Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(12), 4139-4142
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1012439

算子广义正交问题的研究

孟姗姗，计东海

哈尔滨理工大学理学院，黑龙江 哈尔滨

收稿日期：2021年11月2日；录用日期：2021年11月29日；发布日期：2021年12月6日

摘 要

本文研究考虑了在算子空间中矩阵作为算子的广义正交性，给出矩阵正交与迹之间的关系，并讨论了算子空间为内积空间的等价条件。

关键词

算子空间，**Birkhoff**正交，矩阵

Study on the Generalized Orthogonal Problem of Operators

Shanshan Meng, Donghai Ji

School of Science, Harbin University of Technology, Harbin Heilongjiang

Received: Nov. 2nd, 2021; accepted: Nov. 29th, 2021; published: Dec. 6th, 2021

Abstract

In this paper, the generalized orthogonality of matrix as an operator in operator space is considered, the relationship between matrix orthogonality and trace is given, and the equivalent condition that operator space is inner product space is discussed.

Keywords

Operator Space, Birkhoff Orthogonality, Matrix

文章引用: 孟姗姗, 计东海. 算子广义正交问题的研究[J]. 应用数学进展, 2021, 10(12): 4139-4142.
DOI: 10.12677/aam.2021.1012439

1. 引言

赋范线性空间中各种广义正交性的提出是对内积空间中正交的一种延拓，其与内积空间有着密不可分的关系。作为一种应用较为广泛的正交性，1935 年 Birkhoff 根据“点到直线垂线段最短”的性质提出了一般赋范线性空间 Birkhoff 正交的概念[1]，James 详细研究了 Birkhoff 正交的性质[2]。算子空间作为一类赋范线性空间，因其具有区别于一般赋范线性空间的性质，本文研究了算子空间中矩阵算子的正交性，并给出相应的等价条件。

2. 算子空间算子的广义正交性

定义 1 [1]设 X 是一个赋范线性空间，$x, y \in X$，如果对于任意 $\alpha \in R$ 都有

$$\|x+\alpha y\| \geq \|x\|$$

则称 x Birkhoff 正交于 y。

定义 2 [3]设 H 为 Hilbert 空间，则对于 $A \in \mathscr{B}(H)$，

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1}\left|\langle y, Ax\rangle\right|, \forall x, y \in H$$

定义 3 [4]对矩阵 $x, y \in R^n$，有

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$$

定理 1 设 $X_1 = \left(R^n, \|\cdot\|_\infty\right)$，$X_2 = \left(R^n, \|\cdot\|_1\right)$，对于 $I, A \in \mathscr{B}(X_1, X_2)$，其中 I 为单位矩阵，A 为对角阵，有

$$trA = 0 \Rightarrow I \perp_B A$$

证明：$I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，不妨假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$。

则当 $trA = 0$ 时有

$$\begin{aligned} \|I+\lambda A\| &= \sup_{\|x\|_\infty=1}\left\|(I+\lambda A)x\right\|_1 \\ &= \max_{\|x\|_\infty=1}\left\|\begin{pmatrix} (1+\lambda a_{11})x_1 \\ (1+\lambda a_{22})x_2 \\ \vdots \\ (1+\lambda a_{nn})x_n \end{pmatrix}\right\|_1 \\ &\geq \left|(1+\lambda a_{11})\right| + \left|(1+\lambda a_{22})\right| + \cdots + \left|(1+\lambda a_{nn})\right| \\ &\geq \left|n+\lambda(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\right| \\ &= n \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\|I\| &= \sup_{\|x\|_\infty=1}\|Ix\| \\ &= |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n| \\ &\le n\end{aligned}$$

所以

$$\|I+\lambda A\| \ge \|I\|$$

一般算子空间上算子的 Birkhoff 不具有对称性，例如在$\left(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\infty\right)$空间中，取$x=(1,1)$，$y=(0,1)$则$x\perp_B y$，但$y\not\perp_B x$，如图 1 所示。

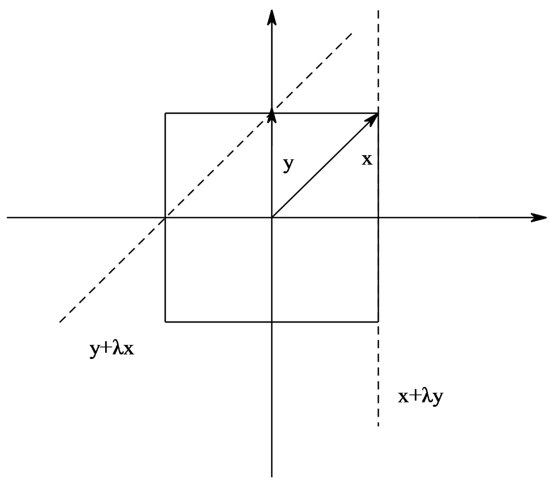

Figure 1. $x\perp_B y$，$y\not\perp_B x$

图 1. $x\perp_B y$，$y\not\perp_B x$

但内积空间上的元素必具有对称性，所以我们探讨了算子空间为内积空间的等价条件。

定理 2 设H_1,H_2为 Hilbert 空间，则$\mathscr{B}(H_1,H_2)$为内积空间。

证明：由[5]知，要证$\mathscr{B}(H_1,H_2)$为内积空间当且仅当其上的范数“$\|\cdot\|$”满足

$$\|T_1+T_2\|^2+\|T_1-T_2\|^2 = 2\left(\|T_1\|^2+\|T_2\|^2\right),\quad \forall T_1,T_2\in\mathscr{B}(X_1,X_2)$$

(1) 证明

$$\|T_1+T_2\|^2+\|T_1-T_2\|^2 \ge 2\left(\|T_1\|^2+\|T_2\|^2\right)$$

设$x\in S(\mathscr{B}(H_1,H_2))$，则

$$\begin{aligned}\|T_1+T_2\|^2+\|T_1-T_2\|^2 &\ge \langle y,T_1x+T_2x\rangle^2+\langle y,T_1x-T_2x\rangle^2 \\ &= \left(\langle y,T_1x\rangle+\langle y,T_2x\rangle\right)^2+\left(\langle y,T_1x\rangle-\langle y,T_2x\rangle\right)^2 \\ &= 2\langle y,T_1x\rangle^2+2\langle y,T_2x\rangle^2 \\ &= 2\left(\|T_1\|^2+\|T_2\|^2\right)\end{aligned}$$

(2) 证明

$$2\left(\|T_1\|^2+\|T_2\|^2\right)\ge\|T_1+T_2\|^2+\|T_1-T_2\|^2$$

设 $x\in S\left(\mathscr{B}\left(H_1,H_2\right)\right)$，则

$$\begin{aligned}2\left(\|T_1\|^2+\|T_2\|^2\right)&=2\left(\|T_1\|^2+\|T_2\|^2\right)\|x\|^2\\&\ge2\|T_1x\|^2+2\|T_2x\|^2\\&=\|T_1x\|^2+\|T_2x\|^2+\|T_1x\|^2-\|T_2x\|^2+2\|T_2x\|^2\\&=\langle T_1x,T_1x\rangle+\langle T_2x,T_2x\rangle+\langle T_1x,T_1x\rangle-\langle T_2x,T_2x\rangle+2\|T_2x\|^2\\&=\langle T_1x+T_2x,T_1x+T_2x\rangle-\langle T_1x,T_2x\rangle-\langle T_2x,T_1x\rangle\\&\quad+\langle T_1x-T_2x,T_1x-T_2x\rangle+\langle T_1x,T_2x\rangle+\langle T_2x,T_1x\rangle+2\|T_2x\|^2\\&=\|(T_1+T_2)x\|^2+\|(T_1-T_2)x\|^2+2\|T_2x\|^2\\&\ge\|(T_1+T_2)x\|^2+\|(T_1-T_2)x\|^2\end{aligned}$$

故

$$2\left(\|T_1\|^2+\|T_2\|^2\right)\ge\sup_{\|x\|=1}\left(\|(T_1+T_2)x\|^2+\|(T_1-T_2)x\|^2\right)=\|T_1+T_2\|^2+\|T_1-T_2\|^2$$

综上，得证。

3. 结论

本文在算子空间中讨论矩阵算子的广义正交性，得到矩阵与迹之间的关系，并说明由 Hilbert 空间形成的算子空间为内积空间，所以其上的算子正交具有对称性，进而可以证得其上的算子各种广义正交之间是等价的。

参考文献

[1] Birkhoff, G. (1935) Orthogonality in Linear Metric Spaces. *Duke Mathematical Journal*, **1**, 169-172. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-35-00115-6

[2] James, R.C. (1945) Orthogonality in Normed Linear Spaces. *Duke Mathematical Journal*, **12**, 291-302. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-45-01223-3

[3] Bhatia, R. (1997) Matrix Analysis. Springer, New York.

[4] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (2013) Matrix Analysis. 2nd Edition, Cambridge University Press, New York.

[5] Zalar, B. (1995) Jordan-Von Neumann Theorem for Saworotnow's Generalized Hilbert Space. *Acta Mathematica Hungarica*, **69**, 301-325. https://doi.org/10.1007/BF01874578