Advances in Applied Mathematics **应用数学进展, 2021, 10(12), 4477-4482**
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1012476

Hans汉斯

广义Riccati方程统一的带多参量的有理指数函数解

留　庆[1,2]，漆爱冬[2]，陈　伟[2]，周小伟[2]

[1]丽水学院工学院，浙江 丽水
[2]浙江嘉利(丽水)工业股份有限公司，浙江 丽水

收稿日期：2021年11月27日；录用日期：2021年12月17日；发布日期：2021年12月30日

摘　要

一个广义Riccati方程的带有多参数的万能有理指数函数解被获得，这个解不仅包含Riccati方程已知的各种类型的双曲函数解、三角函数解和*q*变形函数解，而且还包含大量有理指数函数解。我们用一个统一的有理指数函数解将Riccati方程所有类型的解统一起来。

关键词

Riccati方程，有理指数函数解，双曲函数解，三角函数解，*q*变形函数解

A Uniform Rational-Exponent Function Solution with Multi-Parameters for the Generalized Riccati Equation

Qing Liu[1,2], Aidong Qi[2], Wei Chen[2], Xiaowei Zhou[2]

[1]School of Engineering, Lishui University, Lishui Zhejiang
[2]Zhejiang Jiali (Lishui) Industrial Company Limited, Lishui Zhejiang

Received: Nov. 27th, 2021; accepted: Dec. 17th, 2021; published: Dec. 30th, 2021

Abstract

We derive a universal rational-exponent function solution with multi parameters, which contains not only well-known hyperbolic function solutions, trigonometric function solutions and *q*-deformation function solutions, but also new rational-exponent function solutions for the ge-

文章引用: 留庆, 漆爱冬, 陈伟, 周小伟. 广义 Riccati 方程统一的带多参量的有理指数函数解[J]. 应用数学进展, 2021, 10(12): 4477-4482. DOI: 10.12677/aam.2021.1012476

neralized Riccati equation. Based on this uniform rational-exponent solution, we unite all kinds of solutions for Riccati equation.

Keywords

Riccati Equation, Rational-Exponent Function Solution, Hyperbolic Function Solution, Trigonometric Function Solution, *q*-Deformation Function Solution

1. 引言

许多数学、物理、化学和工程技术上的问题是用非线性偏微分方程来描述的。而它们的解能解释各种非线性现象。各种求解非线性偏微分方程的方法被提出，如 Hirota 法[1] [2]、Darboux 变换法[3] [4]等。有一类方法，如扩展的 tanh-函数法[5]、改良的扩展 tanh-函数法[6]、Riccati 方程有理数展开法[7]、改进的 tanh-函数法[8] [9]、Riccati 映射法[10] [11] [12]、进一步扩展的 tanh-函数法[13]、多 Riccati 方程有理数展开法[14] [15]、进一步扩展的 Riccati 方程有理数展开法[16]、有理函数法[17] [18]和多 Riccati 方程有理指数函数法[19] [20]等都是基于 Riccati 方程及其解来构造非线性偏微分方程的解，如果 Riccati 方程的解丰富，得到的非线性偏微分方程的解也越丰富。

Riccati 方程被写成

$$\frac{\mathrm{d}\phi(\eta)}{\mathrm{d}\eta}-q-p\phi^{2}(\eta)=0. \tag{1}$$

文献[5]-[16]中，根据方程(1)中的 p、q 值的不同，给出了 17 种不同的双曲函数、三角函数和 q 变形函数解。文献[17] [18] [19] [20]中，给出了方程(1)的一个有理指数函数解，发现从这个有理指数函数解出发，通过一定的变换法则，可以导出文献[5]-[16]给出的 17 种不同的双曲函数、三角函数和 q 变形函数解，揭示出方程(1)的各种双曲函数、三角函数和 q 变形函数解有可能用有理指数函数解的形式统一起来。由于其中有些双曲函数解、三角函数解和 q 变形函数解，无法从文献[17] [18] [19] [20]给出有理指数函数解中直接得出，需要遵循一定的变换规则才能得到，因而，文献[17] [18] [19] [20]给出有理指数函数解还不完善。

本论文对文献[17] [18] [19] [20]给出的方程(1)的有理指数函数解进行推广，得到一个带多参数的更加一般的有理指数函数解，通过设定不同的参数值，直接能导出 17 种不同的双曲函数、三角函数和 q 变形函数解，而且还包含了不能用双曲函数、三角函数和 q 变形函数表示，无限多个有理指数函数解。将方程(1)的各种形式解用统一的有理指数函数解表达出来。

2. Riccati 方程统一的有理指数函数解

文献[17]给出了方程(1)的有理指数函数解：

当 $p=-\dfrac{b_1}{2a_1}, q=\dfrac{a_1}{2b_1}$，

$$\phi(\eta)=\frac{a_1\left(a_1 e^{\eta}+a_{-1}\right)}{b_1\left(a_1 e^{\eta}-a_{-1}\right)}, \tag{2}$$

其中 a_1, a_{-1}, b_1 为任意常数。

方程(2)中的仅限于 e^{η} 的指数函数，若对方程(2)中 e^{η} 的作 $e^{k\eta}, k \neq 1$ 变换，得到的有理指数函数表达式并非方程(1)的解。为了能得到方程(1)的关于 $e^{k\eta}, k \neq 0$ 的有理指数函数解。令 $\phi(\eta)=\phi(k\eta), k \neq 0$，方程(1)变成：

$$k\frac{d\phi(k\eta)}{d(k\eta)}-q-p\phi^2(k\eta)=0, \tag{3}$$

其中 $\frac{d\phi(k\eta)}{d\eta}=k\frac{d\phi(k\eta)}{d(k\eta)}$。

化简方程(3)可得

$$\frac{d\phi(k\eta)}{d(k\eta)}-\frac{q}{k}-\frac{p}{k}\phi^2(k\eta)=0. \tag{4}$$

比较方程(1)和方程(4)可知，方程(4)是对方程(1)作 $\eta=k\eta, q=\frac{q}{k}, p=\frac{p}{k}$ 变换得到。显然，对方程(1)的解方程(2)作 $\eta=k\eta, q=\frac{q}{k}, p=\frac{p}{k}$ 变换可得方程(4)的解，它是

$$\phi(k\eta)=\frac{a_1\left(a_1 e^{k\eta}+a_{-1}\right)}{b_1\left(a_1 e^{k\eta}-a_{-1}\right)}, \tag{5}$$

其中 $\frac{p}{k}=-\frac{b_1}{2a_1}, \frac{q}{k}=\frac{a_1}{2b_1}$， a_1, a_{-1}, b_1, k 是不为零的任意常数。

化简方程(5)，得

$$\phi(k\eta)=\frac{2q}{k}\frac{e^{k\eta}+c_1}{e^{k\eta}-c_1}, \tag{6}$$

其中 $pq=-\frac{k^2}{4}, c_1=\frac{a_{-1}}{a_1}$ 为任意常数。

方程(6)是方程(4)的有理指数函数解，而方程(4)能改成

$$k\frac{d\phi(k\eta)}{d(k\eta)}-q-p\phi^2(k\eta)=\frac{d\phi(k\eta)}{d\eta}-q-p\phi^2(k\eta)=0. \tag{7}$$

方程(7)正是对方程(1)作 $\phi(\eta)=\phi(k\eta)$ 变换得到的方程。所以方程(6)正是方程(1)的关于 $e^{k\eta}, k \neq 0$ 的有理指数函数解。

3. Riccati 方程有理指数函数解与已知的双曲函数、三角函数解之间的关系

由于方程(6)中参数 c_1, q, p, k 可以是任意常数，取不同数值可以得到不同有理指数函数解，即 Riccati 方程(1)有无穷多的有理指数函数解。对 c_1, q, p, k 取一些特殊的数值，可以得到文献[5]-[20]给出的各类双曲函数、三角函数、q 变形函数解和有理指数函数解。

1) 令 $k=2, c_1=\mp q, qp=-1$，方程(6)变成

$$\phi(\eta)=q\frac{e^{2\eta}-q}{e^{2\eta}+q}=q\frac{e^{\eta}-qe^{-\eta}}{e^{\eta}+qe^{-\eta}}=q\tanh_q(\eta), \tag{8}$$

$$\phi(\eta)=q\frac{e^{2\eta}+q}{e^{2\eta}-q}=q\frac{e^{\eta}+qe^{-\eta}}{e^{\eta}-qe^{-\eta}}=q\coth_q(\eta). \tag{9}$$

2) 令 $k=2\mathrm{i}, c_1=\mp q, qp=1, \mathrm{i}^2=1$，方程(6)变成

$$\phi(\eta)=\frac{e^{2\mathrm{i}\eta}-q}{\mathrm{i}\left(e^{2\mathrm{i}\eta}+q\right)}=\frac{e^{\mathrm{i}\eta}-qe^{-\mathrm{i}\eta}}{\mathrm{i}\left(e^{\mathrm{i}\eta}+qe^{-\mathrm{i}\eta}\right)}=q\tan_q(\eta), \tag{10}$$

$$\phi(\eta)=\frac{\mathrm{i}\left(e^{2\mathrm{i}\eta}+q\right)}{e^{2\mathrm{i}\eta}-q}=\frac{\mathrm{i}\left(e^{\mathrm{i}\eta}+qe^{-\mathrm{i}\eta}\right)}{e^{\mathrm{i}\eta}-qe^{-\mathrm{i}\eta}}=q\cot_q(\eta). \tag{11}$$

3) 令 $k=1, c_1=\mathrm{i}\sqrt{q}, qp=-\frac{1}{4}$，方程(6)变成

$$\phi(\eta)=2q\frac{e^{\eta}+\mathrm{i}\sqrt{q}}{e^{\eta}-\mathrm{i}\sqrt{q}}=2q\left(\tanh_q(\eta)+\mathrm{i}\sqrt{q}\,\mathrm{sech}_q(\eta)\right). \tag{12}$$

方程(6)~(12)正是文献[13]给出的 Riccati 方程(1)的 q 变形三角函数和 q 变形双曲函数解。

4) 令 $k=1, c_1=\pm\mathrm{i}, q=\frac{1}{2}, p=-\frac{1}{2}$，方程(6)变成

$$\phi(\eta)=\frac{e^{\eta}\pm\mathrm{i}}{e^{\eta}\mp\mathrm{i}}=\tanh(\eta)\pm\mathrm{i}\,\mathrm{sech}(\eta), \tag{13}$$

$$\phi(\eta)=\frac{e^{\eta}\pm\mathrm{i}}{e^{\eta}\mp\mathrm{i}}=\coth(\eta)\pm\mathrm{csch}(\eta). \tag{14}$$

方程(13)与方程(14)是等价的。

5) 令 $k=\mathrm{i}, c_1=\mp\mathrm{i}, q=p=\pm\frac{1}{2}$，方程(6)变成

$$\phi(\eta)=\mp\mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}\eta}\mp\mathrm{i}}{e^{\mathrm{i}\eta}\pm\mathrm{i}}=\mp\left(\sec(\eta)\pm\tan(\eta)\right). \tag{15}$$

6) 令 $k=\mathrm{i}, c_1=\pm1, q=p=\pm\frac{1}{2}$，方程(6)变成

$$\phi(\eta)=\pm\mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}\eta}\pm1}{e^{\mathrm{i}\eta}\mp1}=\pm\left(\csc(\eta)\pm\cot(\eta)\right). \tag{16}$$

7) 令 $k=2, c_1=\mp1, q=1, p=-1$，方程(6)变成

$$\phi(\eta)=\frac{e^{2\eta}-1}{e^{2\eta}+1}=\tanh(\eta), \tag{17}$$

$$\phi(\eta)=\frac{e^{2\eta}+1}{e^{2\eta}-1}=\coth(\eta). \tag{18}$$

8) 令 $k=2, c_1=\mp1, q=1, p=-1$，方程(6)变成

$$\phi(\eta)=-\mathrm{i}\frac{e^{2\mathrm{i}\eta}-1}{e^{2\mathrm{i}\eta}+1}=\tan(\eta). \tag{19}$$

9) 令 $k=2\mathrm{i}, c_1=1, q=p=-1$，方程(6)变成

$$\phi(\eta)=\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\eta}+1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\eta}-1}=\cot(\eta). \tag{20}$$

方程(13)~(20)正是文献[7]给出的 Riccati 方程(6)各类双曲函数和三角函数解。

10) 令 $q<0, k=2\sqrt{-q}, c_1=\mp1, p=1$，方程(6)变成

$$\phi(\eta)=\frac{-\sqrt{-q}\left(\mathrm{e}^{2\sqrt{-q}\eta}-1\right)}{\mathrm{e}^{2\sqrt{-q}\eta}+1}=-\sqrt{-q}\tanh\left(\sqrt{-q}\eta\right), \tag{21}$$

$$\phi(\eta)=\frac{-\sqrt{-q}\left(\mathrm{e}^{2\sqrt{-q}\eta}+1\right)}{\mathrm{e}^{2\sqrt{-q}\eta}-1}=-\sqrt{-q}\coth\left(\sqrt{-q}\eta\right). \tag{22}$$

11) 令 $q>0, k=2\mathrm{i}\sqrt{q}, c_1=\mp1, p=1$，方程(6)变成

$$\phi(\eta)=\frac{-\mathrm{i}\sqrt{q}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sqrt{q}\eta}-1\right)}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sqrt{q}\eta}+1}=\sqrt{q}\tan\left(\sqrt{q}\eta\right), \tag{23}$$

$$\phi(\eta)=\frac{-\mathrm{i}\sqrt{q}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sqrt{q}\eta}+1\right)}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sqrt{q}\eta}-1}=-\sqrt{q}\cot\left(\sqrt{q}\eta\right). \tag{24}$$

方程(21)~(24)正是文献[5]给出的 Riccati 方程(1)的各类双曲函数、三角函数解。

12) 令 $k=1, c_1=\frac{a_{-1}}{a_1}, p=-\frac{b_1}{2a_1}, q=\frac{a_1}{2b_1}$，方程(6)变成方程(2)，正是文献[17]的结果。

4. 结论

从上述分析可得，文献[5]-[20]各类双曲函数解、三角函数解、q 变形三角函数解和 q 变形双曲函数解都是方程(6)的特解，同时方程(6)中参数 k, c_1, q, p 还可取其它的任意值，得到 Riccati 方程(1)无限多的不同有理指数函数解。所以方程(6)是 Riccati 方程(1)统一的广义解析解。

借助 Riccati 方程(1)统一的广义解析解方程(6)，结合文献[5]-[20]的方法，可以非常容易获得非线性系统大量有理指数函数解，通过对这些新的解析解的研究，有助我们解决工程中碰到的一些技术问题，帮助我们解决科学上的一些新问题。

致 谢

这项工作获得丽水市重点研发计划项目(项目号：2019ZDYF5)资助。

参考文献

[1] Liu, W.J., Huang, L.G., Li, Y.Q., Pan, N. and Lei, M. (2015) Interactions of Dromion-Like Structures in the Dimension Variable Coefficient Nonlinear Schrödinger Equation. *Applied Mathematics Letters*, **39**, 91-95. https://doi.org/10.1016/j.aml.2014.07.011

[2] Liu, W J., Tian, B. and Lei, M. (2014) Dromion-Like Structures in the Variable Coefficient Nonlinear Schrödinger Equation. *Applied Mathematics Letters*, **30**, 28-32. https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.12.004

[3] Dai, C.Q. and Huang, W.H. (2014) Multi-Rogue Wave and Multi-Breather Solutions in PT-Symmetric Coupled Waveguides. *Applied Mathematics Letters*, **32**, 35-40. https://doi.org/10.1016/j.aml.2014.02.013

[4] Dai, C.Q., Wang, Y.Y. and Zhang, X.F. (2014) Controllable Akhmediev Breather and Kuznetsov-Ma Soliton Trains in *PT*-Symmetric Coupled Waveguides. *Optics Express*, **22**, 29862-29867. https://doi.org/10.1364/OE.22.029862

[5] Fan, E.G. (2000) Extended Tanh-Function Method and Its Applications to Nonlinear Equations. *Physics Letters A*, **277**,

212-218. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00725-8

[6] Elwakil, S.A., El-labany, S.K., Zahrana, M.A. and Sabryb, R. (2002) Modified Extended Tanh-Function Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equations. *Physics Letters A*, **299**,179-188. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(02)00669-2

[7] Wang, Q., Chen, Y. and Zhang, H.Q. (2005) A New Riccati Equation Rational Expansion Method and Its Application to (2 + 1)-Dimensional Burgers Equation. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **25**, 1019-1028. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.01.039

[8] Dai, C.Q. and Yu, F.B. (2014) Special Solitonic Localized Structures for the (3 + 1)-Dimensional Burgers Equation in Water Waves. *Wave Motion*, **51**, 52-59. https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2013.06.002

[9] Lou, M.R., Zhang, Y.P., Liang, Q.K. and Dai, C.Q. (2015) Be Careful with the Equivalence of Different Ansätz of Improved Tanh-Function Method for Nonlinear Models. *Applied Mathematics Letters*, **48**, 23-29. https://doi.org/10.1016/j.aml.2015.03.009

[10] Liu, Q. (2007) Some Exact Solutions for Stochastic mKdV Equation. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **32**, 1224-1230. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.11.044

[11] Liu, Q., Jia, D.L. and Wang, Z.H. (2010) Three Types of Exact Solutions to Wick-Type Generalized Stochastic Korteweg-de Vries Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3495-3500. https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.10.014

[12] Liu, Q. (2006) Various Types of Exact Solutions for Stochastic mKdV Equation via a Modified Mapping Method. *Europhysics Letters*, **74**, 377-383. https://doi.org/10.1209/epl/i2005-10556-5

[13] Dai, C.Q. and Wang, Y.Y. (2008) Combined Wave Solutions of the (2 + 1)-Dimensional Generalized Nizhnik-Novikov-Veselov system. *Physics Letters A*, **372**, 1810-1815. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.05.120

[14] Chen, Y. and Wang, Q. (2005) Multiple Riccati Equations Rational Expansion Method and Complexiton Solutions of the Whitham-Broer-Kaup Equation. *Physics Letters A*, **347**, 215-227. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2005.08.015

[15] Wang, Q. and Chen, Y. (2006) A Multiple Riccati Equations Rational Expansion Method and Novel Solutions of the Broer-Kaup-Kupershmidt System. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **30**, 197-203. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.08.153

[16] Cao, L.N., Wang, D.S. and Chen, L.X. (2007) Symbolic Computation and Q-Deformed Function Solutions of (2 + 1)-Dimensional Breaking Soliton Equation. *Communications in Theoretical Physics*, **47**, 270-274. https://doi.org/10.1088/0253-6102/47/2/017

[17] Liu, Q., Shen, S.Y. and Wang, Z.H. (2013) The Rational Solutions to a Generalized Riccati Equation and Their Application. *International Journal of Modern Physics B*, **27**, Article ID: 1350013. https://doi.org/10.1142/S0217979213500136

[18] 留庆. Wick 型随机 mKdV 方程带多参量的广义的有理指数函数解[J]. 应用数学进展, 2017, 6(9): 1056-1062.

[19] Liu, Q. and Wang, Z.H. (2010) Uniformly Constructing Combinatorial Solutions, Combining a Rational Function with Hyperbolic Functions or Trigonometric Functions, for the (2 + 1) Dimensional Broer-Kaup-Kupershmidt Equation. *Physica Scripta*, **82**, Article ID: 065011. https://doi.org/10.1088/0031-8949/82/06/065011

[20] Liu, Q., Wang, Z.H. and Jia, D.L. (2013) A Multiple Riccati Equations Rational-Exponent Method and Its Application to Whitham-Broer-Kaup Equation. *International Journal of Modern Physics B*, **27**, Article ID: 1350014. https://doi.org/10.1142/S0217979213500148