, 再由(1)和(4)分别计算 $\hat{x}_{i,k+1}, \hat{s}_{k+1}$ 。若 $k = T_n$, 到第 5), 否则令 $k = k + 1$, 返回 4);
- 5) 输出 $\{\mathcal{U}_{i,k+1}, \mathcal{P}_{k+1}, \mathcal{R}_{i,k+1}, \Psi_s, \Psi_{is}, \Psi_{ij}, K_k, G_k, \hat{G}_k\}$ 。

4. 数值仿真实例

在本节中, 我们将介绍一个示例来说明主要结果的有效性。假设系统的参数分别为:

$$A_k = \begin{bmatrix} 0.8493 & 0.0876 \\ -0.6928 & 0.8884 \end{bmatrix}, B_k = \begin{bmatrix} -0.1024 & -0.0308 \\ -1.7143 & -0.3678 \end{bmatrix}$$

$$A_{1,k} = \begin{bmatrix} 0.51 & 0.19 \\ -0.6 & 0.71 \end{bmatrix}, D_k = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix}, D_{1,k} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, E_k = 1$$

$$C_k = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.6 - 0.8 \sin k \end{bmatrix}, C_{1,k} = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.5 - 0.4 \sin k \end{bmatrix}$$

$$\omega_{i,k} = \sin 20k, \omega_{s,k} = \sin 20k, v_{i,k} = \cos 2k$$

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & -0.7 \end{bmatrix}$$

此外, 系统状态的初始值为 $x_{1,0} = [1 \ -1]^T$, $x_{2,0} = [-2 \ 2]^T$, $x_{3,0} = [-1 \ 1]^T$, $x_{4,0} = [-2 \ 1]^T$, W_i, W_s, V_i 都为 4, $s_0 = [2 \ -2]^T$, $\hat{x}_{1,0} = [2 \ -2]^T$, $\hat{x}_{2,0} = [-2 \ 3]^T$, $\hat{x}_{3,0} = [-2 \ 2]^T$, $\hat{x}_{4,0} = [-1 \ 2]^T$, $\hat{s}_0 = [1 \ -1]^T$, $\mathcal{U}_{i,0} = \mathcal{P}_0 = \text{diag}\{50, 50\}$, $\mathcal{R}_{i,0} = \text{diag}\{100, 100\}$, $\delta_s = 0.12 + 0.05 \sin k$, $\delta_{is} = 0.16 + 0.04 \sin k$, $\delta_{3s} = 0.11 + 0.06 \sin k$, $\delta_{21} = 0.13 + 0.01 \sin k$, $\delta_{43} = 0.15 + 0.03 \sin k$ 。图 1 给出了智能体之间的通信交流图。

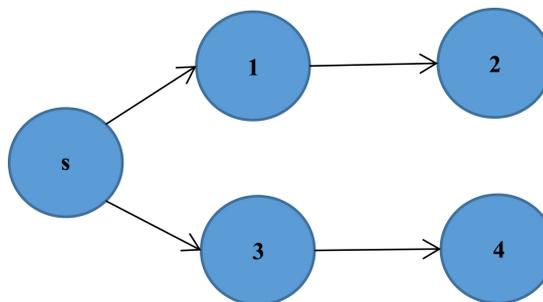


Figure 1. Communication topology
图 1. 通讯交流图

图 2 和图 3 绘制了 5 个智能体的真实状态和通过状态观测器所得的状态, 通过这两图, 可知我们所设计的状态观测器具有良好的性能。图 4 和图 5 画出了跟随者与领导者之间的状态跟踪, 由两图可知, 所设计的控制器满足领导跟随一致性的要求。

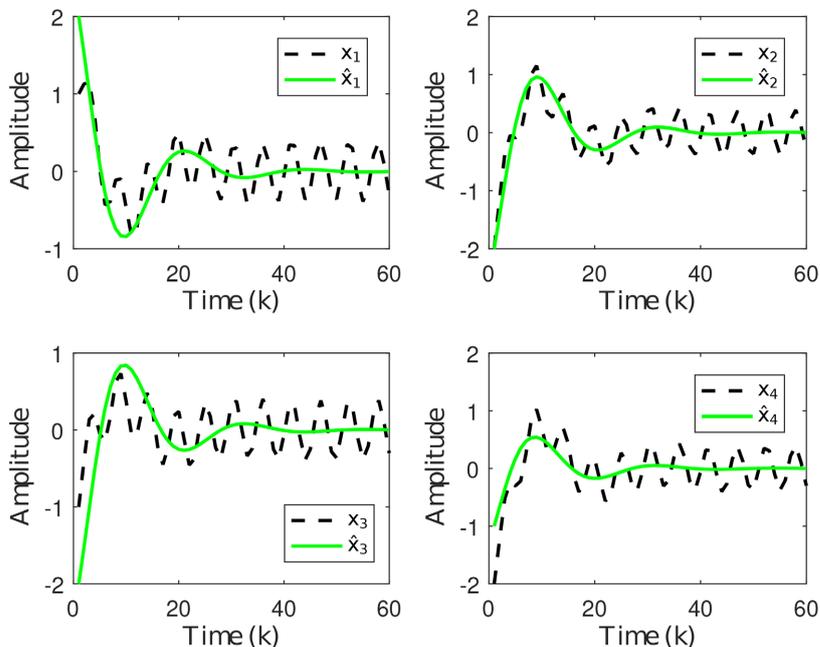


Figure 2. The true states $x_{i,k}$, and the states estimation $\hat{x}_{i,k}$, $i=1,2,3,4$

图 2. 真实状态 $x_{i,k}$ 和估计状态 $\hat{x}_{i,k}$, $i=1,2,3,4$

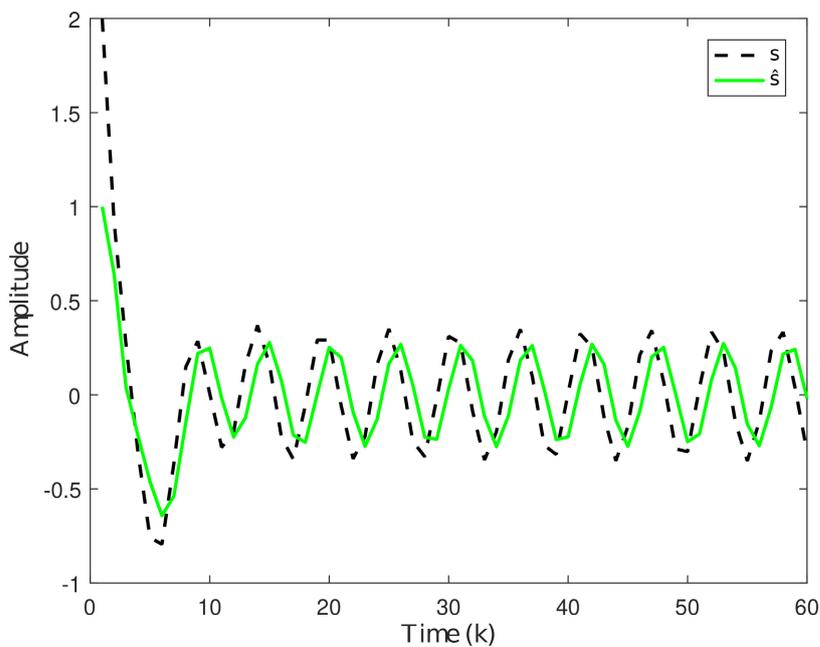


Figure 3. The true states s_k , and the states estimation \hat{s}_k

图 3. 真实状态 s_k 和估计状态 \hat{s}_k

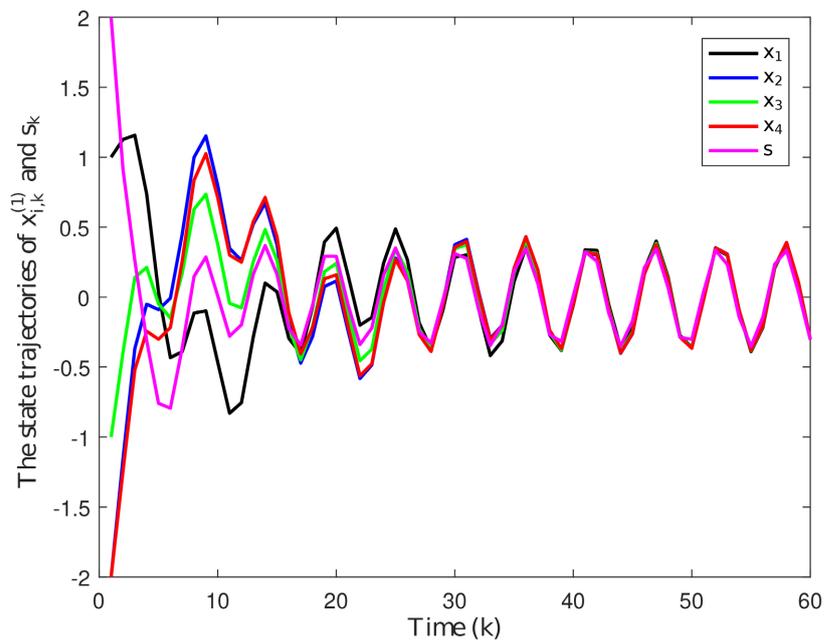


Figure 4. State trajectories of followers $x_{i,k}^{(1)}$ and leader $s_k^{(1)}$

图 4. 跟随者 $x_{i,k}^{(1)}$ 和领导者 $s_k^{(1)}$ 的状态跟踪

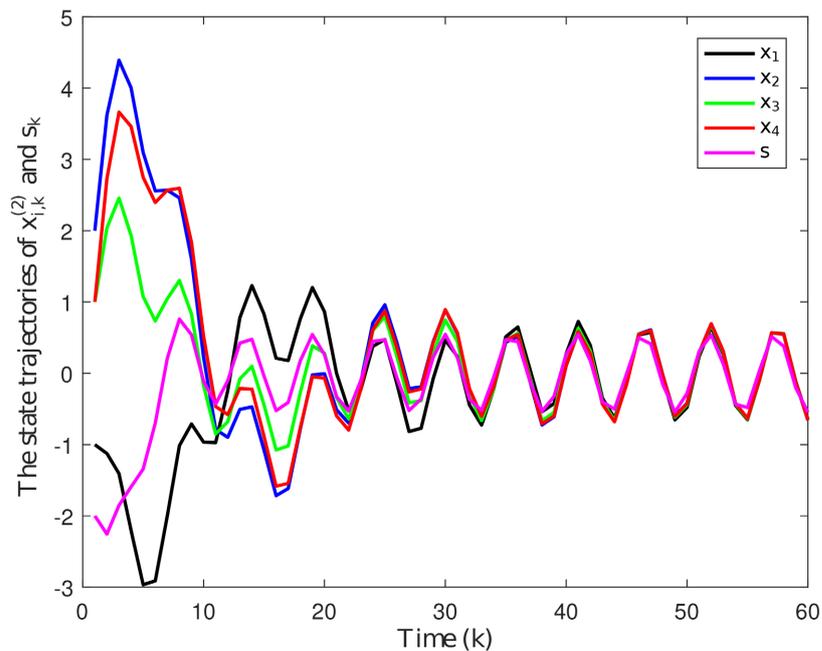


Figure 5. State trajectories of followers $x_{i,k}^{(2)}$ and leader $s_k^{(2)}$

图 5. 跟随者 $x_{i,k}^{(2)}$ 和领导者 $s_k^{(2)}$ 的状态跟踪

5. 总结

本文研究了事件触发协议下线性多智能体系统的集员领导跟随一致性问题。对于多智能体系统，本

文利用事件触发协议减少了智能体间的不必要信息传输。引入一个分布式观测器来观察每个智能体的真实状态，智能体的状态总是在一个有界椭球内。提出了分布式控制器，以达到预期的领导跟随一致性。在集员滤波的框架下，利用递推凸优化算法获得了观测器和控制器的增益以及椭球参数。最后通过一个算例验证了该方法的有效性。此外，在本文研究的基础上，下一步考虑将本文的结论推广到非线性的合作与竞争多智能体系统上。

参考文献

- [1] Bauso, D., Giarre, L. and Pesenti, R. (2009) Consensus for Networks with Unknown But Bounded Disturbances. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **48**, 1756-1770. <https://doi.org/10.1137/060678786>
- [2] Zhang, H., Zhang, J., Yang, G. and Luo, Y. (2015) Leader-Based Optimal Coordination Control for the Consensus Problem of Multi-Agent Differential Games via Fuzzy Adaptive Dynamic Programming. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **23**, 152-163. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2014.2310238>
- [3] Lin, P. and Jia, Y.M. (2010) Consensus of a Class of Second-Order Multi-Agent Systems with Time-Delay and Jointly-Connected Topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **55**, 778-784. <https://doi.org/10.1109/TAC.2010.2040500>
- [4] Hu, J., Wu, Y., Li, T. and Ghosh, B.K. (2019) Consensus Control of General Linear Multi-Agent Systems with Antagonistic Interactions and Communication Noises. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **64**, 2122-2127. <https://doi.org/10.1109/TAC.2018.2872197>
- [5] Ugrinovskii, V. and Fridman, E. (2014) A Round-Robin Type Protocol for Distributed Estimation with H_∞ Consensus. *Systems & Control Letters*, **69**, 103-110. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2014.05.001>
- [6] Seyboth, G., Dimarogonas, D. and Johansson, K. (2013) Event-Based Broadcasting for Multi-Agent Average Consensus. *Automatic*, **49**, 245-252. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.08.042>
- [7] Zheng, S., Zhang, X. and Lu, Q. (2018) Distributed Set-Membership Observer-Based Consensus of Nonlinear Delayed Multi-Agent Systems under Round-Robin Protocols. *Chinese Control and Decision Conference*, Shenyang, 9-11 June 2018, 118-123. <https://doi.org/10.1109/CCDC.2018.8407116>
- [8] Zheng, S., Zhang, X. and Lu, Q. (2018) Set-Membership Event-Based Node-to-Node Consensus of Nonlinear Multi-Agent Systems. *13th World Congress on Intelligent Control and Automation*, Changsha, 4-8 July 2018, 664-669. <https://doi.org/10.1109/CCDC.2018.8407116>
- [9] Garulli, A. and Giannitrapani, A. (2008) A Set-Membership Approach to Consensus Problems with Bounded Measurement Errors. *47th IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, 9-11 December 2008, 2276-2281. <https://doi.org/10.1109/CDC.2008.4739178>