

# 基于流体静力学重构的天然气流模型的 Well-Balanced间断伽辽金方法

郭 威, 陈子铭, 李 刚\*

青岛大学, 数学与统计学院, 山东 青岛

收稿日期: 2021年11月23日; 录用日期: 2021年12月21日; 发布日期: 2021年12月28日

## 摘 要

在本文研究中, 我们针对天然气科学与工程领域中天然气流动模型建立了高阶well-balanced间断伽辽金有限元方法。管道中的天然气流动模型精确保持速度为零的定常状态。为了从数值角度上保持该定常状态, 我们提出了well-balanced数值流通量以及一种崭新的源项离散, 最终建立了高阶间断伽辽金有限元方法。此方法能够在离散状态下精确保持速度为零的定常状态。严格的理论分析以及广泛的数值结果均验证了本方法保持良好的特性。此外, 数值实验还验证了该方法对于小扰动具有精确捕捉能力和良好的分辨率。我们相信该方法在天然气科学与工程领域中具有潜在应用前景。

## 关键词

天然气流模型, 间断伽辽金方法, 源项, 高阶精度

# A Well-Balanced Discontinuous Galerkin Method Based on Hydrostatic Reconstruction for Real Gas in Pipelines

Wei Guo, Ziming Chen, Gang Li\*

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Nov. 23<sup>rd</sup>, 2021; accepted: Dec. 21<sup>st</sup>, 2021; published: Dec. 28<sup>th</sup>, 2021

## Abstract

In this research, we propose high order well-balanced discontinuous Galerkin methods for real

\*通讯作者。

文章引用: 郭威, 陈子铭, 李刚. 基于流体静力学重构的天然气流模型的 Well-Balanced 间断伽辽金方法[J]. 应用数学进展, 2021, 10(12): 4404-4414. DOI: 10.12677/aam.2021.1012469

gas in pipelines in the fields of the natural gas science and engineering. The model of real gas in pipelines preserves the steady state exactly. In order to maintain the steady state at the discrete level, we propose to construct the well-balanced numerical fluxes as well as a novel source term approximation. In this article, by means of hydrostatic reconstruction, we build a high order discontinuous Galerkin method, which exactly preserves the steady state, and is characterized by a discharge equal to zero (analogue to hydrostatic equilibrium). Rigorous theoretical analysis as well as extensive numerical results, all validate that the current method preserves the well-balanced property. In addition, numerical experiments are carried out to validate the ability to capture small perturbation of steady state, and high resolutions. We believe that the resulting method has potential applications in the fields of natural gas science and engineering.

## Keywords

Real Gas in Pipelines, Discontinuous Galerkin Methods, Source Term, High Order Accuracy

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

针对管道中天然气流动的数学建模以及数值模拟是规划和运行天然气输送网络中的一个重要课题，具有实际的应用价值。管道中天然气流动过程可以经由带有源项的可压缩欧拉方程来刻画。关于该数学模型的研究可以帮助优化管道设计，进而节省天然气输运过程中由于自耗引起的运行成本。此外，由于管道中天然气流动过程是一个高度非线性的复杂过程，导致理论分析超级困难，实验研究耗时耗力。然而，科学计算可以帮助工程师利用计算机模拟再现天然气在管道中的流动过程，帮助呈现摩擦力、温度的分布，从而节约时间，节约成本，具有较高的经济效益。

近年来，由于高速计算机的迅猛发展，借助于高阶数值方法针对管道中天然气流动过程进行数值模拟在天然气输送网络的规划与运行中获得了广泛应用[1] [2] [3]。截至目前，大多数关于这一课题的研究和计算程序都是处理定常状态的情况。

在实际问题中，管道相对于基准面的高度根据地形变化而变化是非常常见的，这个现状导致了气体流动模型中源项的产生。这种情况类似于水动力学中由于水体底部不平而导致的几何源项[4]。在实际的高压输气网络中，气体表现为真实气体，因此需要考虑可压缩因素对理想气体方程进行修正。综上所述，运输管道中天然气流动的数学描述可以通过如下控制方程来刻画[5]：

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = -\frac{\lambda}{2D} \rho |u| u - g \rho h_x \\ E_t + ((E + p)u)_x = \frac{4\beta}{D} (\theta_{ext} - \theta) - g \rho u h_x \end{cases} \quad (1)$$

其中， $\rho, u, p$  分别表示流体密度、速度和压力。 $E$  是总能量，包括流体的动能和内能。 $D$  表示管道直径。符号  $\theta$  和  $\theta_{ext}$  分别代表平均温度和外部温度。 $\beta$  为传热系数。为了闭合这个方程组，我们使用理想气体定律

$$p = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)\left(E - \frac{1}{2}\rho u^2\right),$$

其中  $\gamma$  是绝热比。

从数学的角度来看, 方程组(1)属于双曲平衡律, 其主要特征是保持速度为零的定常状态(即解关于时间的导数为零)

$$u = 0, \quad \theta = \theta_{ext} \quad (2)$$

换言之, 物理流通量非零, 且其梯度可以被源项精确平衡掉。在离散状态下, 能够保持流通量梯度和源项之间精确平衡的数值方法是备受欢迎的。然而, 上述平衡既不是常数, 也不是多项式, 这给高阶数值方法的构造带来了极大挑战。一般情况下, 简单直接的源项离散方式会破坏掉这个微妙的平衡状态, 容易导致虚假震荡, 严重的会致使程序崩溃。此外, 网格加细策略仅能降低震荡幅度, 无法彻底消除震荡。更进一步, 网格加细策略计算成本太高, 尤其针对高维问题, 不利于实际问题。Greenberg 连同合作者[6] [7]原创性地提出了 well-balanced 方法, 该方法在离散状态下精确保持流通量梯度与源项之间的平衡。换句话说, well-balanced 方法能够保持定常状态至机器精度。此外, 较之 non-well-balanced 方法, well-balanced 方法可以基于较粗网格有效捕捉关于定常状态的小扰动[8] [9], 进而节约计算成本, 更加适应实际需求。

在本研究中, 我们针对保持定常状态的天然气流动模型构造了高阶 well-balanced 间断伽辽金 (Discontinuous Galerkin, 简称 DG)方法。为了实现该 well-balanced 性质, 我们首先给出了源项的重新表达, 进而建立了一种崭新的源项离散以及分解算法。最终所得到的 DG 方法既保持了 well-balanced 性质, 同时针对间断解保持陡峭的间断过渡。

DG 方法是一种以分段多项式空间作为试探解和检验函数空间的有限元方法。DG 方法结合了有限元方法和有限体积方法的优点(见[10] [11]的简要历史回顾), 拥有高阶精度、易于并行计算、hp 自适应的灵活性、方便处理复杂边界和任意几何形状, 从而使之得到了广泛应用[12] [13] [14]。基于上述优点, 从 21 世纪初至今, DG 方法在计算流体力学领域中获得了成功应用[15]-[25]。据我们所知, 这将是首次将 DG 方法用于管道中天然气流动的数值模拟当中。

本文的组织结构如下。在第 2 节中, 我们详细介绍了 well-balanced 的 DG 方法。然后, 在第三节中, 我们进行了一些数值实验来验证所得到方法的性能。结论在第四章给出。

## 2. 管道内天然气流体模型的 well-balanced DG 法的建立

首先, 将空间区域剖分为  $N$  个一致单元, 其中  $I_j = \left[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}\right], j = 1, 2, \dots, N$ 。这里  $x_j = \frac{1}{2}\left(x_{j-\frac{1}{2}} + x_{j+\frac{1}{2}}\right)$  表示单元中心,  $\tau_j = x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}$  表示网格尺寸,  $\tau = \max_{1 \leq j \leq N} \tau_j$  表示最大网格尺寸。近似解空间  $V_\tau^k$  被定义为每个单元  $I_j$  上次数小于等于  $k$  的分段多项式集合:

$$V_\tau^k = \left\{ \varphi : \varphi|_{I_j} \in P^k(I_j), j = 1, 2, \dots, N \right\}. \quad (3)$$

注意在  $V_\tau^k$  中的多项式可以在单元界面处保持间断。

在 DG 方法的框架下, 我们取  $U_\tau \in V_\tau^k$  作为对精确解  $U$  的数值近似。此外, 我们分别用  $U_{\tau, j+\frac{1}{2}}^-$  和  $U_{\tau, j+\frac{1}{2}}^+$  表示数值解  $U_\tau$  在单元内分别从左单元  $I_j$  和右单元  $I_{j+1}$  的极限值。更进一步, 我们用

$\{U\} \left( x_{j+\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left( U_{\tau, \frac{1}{2}}^- + U_{\tau, \frac{1}{2}}^+ \right)$  表示  $U_\tau$  在单元界面  $x_{j+\frac{1}{2}}$  处两侧值得算术平均值。

当方程处于定常状态(2)时, 控制方程(1)中的动量方程满足

$$p_x = -g\rho h_x. \quad (4)$$

此外, 对于理想气体, 我们有等式  $P = R\theta_{ext}\rho$ , 其中  $R$  为气体常数。我们可以把(4)等价地改写为

$$R\theta_{ext}\rho_x = -g\rho h_x.$$

将上式在区间  $[0, x]$  上进行积分, 并通过简单代数运算, 可以将密度  $\rho_x$  和压力  $p_x$  分别表示为

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \rho(0) \exp\left(-\frac{g}{R\theta_{ext}}(h(x)-h(0))\right), \\ p(x) &= R\theta_{ext}\rho(0) \exp\left(-\frac{g}{R\theta_{ext}}(h(x)-h(0))\right). \end{aligned} \quad (5)$$

因此, 控制方程(1)可以等价地重新表述为:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = -\frac{\lambda}{2D} \rho |u| u + R\theta_{ext}\rho \frac{\exp\left(-\frac{g}{R\theta_{ext}}(h(x)-h(0))\right)}{\exp\left(-\frac{g}{R\theta_{ext}}(h(x)-h(0))\right)}_x, \\ E_t + ((E+p)u)_x = \frac{4\beta}{D}(\theta_{ext} - \theta) - g\rho u h_x, \end{cases} \quad (6)$$

或者如下紧致形式

$$U_t + F(U)_x = S, \quad (7)$$

其中  $U = (\rho, \rho u, E)^T$  表示守恒变量,  $F(U)$  表示物理通量,  $S$  为源项。

在 DG 方法的框架下, 控制方程(1)的标准半离散 DG 方法定义如下: 对于任何测试函数  $\phi \in V_\tau^k$ , 数值解  $U_\tau$  满足以下弱形式

$$\int_{I_j} (U_\tau)_t \phi dx - \int_{I_j} F(U_\tau) \phi_x dx + \hat{F}_{j+\frac{1}{2}} \phi \left( x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) - \hat{F}_{j-\frac{1}{2}} \phi \left( x_{j-\frac{1}{2}}^+ \right) = \int_{I_j} S \phi dx \quad (8)$$

其中  $\hat{F}_{j+\frac{1}{2}} = \hat{f} \left( U_{\tau, j+\frac{1}{2}}^-, U_{\tau, j+\frac{1}{2}}^+ \right)$  表示单元界面  $x_{j+\frac{1}{2}}$  处的数值流通量, 用来近似物理流通量  $F \left( U \left( x_{j+\frac{1}{2}}, t \right) \right)$ 。

本文中, 我们采用简单高效的 Lax-Friedrichs 流通量, 即

$$\hat{f}(a_1, a_2) = \frac{1}{2} (F(a_1) + F(a_2) - \alpha(a_2 - a_1)), \quad (9)$$

其中  $\alpha$  表示雅克比矩阵  $\frac{\partial F(U)}{\partial U}$  的特征值的绝对值的最大值。

## 2.1. Well-balanced 数值流通量的构造

设计 well-balanced DG 方法的关键步骤在于构造 well-balanced 数值流通量  $\hat{F}_{j+\frac{1}{2}}$ 。式(9)中的数值黏性

项  $\alpha(a_2 - a_1)$  是针对双曲守恒律稳定性的必要选择。然而, 它会破坏数值方法的 well-balanced 性能。因此, 我们对(9)中原有数值流通量做如下修改

$$\hat{F}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ F \left( U_{\tau, j+\frac{1}{2}}^- \right) + F \left( U_{\tau, j+\frac{1}{2}}^+ \right) - \alpha \left( \tilde{U}_{\tau, j+\frac{1}{2}}^+ - \tilde{U}_{\tau, j+\frac{1}{2}}^- \right) \right], \quad (10)$$

其中  $\tilde{U} = \frac{U}{\rho}$ 。在定常状态下,  $\tilde{U}$  退化为常数, 故数值粘性项  $\alpha \left( \tilde{U}_{\tau, j+\frac{1}{2}}^+ - \tilde{U}_{\tau, j+\frac{1}{2}}^- \right)$  相应地转变为零。因此, 粘度项的影响褪变为零。所以, 针对定常状态数值流通量相应地演变成如下简单形式

$$\hat{F}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ F \left( U_{\tau, j+\frac{1}{2}}^- \right) + F \left( U_{\tau, j+\frac{1}{2}}^+ \right) \right]. \quad (11)$$

## 2.2. 一种新的源项离散

接下来, 我们针对源项提出一种新的离散方式。为了便于描述, 首先定义如下符号

$$b(x) = \exp \left( -\frac{g}{R\theta_{ext}} (h(x) - h(0)) \right), \quad (12)$$

从而, 我们得到等式

$$-g\rho h_x = R\theta_{ext} \frac{\rho}{b} b_x \quad (13)$$

接下来, 我们将第二个方程中源项的积分分裂为

$$\begin{aligned} \int_{I_j} S^{[2]} \phi dx &= -\frac{\lambda}{2D} \int_{I_j} \rho |u| u \phi dx + R\theta_{ext} \int_{I_j} \frac{\rho}{b} b_x \phi dx \\ &= -\frac{\lambda}{2D} \int_{I_j} \rho |u| u \phi dx + R\theta_{ext} \int_{I_j} \left( \frac{\rho}{b} - \frac{\rho(x_j)}{b(x_j)} + \frac{\rho(x_j)}{b(x_j)} \right) b_x \phi dx \\ &= -\frac{\lambda}{2D} \int_{I_j} \rho |u| u \phi dx + R\theta_{ext} \int_{I_j} \left( \frac{\rho}{b} - \frac{\rho(x_j)}{b(x_j)} \right) b_x \phi dx \\ &\quad + R\theta_{ext} \frac{\rho(x_j)}{b(x_j)} \left( \left( b \left( x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) \phi \left( x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) - b \left( x_{j-\frac{1}{2}}^- \right) \phi \left( x_{j-\frac{1}{2}}^- \right) \right) - \int_{I_j} b_x \phi dx \right) \end{aligned}$$

我们现在将函数  $b(x)$  投影到空间  $V_\tau^k$  中, 利用  $L^2$  投影得到多项式  $b_\tau(x)$ 。从而, 我们得到对于第二个方程中源项的数值离散

$$\begin{aligned} \int_{I_j} S^{[2]} \phi dx &\approx -\frac{\lambda}{2D} \int_{I_j} \rho_\tau |u_\tau| u_\tau \phi dx + R\theta_{ext} \int_{I_j} \left( \frac{\rho_\tau}{b_\tau} - \frac{\rho_\tau(x_j)}{b_\tau(x_j)} \right) (b_\tau)_x \phi dx \\ &\quad + R\theta_{ext} \frac{\rho_\tau(x_j)}{b_\tau(x_j)} \left( \{b_\tau\} \left( x_{j+\frac{1}{2}} \right) \phi \left( x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) - \{b_\tau\} b \left( x_{j-\frac{1}{2}} \right) \phi \left( x_{j-\frac{1}{2}}^+ \right) \right) \\ &\quad - R\theta_{ext} \frac{\rho_\tau(x_j)}{b_\tau(x_j)} \int_{I_j} b_\tau \phi_x dx \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $\rho$  和  $b$  分别用  $\rho_\tau$  和  $b_\tau$  代替, 另外  $b_\tau$  的单元界面值用  $b_\tau$  所在的单元界面两侧值的算术平均值  $\{b_\tau\}$  来

代替。此外，对于第三个方程中的源项，我们采用具有足够高精度的高斯求积公式来逼近。

### 2.3. Well-balanced DG 方法

上述操作导出关于带有源项的欧拉方程(1)的 well-balanced DG 方法，详见如下命题所述

**命题 1:** 结合式(10)和式(14)，半离散 DG 方法(8)对于定常状态(2)保持 well-balanced 性质。

**证明:** 在定常状态(2)下，我们首先拥有

$$\rho_\tau = \rho(0)b_\tau, \quad u_\tau = 0, \quad p_\tau = R\theta_{ext}\rho(0)b_\tau. \quad (15)$$

由于  $u = 0$ ，第一、三方程中的流通量和源项均都变为零。因此，第一个和第三个方程显然保持精确平衡。接下来，聚焦于第二个方程。对于动量方程，联合式(5)和式(12)得到以下等式

$$\frac{\rho_\tau(x_j)}{b_\tau(x_j)} = \frac{\rho_\tau(x)}{b_\tau(x)} \equiv \rho(0). \quad (16)$$

由于式(15)、(16)，源项离散(14)相应地变为

$$\begin{aligned} \int_{I_j} S^{[2]} \phi dx &\approx R\theta_{ext} \frac{\rho(x_j)}{b(x_j)} \left( \{b_\tau\} \left( x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) \phi \left( x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) - \{b_\tau\} b \left( x_{j-\frac{1}{2}} \right) \phi \left( x_{j-\frac{1}{2}}^+ \right) - \int_{I_j} b_\tau \phi_x dx \right) \\ &\approx R\theta_{ext} \rho(0) \left( \{b_\tau\} \left( x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) \phi \left( x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) - \{b_\tau\} b \left( x_{j-\frac{1}{2}} \right) \phi \left( x_{j-\frac{1}{2}}^+ \right) - \int_{I_j} b_\tau \phi_x dx \right) \end{aligned} \quad (17)$$

另外，由于  $u = 0$ ，第二个物理流通量  $F^{[2]}(U) = \rho u^2 + p$  退化为  $p$ 。借助于式(10)以及等式  $p_\tau = R\theta_{ext}\rho(0)b_\tau$ ，式(8)中针对第二个方程中流通量梯度的数值逼近转化为

$$\begin{aligned} &\hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^{[2]} \phi \left( x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) - \hat{F}_{j-\frac{1}{2}}^{[2]} \phi \left( x_{j-\frac{1}{2}}^+ \right) - \int_{I_j} F(U_\tau) \phi_x dx \\ &= R\theta_{ext} \rho(0) \left( \{b_\tau\}_{j+\frac{1}{2}} \phi \left( x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) - \{b_\tau\}_{j-\frac{1}{2}} \phi \left( x_{j-\frac{1}{2}}^+ \right) - R\theta_{ext} \rho(0) \int_{I_j} b_\tau \phi_x dx \right) \\ &= R\theta_{ext} \rho(0) \left( \{b_\tau\}_{j+\frac{1}{2}} \phi \left( x_{j+\frac{1}{2}}^- \right) - \{b_\tau\}_{j-\frac{1}{2}} \phi \left( x_{j-\frac{1}{2}}^+ \right) - \int_{I_j} b_\tau \phi_x dx \right) \end{aligned} \quad (18)$$

比较式(17)与(18)，我们发现针对流通量梯度的逼近与针对源项的逼近相互抵消掉的，这导致所得到的 DG 方法保持所期待的 well-balanced 性质。

在取得了数值流通量(10)和源项离散(14)之后，我们获得了半离散 DG 方法(8)的简洁形式

$$\frac{dU_\tau}{dt} = \mathcal{L}(U_\tau). \quad (19)$$

实际上，式(19)是一常微分方程，其中  $\mathcal{L}(U_\tau)$  表示空间算子，包含了针对流通量梯度和源项的离散。对于常微分方程(19)的向前时间推进，我们采用经典的三阶 Runge-Kutta 方法[26]:

$$\begin{aligned} U_\tau^{(1)} &= U_\tau^n + \Delta t \mathcal{L}(U_\tau^n), \\ U_\tau^{(2)} &= \frac{3}{4} U_\tau^n + \frac{1}{4} \left( U_\tau^{(1)} + \Delta t \mathcal{L}(U_\tau^{(1)}) \right), \\ U_\tau^{n+1} &= \frac{1}{3} U_\tau^n + \frac{2}{3} \left( U_\tau^{(2)} + \Delta t \mathcal{L}(U_\tau^{(2)}) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

### 3. 数值结果

在本节中,我们将通过不同算例来测试所提出的三阶 DG 方法的性能。我们采用三阶 Runge-Kutta 方法(20),并在整个计算过程中取重力常数  $g$  为 9.812, 为了保持数值稳定性取  $CFL = 0.18$ 。

#### 3.1. 测试 well-balanced 性质

通过第一个数值算例,我们来测试所提方法的 well-balanced 性质。初始条件满足如下定常状态

$$\begin{aligned}\rho(x,0) &= \rho(0)\exp\left(-\frac{g}{R\theta_{ext}}(h(x)-h(0))\right), \\ u(x,0) &= 0, \\ p(x,0) &= R\theta_{ext}\rho(0)\exp\left(-\frac{g}{R\theta_{ext}}(h(x)-h(0))\right),\end{aligned}$$

其中计算区域为  $[0,40]$ , 取参数分别为  $R = 480$ ,  $\rho(0) = 1$ ,  $\theta(x) = \theta_{ext} = 288.15$ ,  $h(x) = 1000\sin(\pi x/40)$ 。

然后,分别基于包含 100 和 200 个单元的均匀网格上,将该算例计算至时刻  $t = 0.25$ 。为了表明即使在舍入误差存在的前提下,该方法也能保持 well-balanced 性质,分别借助于单精度和双精度实施了计算,并将  $\rho, \rho u, E$  在  $t = 0.25$  时刻与初始时刻的  $L^1$  误差展现于表 1。我们可以清楚地观察到,即使针对不同精度,数值误差均与计算机舍入误差处在同一个水平。这就相应地验证了该方法保持预期的 well-balanced 性质。

**Table 1.**  $L^1$  errors for different precisions for the steady state

**表 1.** 定常状态的基于不同精度的  $L^1$  误差

$N$	Precisions	$\rho$	$\rho u$	$E$
100	Single	2.78E-07	1.56E-07	5.12E-08
	Double	5.16E-15	3.37E-15	9.93E-14
200	Single	8.39E-07	2.76E-07	1.27E-08
	Double	1.28E-14	1.07E-14	2.03E-14

**Table 2.**  $L^1$  errors and orders of accuracy for the test case in Section 3.2

**表 2.** 第 3.2 节中算例的  $L^1$  误差与精度阶

$N$	$\rho$		$\rho u$	
	$L^1$ error	Order	$L^1$ error	Order
25	1.76E-02		6.53E-02	
50	5.23E-03	1.75	1.82E-02	1.84
100	1.04E-03	2.33	2.95E-03	2.63
200	1.64E-03	2.67	4.00E-04	2.88
400	2.24E-03	2.87	5.29E-05	2.92
800	2.82E-04	2.99	6.57E-06	3.01

#### 3.2. 精度测试

利用这个算例,我们对所提方法的精度阶实施了测试,采用如下初始条件



$$\begin{aligned}\rho(x,t) &= 1 + 0.2 \sin(\pi(x-t)), \\ u(x,t) &= 1, \\ p(x,t) &= 1,\end{aligned}$$

其中计算区域为  $[0, 2]$ ，参数分别取作  $R = 480$ ， $\theta(x) = \theta_{ext} = 288.15$ ， $h(x) = \sin(\pi x)$ 。在计算区域  $[0, 2]$  两端分别使用周期边界条件，我们将该算例计算到  $t = 2$  时刻，并通过 6400 个单元来获得一个参考解。在表 2 中，我们分别列出了  $\rho$  和  $\rho u$  的  $L^1$  误差和精度阶。很明显，数值结果达到了预期的三阶精度。

### 3.3. 等温气体的小扰动问题

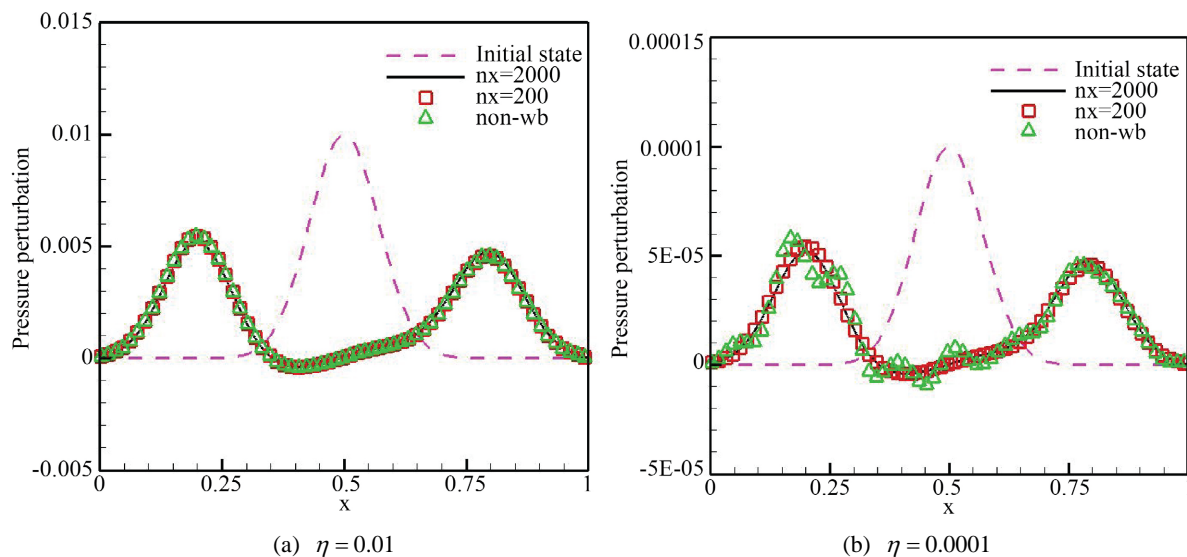
本算例的目的在于通过对等温气体的小扰动来检验 well-balanced 方法的优点，这个算例借鉴 LeVeque [27] 提出的算例，且在文献 [28] [29] [30] 中也采用过。管道高度在  $x$  截面上为  $h(x) = \frac{1}{g} x$  定常状态如下：

$$\rho_0(x) = p_0(x) = \exp(-x), u_0(x) = 0, \quad (21)$$

计算区域为  $[0, 1]$ 。我们设定初始密度和速度为定常状态(21)，但是针对压力施加一个小扰动

$$p(x, 0) = p_0(x) + \eta \exp(-100(x - 0.5)^2),$$

其中  $\eta$  表示扰动参数。在这里，分别考虑两个扰动参数  $\eta = 0.01$  (大脉冲)和  $\eta = 0.0001$  (小脉冲)。我们使用 100 个单元将该算例计算至时刻  $t = 0.2$ ，并与通过 2000 个单元得到的参考解相比较。压力扰动分别如图 1 所示，为了方便比较，我们还给出了 non-well-balanced 方法的数值结果(用 “ $\triangle$ ”)。



**Figure 1.** Numerical results of the example in Section 3.3 by the well-balanced method (denoted by “ $\square$ ”) and by the non-well-balanced method (denoted by “ $\triangle$ ”).

**图 1.** 在 3.3 节例子的 well-balanced 方法(用 “ $\square$ ” 表示)与 non-well-balanced 方法(用 “ $\triangle$ ” 表示)的数值结果

很明显，相关扰动分裂成两个方向相反的波，并且在最后时刻脉冲振幅减小。对于两个脉冲，well-balanced 方法生成的数值结果均与参考解很好地匹配，且不存在伪振荡。与此同时，non-well-balanced 方法只能对大脉冲产生良好的效果，而不能有效捕获小脉冲，同时存在伪振荡。



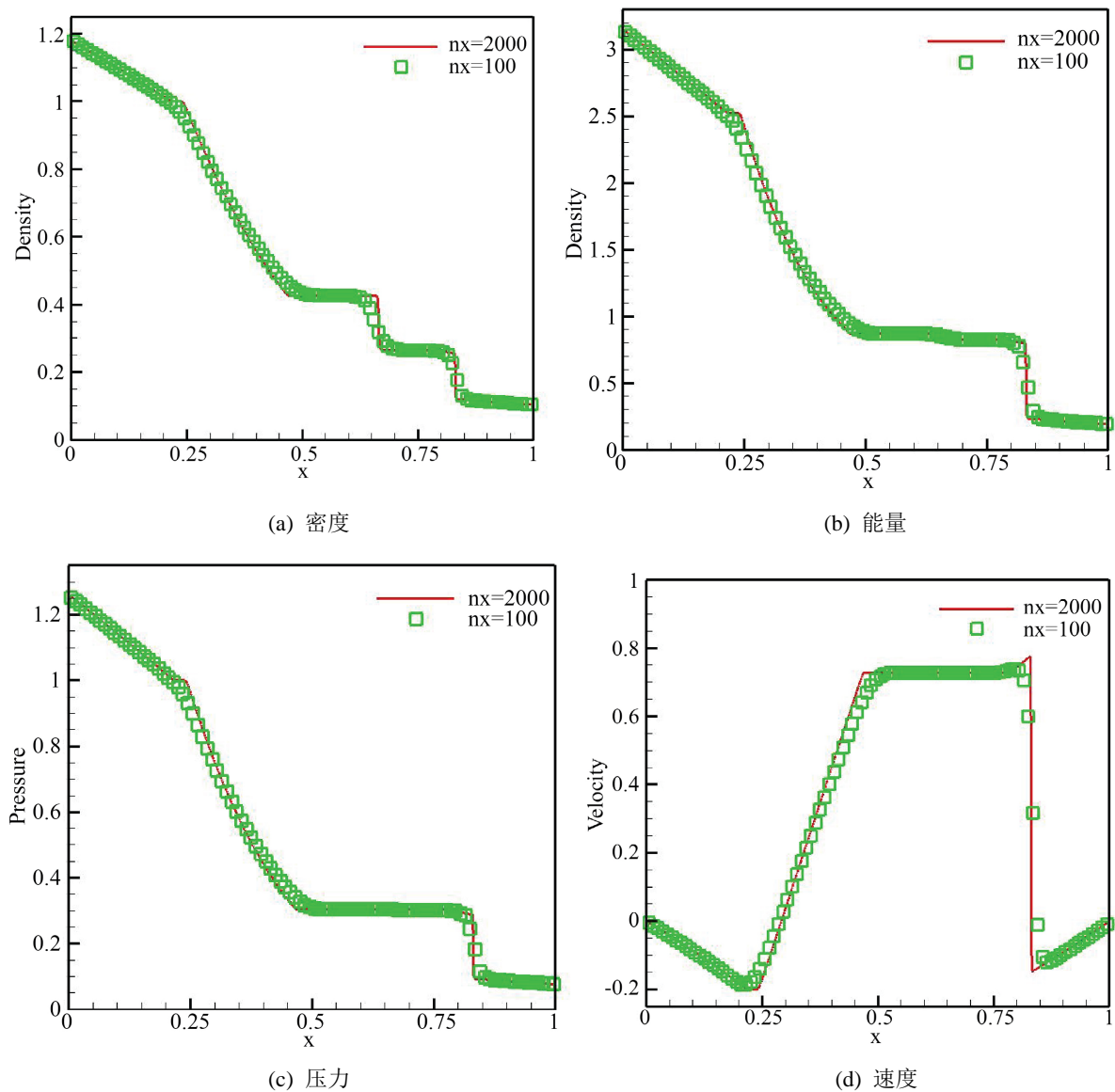
### 3.4. 引力场下的一维激波管问题

在本节中, 我们模拟标准 Sod 问题[31] [32] [33]来验证 well-balanced 方法的能力, 该算例涉及到快速变化的激波、接触波和稀薄波。间断初始条件如下

$$(\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (1, 0, 1), & \text{如果 } x \leq 0.5 \\ (0.125, 0, 0.1), & \text{否则, } x \in [0, 1] \end{cases}$$

截面高度取作  $h(x) = \frac{1}{g}x$ , 参数分别取作  $R = 480$ ,  $\theta(x) = \theta_{ext} = 288.15$ 。我们将数值结果展示与图 2,

可以很明显地看出, 所设计方法生成的数值结果拥有非常高的分辨率, 且保持陡峭的间断过渡, 这从侧面显示了方法的优势。



**Figure 2.** Numerical results of the example in Section 3.4 at  $t = 0.2$

**图 2.** 第 3.4 节例子在  $t = 0.2$  时的数值结果

## 4. 结论

在本文中, 我们针对管道中天然气流动模型开展了高精度方法的研究工作。该模型可经由带有源项的欧拉方程来刻画。我们针对此模型构造了高阶 well-balanced DG 方法。首先, 将原始控制方程表示为等价形式, 使得我们能够更方便地构造 well-balanced 数值流通量。然后, 借助一种新颖的源项离散, 得以精确保持针对流通量梯度的离散和源项离散二者之间的平衡。严格的理论分析以及广泛的数值结果均表明, 本方法保持 well-balanced 性质。更进一步, 该方法针对光滑解保持高阶精度, 基于相对粗网格可以有效捕捉针对定常状态的小扰动, 并且对于间断解保持陡峭的间断过渡。

## 致 谢

本研究得到了国家自然科学基金面上项目(No. 11771228)的资助。

## 参考文献

- [1] Dorao, C.A. and Fernandino, M. (2011) Simulation of Transients in Natural Gas Pipelines. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, **2**, 349-355. <https://doi.org/10.1016/j.jngse.2011.01.004>
- [2] Kosch, T., Hiller, B., Pfetsch, M.E. and Schewe, L. (2015) Evaluating Gas Network Capacities. SIAM, Philadelphia. <https://doi.org/10.1137/1.9781611973693>
- [3] Osiadacz, A.J. (1987) Simulation and Analysis of Gas Networks. Gulf Publishing Company, Houston.
- [4] Xing, Y.L., Zhang, X.X. and Shu, C.-W. (2010) Positivity-Preserving High Order Well-Balanced Discontinuous Galerkin Methods for the Shallow Water Equations. *Advances in Water Resources*, **33**, 1476-1493. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2010.08.005>
- [5] Bermudez, A., Lopez, X. and Elena Vazquez-Cendona, M. (2016) Numerical Solution of Nonisothermal Non-Adiabatic Flow of Real Gases in Pipelines. *Journal of Computational Physics*, **323**, 126-148. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.07.020>
- [6] Greenberg, J.M. and Leroux, A.Y. (1996) A Well-Balanced Scheme for the Numerical Processing of Source Terms in Hyperbolic Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **33**, 1-16. <https://doi.org/10.1137/0733001>
- [7] Greenberg, J.M., Leroux, A.Y., Baraille, R. and Noussair, A. (1997) Analysis and Approximation of Conservation Laws with Source Terms. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **34**, 1980-2007. <https://doi.org/10.1137/S0036142995286751>
- [8] Noelle, S., Xing, Y.L. and Shu, C.-W. (2010) High-Order Well-Balanced Schemes. In: Puppo, G. and Russo, G., Eds., *Numerical Methods for Balance Laws, Quaderni di Matematica*, Seconda Università di Napoli, Caserta, 1-64.
- [9] Xing, Y.L., Shu, C.-W. and Noelle, S. (2011) On the Advantage of Well-Balanced Schemes for Moving-Water Equilibria of the Shallow Water Equations. *Journal of Scientific Computing*, **48**, 339-349. <https://doi.org/10.1007/s10915-010-9377-y>
- [10] Cockburn, B., Karniadakis, G. and Shu, C.-W. (2000) The Development of Discontinuous Galerkin Methods. In: Cockburn, B., Karniadakis, G. and Shu, C.-W., Eds., *Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Part I: Overview, Vol. 11, Springer, Berlin, 3-50. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-59721-3>
- [11] Shu, C.-W. (2016) High Order WENO and DG Methods for Time-Dependent Convection Dominated PDEs: A Brief Survey of Several Recent Developments. *Journal of Computational Physics*, **316**, 598-613. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.04.030>
- [12] Cockburn, B., Li, F. and Shu, C.-W. (2004) Locally Divergence-Free Discontinuous Galerkin Methods for the Maxwell Equations. *Journal of Computational Physics*, **194**, 588-610. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.09.007>
- [13] Cockburn, B. and Shu, C.-W. (2001) Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems. *Journal of Scientific Computing*, **16**, 173-261.
- [14] Li, F. and Shu, C.-W. (2005) Locally Divergence-Free Discontinuous Galerkin Methods for MHD Equations. *Journal of Scientific Computing*, **22-23**, 413-442. <https://doi.org/10.1007/s10915-004-4146-4>
- [15] Aizinger, V. and Dawson, C. (2002) A Discontinuous Galerkin Method for Two-Dimensional Flow and Transport in Shallow Water. *Advances in Water Resources*, **25**, 67-84. [https://doi.org/10.1016/S0309-1708\(01\)00019-7](https://doi.org/10.1016/S0309-1708(01)00019-7)
- [16] Aureli, F., Maranzoni, A., Mignosa, P. and Ziveri, C.A. (2008) Weighted Surface-Depth Gradient Method for the Nu-

- merical Integration of the 2D Shallow Water Equations with Topography. *Advances in Water Resources*, **31**, 962-974. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2008.03.005>
- [17] Benkhaldoun, F., Elmahi, I. and Seaid, M. (2010) A New Finite Volume Method for Flux-Gradient and Source-Term Balancing in Shallow Water Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199**, 3224-3335. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.07.003>
- [18] Canestrelli, A., Siviglia, A., Dumbser, M. and Toro, E.F. (2009) Well-Balanced High-Order Centred Schemes for Non-Conservative Hyperbolic Systems. Applications to Shallow Water Equations with Fixed and Mobile Bed. *Advances in Water Resources*, **32**, 834-844. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2009.02.006>
- [19] Ern, A., Piperno, S. and Djadel, K. (2008) A Well-Balanced Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method for the Shallow-Water Equations with Flooding and Drying. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **58**, 1-25. <https://doi.org/10.1002/flid.1674>
- [20] Eskilsson, C. and Sherwin, S.J. (2004) A Triangular Spectral/hp Discontinuous Galerkin Method for Modelling 2D Shallow Water Equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **45**, 605-623. <https://doi.org/10.1002/flid.709>
- [21] Fagherazzi, S., Rasetarinera, P., Hussaini, Y.M. and Furbish, D.J. (2004) Numerical Solution of the Dam-Break Problem with a Discontinuous Galerkin Method. *Journal of Hydraulic Engineering*, **130**, 532-539. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2004\)130:6\(532\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2004)130:6(532))
- [22] Kesserwani, G. and Liang, Q.H. (2010) A Discontinuous Galerkin Algorithm for the Two-Dimensional Shallow Water Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199**, 3356-3368. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.07.007>
- [23] Kesserwani, G., Liang, Q., Vazquez, J. and Mose, R. (2010) Well-Balancing Issues Related to the RKDG2 Scheme for the Shallow Water Equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **62**, 428-448. <https://doi.org/10.1002/flid.2027>
- [24] Nair, R.D., Thomas, S.J. and Loft, R.D. (2005) A Discontinuous Galerkin Global Shallow Water Model. *Monthly Weather Review*, **133**, 876-888. <https://doi.org/10.1175/MWR2903.1>
- [25] Schwanenberg, D. and Harms, M. (2004) Discontinuous Galerkin Finite-Element Method for Transcritical Two-Dimensional Shallow Water Flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, **130**, 412-421. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2004\)130:5\(412\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2004)130:5(412))
- [26] Shu, C.-W. (1988) Total-Variation-Diminishing Time Discretizations. *SIAM Journal of Scientific Computing*, **9**, 1073-1084. <https://doi.org/10.1137/0909073>
- [27] LeVeque, R.J. and Bale, D.S. (1999) Wave Propagation Methods for Conservation Laws with Source Terms. In: Rolf Jeltsch, M.F., Ed., *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*, International Series of Numerical Mathematics, Vol. 130, Birkhuser, Basel, 609-618. [https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8724-3\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8724-3_12)
- [28] Xu, K., Luo, J. and Chen, S. (2010) A Well-Balanced Kinetic Scheme for Gas Dynamic Equations under Gravitational Field. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, **2**, 200-210. <https://doi.org/10.4208/aamm.09-m0964>
- [29] Luo, J., Xu, K. and Liu, N. (2011) A Well-Balanced Symplecticity-Preserving Gas-Kinetic Scheme for Hydrodynamic Equations under Gravitational Field. *SIAM Journal of Scientific Computing*, **33**, 2356-2381. <https://doi.org/10.1137/100803699>
- [30] Chandrashekar, P. and Klingenberg, C. (2015) A Second Order Well-Balanced Finite Volume Scheme for Euler Equations with Gravity. *SIAM Journal of Scientific Computing*, **37**, B382-B402. <https://doi.org/10.1137/140984373>
- [31] Xing, Y.L. and Shu, C.-W. (2013) High Order Well-Balanced WENO Scheme for the Gas Dynamics Equations under Gravitational Fields. *Journal of Scientific Computing*, **54**, 645-662. <https://doi.org/10.1007/s10915-012-9585-8>
- [32] Li, G. and Xing, Y.L. (2016) Well-Balanced Discontinuous Galerkin Methods for the Euler Equations under Gravitational Fields. *Journal of Scientific Computing*, **67**, 493-513. <https://doi.org/10.1007/s10915-015-0093-5>
- [33] Li, G. and Xing, X.L. (2016) High Order Finite Volume WENO Schemes for the Euler Equations under Gravitational Fields. *Journal of Computational Physics*, **316**, 145-163. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.04.015>