**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, 2021, 10(12), 4347-4351
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1012462

# Gauss-Weierstrass算子在Ba空间中的逼近阶

**钟　宇[1]，官心果[2]**

[1]云南民族大学数学与计算机科学学院，云南 昆明
[2]黔南民族师范学院数学与统计学院，贵州 都匀

收稿日期：2021年11月23日；录用日期：2021年12月17日；发布日期：2021年12月24日

## 摘　要

**借助Hardy-Littlewood极大函数、连续模为工具，在Ba空间中研究了Gauss-Weierstrass算子逼近问题，得到了有关二阶连续模的逼近阶。**

## 关键词

**Gauss-Weierstrass算子，Ba空间，连续模，逼近**

# The Approximation Order of Gauss-Weierstrass Operator in Ba Spaces

**Yu Zhong[1], Xinguo Guan[2]**

[1]School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan
[2]School of Mathematics and Statistics, Qiannan Normal University for Nationalities, Duyun Guizhou

Received: Nov. 23rd, 2021; accepted: Dec. 17th, 2021; published: Dec. 24th, 2021

## Abstract

**With the help of Hardy-Littlewood maximal function and continuous modulus as tools, the Gauss-Weierstrass operator approximation problem in Ba space is studied, and two approximation orders of the second order continuous moduli are obtained.**

## Keywords

**Gauss-Weierstrass Operator, Ba Space, Continuous Modulus, Approximation**

文章引用: 钟宇, 官心果. Gauss-Weierstrass 算子在 Ba 空间中的逼近阶[J]. 应用数学进展, 2021, 10(12): 4347-4351.
DOI: 10.12677/aam.2021.1012462

## 1. 引言和主要结果

$L_n(f,x)$ 算子是指：

$$L_n(f;x)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{-n(u-x)^2}{2}}f(u)\mathrm{d}u.$$

其中 $f(u)\in L_p(R)$ 且有界。

关于该 $L_n(f,x)$ 在 $L_p(R)$，Besov 以及 Orlicz 空间的研究已经有了很多的研究成果[1] [2] [3] [4]。本文在 $\mathrm{Ba}[0,1]$ 空间中研究了该算子的逼近问题。$\mathrm{Ba}[0,1]$ 空间是我国数学家，科学院院士丁夏畦引进的一类比较重要的函数空间[5]。

定义 设 $B=\{L_{p_1},L_{p_2},\cdots,L_{p_m},\cdots\}$ 是一列 Lebesgue 空间，$p_m>1(m=1,2,3,\cdots)$，$\alpha=\{a_1,a_2,\cdots,a_m,\cdots\}$ 是一个非负实数列。如果对于 $f(x)\in\bigcap_m L_{p_m}$，存在实数 $\alpha>0$，使得

$$I(f,\alpha)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\alpha^m\|f\|_{p_m}^m<+\infty,$$

则称 $f(x)\in\mathrm{Ba}$ 且定义

$$\|f\|_{Ba}=\inf\left\{\alpha>0:I\left(f,\frac{1}{\alpha}\right)\le 1\right\}$$

为函数 $f(x)$ 在 Ba 空间中的范数，Ba 空间中所定义的上述范数是完备的。

对于 $f(x)\in\mathrm{Ba}[0,1]$ 和 $t>0$，令 $f(x)$ 的二阶连续模为

$$\omega_2(f,t)_{Ba}=\sup_{0\le h\le t}\|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\|_{Ba}$$

在本文献中规定 $\alpha>0$，$C(s,q,\cdots)$ 表示仅与括号的字母有关的常数，$C$ 在不同地方代表不同的值。本文所得到的结果如下：

**定理 1** 设 $B=\{L_{p_1},L_{p_2},\cdots,L_{p_m},\cdots\}$ 是一列 Lebesgue 空间，$p_m>1(m=1,2,3,\cdots)$，$\alpha=\{a_1,a_2,\cdots,a_m,\cdots\}$ 是一个非负实数列。如果 $\left\{a_m^{\frac{1}{m}}\right\}\in l^\infty$，$\left\{a_m^{-\frac{1}{m}}\right\}\in l^\infty$，$p_0=\inf_m\{p_m\}>1$，则对 $f(x)\in\mathrm{Ba}[0,1]$ 和充分大的 $n$，有

$$\|L_n(f)-f\|_{Ba}\le C\left(\frac{1}{n}\|f\|_{Ba}+\omega_2\left(f,\frac{1}{n}\right)_{Ba}\right).$$

其中 $s=\inf_m\left\{a_m^{\frac{1}{m}}\right\}$，$q=\sup_m\left\{a_m^{\frac{1}{m}}\right\}$。

## 2. 若干引理

**引理 1** 若 $f\in L_p[0,1]$，则

$$\|L_n(f,x)\|_{L_p}\le\|f\|_{L_p}.$$

**证明：**根据文献[1]中引理 3.3，类似可证之。

**引理 2** $L_n(f;x)$ 是 $\mathrm{Ba}[0,1]\to\mathrm{Ba}[0,1]$ 的正有界线性算子，并且 $\|L_n\|\le\frac{2q}{s}(n=1,2,\cdots)$。

**证明：**对于 $f(x)\in\mathrm{Ba}[0,1]$，由文献[6]中定理 1 的证明知：$\|f\|_{p_m}\le\frac{1}{s}\|f\|_{Ba}$，有

$$\|L_n(f;\bullet)\|_{Ba}=\inf\left\{\alpha:\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m\|L_n(f;\bullet)\|_{p_m}^m}{\alpha^m}\le 1\right\}\le\inf\left\{\alpha:\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m\|f\|_{p_m}^m}{\alpha^m}\le 1\right\}$$

$$\le\inf\left\{\alpha:\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{\alpha^m}\frac{1}{s^m}\|f\|_{Ba}^m\le 1\right\}\le\inf\left\{\alpha:\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{q\|f\|_{Ba}}{\alpha s}\right)^m\le 1\right\}.$$

令 $\alpha=\frac{2q}{s}\|f\|_{Ba}$，则 $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{q\|f\|_{Ba}}{\alpha s}\right)^m=1$，根据 Ba 空间范数的定义可知

$$\|L_n(f;\bullet)\|_{Ba}\le\frac{2q}{s}\|f\|_{Ba}.$$

则有 $\|L_n\|\le\frac{2q}{s}(n=1,2,\cdots)$，引理 3 证毕。

**引理 3 [1]** 设 $A_m(n,x)=n^m\int_{-\infty}^{+\infty}W(n,x,u)(u-x)^m\,\mathrm{d}u$，则

$$A_{m+1}(n,x)=nmA_{m-1}(n,x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A_m(n,x).$$

$$A_0(n,x)=1,\ \ A_1(n,x)=0,$$

$$A_{2r+1}(n,x)=0,\ \ A_{2r}(n,x)=(2r-1)!!n^r.$$

**引理 4 [7]** 在定理 1 的条件下，对于 $f(x)\in\mathrm{Ba}[0,1]$，作 $f(x)$ 的 Hardy-Littlewood 控制函数

$$\theta_f(x)=\sup_{\substack{t\ne x\\0\le t\le 1}}\frac{1}{t-x}\int_x^t|f(u)|\mathrm{d}u,$$

则 $\theta_f(x)\in\mathrm{Ba}[0,1]$ 并满足

$$\|\theta_f(\bullet)\|_{p_m}\le\frac{2q}{s}\left(\frac{p_0}{p_0-1}\right)\|f\|_{Ba}.$$

**引理 5 [8]** 在定理 1 的条件下，对于 $f(x)\in\mathrm{Ba}[0,1]$，把有 $f(x)$ 延拓到区间 $[0,1]$ 外，使得当 $x\notin[0,1]$ 时，$f(x)=0$。引进 $f(x)$ 的 Steklov 平均数

$$f_r(x)=\frac{1}{2r^2}\int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}}\int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}}\left[f(x+u+v)+f(x-u-v)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

有

$$\|f_r(\bullet)-f(\bullet)\|_{Ba}\le\frac{q}{s}\omega_2(f,r)_{Ba},$$

$$\|f_r''\|_{Ba}\le\frac{q}{r^2s}\omega_2(f,r)_{Ba}.$$

**引理 6** 在定理 1 的条件下，对于 $f(x)\in \mathrm{Ba}[0,1]$，有

$$\left\|L_n(f_r)-f_r\right\|_{Ba}\le \frac{C(s,q,p_0)}{n}\left\|f_r''\right\|_{Ba}.$$

**证明：** 记 $f_r''(x)$ 的 Hardy-Littlewood 控制函数为

$$\theta_{f_r''}(x)=\sup_{\substack{u\ne x\\0\le t\le 1}}\frac{1}{u-x}\int_x^u\left|f_r''(v)\right|\mathrm{d}v,$$

根据 Taylor 展开式，对于 $x\in[0,1]$ 有

$$f_r(u)=f_r(x)+f_r'(x)(u-x)+\int_x^u f_r''(v)(u-v)\mathrm{d}v,(x<v<u).$$

则

$$f_r(u)-f_r(x)=f_r'(x)(u-x)+\int_x^u f_r''(v)(u-v)\mathrm{d}v,(x<v<u).$$

$$\begin{aligned}L_n(f_r;x)-f_r(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}W(n,x,u)\left(f_r'(x)(u-x)+\int_x^u f_r''(v)(u-v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{n}\times f_r'(x)\times\int_{-\infty}^{+\infty}nW(n,x,u)(u-x)\mathrm{d}u+\int_{-\infty}^{+\infty}W(n,x,u)\mathrm{d}u\int_x^u f_r''(v)(u-v)\mathrm{d}v\end{aligned}$$

根据引理 3 得

$$\begin{aligned}\left|L_n(f_r;x)-f_r(x)\right|&=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}W(n,x,u)\mathrm{d}u\int_x^u f_r''(v)(u-v)\mathrm{d}v\right|\\&\le\int_{-\infty}^{+\infty}W(n,x,u)\mathrm{d}u\int_x^u\left|f_r''(v)\right|(u-v)\mathrm{d}v\\&\le\theta_{f_r''}(x)\int_{-\infty}^{+\infty}W(n,x,u)(u-x)^2\mathrm{d}u\end{aligned}$$

结合引理 4 得

$$\left\|L_n(f_r)-f_r\right\|_{Ba}\le \frac{C(s,q,p_0)}{n}\left\|f_r''\right\|_{Ba}.$$

引理 5 证毕。

## 3. 定理的证明

**定理 1 之证明** 对于 $f(x)\in \mathrm{Ba}[0,1]$，由引理 2、5、6 得

$$\begin{aligned}\left\|L_n(f;x)-f\right\|_{Ba}&=\left\|L_n(f-f_r;x)-(f-f_r)+L_n(f_r;x)-f_r\right\|_{Ba}\\&\le\left\|L_n(f-f_r;x)\right\|_{Ba}+\left\|f-f_r\right\|_{Ba}+\left\|L_n(f_r;x)-f_r\right\|_{Ba}\\&\le\left(\frac{2q}{s}+1\right)\left\|f-f_r\right\|_{Ba}+\frac{C(s,q,p_0)}{n}\left\|f_r''\right\|_{Ba}\\&\le\left(\frac{2q}{s}+1\right)\left\|f-f_r\right\|_{Ba}+\frac{C(s,q,p_0)}{n}\left(\left\|f\right\|_{Ba}+\left\|f_r''\right\|_{Ba}\right)\\&\le C\left[\omega_2(f,r)_{Ba}+\frac{C(s,q,p_0)}{n}\left(\left\|f\right\|_{Ba}+\frac{4q\omega_2(f,r)_{Ba}}{r^2s}\right)\right]\end{aligned}$$

令 $r=\frac{1}{\sqrt{n}}$ 得

$$\left\| L_n\left( f;x \right) - f \right\|_{Ba} \le C\left( \frac{1}{n}\left\| f \right\|_{Ba} + \omega_2\left( f,\frac{1}{n} \right)_{Ba} \right).$$

定理 1 证毕。

## 参考文献


[1] 宣培才. 关于 Gauss-Weierstrass 算子的 Lp 逼近[J]. 工程数学学报, 1992(4): 47-52.

[2] 宣培才. 关于 Gauss-Weierstrass 算子线性组合的 Lp-逼近[J]. 浙江大学学报(自然科学版), 1992(2): 5-12.

[3] 官心果, 钟宇, 何翠玲, 吴晓刚. Besov 空间中 Gauss-Weierstrass 算子的正逆定理[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(10): 109-115.

[4] 官心果, 钟宇, 何翠玲. Gauss-Weierstrass 算子线性组合在 Orlicz 空间中的逼近[J]. 黔南民族师范学院学报, 2020, 40(4): 1-4.

[5] 丁夏畦, 罗佩珠. Ba 空间与 Laplace 算子的某些估计(英文) [J]. 系统科学与数学, 1981(1): 9-33.

[6] Chen, G.R. and Meng, B.Q. (1988) Interpolation of Ba Spaces. *Acta Mathematica Scientia*, **8**, 65-70. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(18)30476-4

[7] 吴嘎日迪, 陈广荣. Kantorovic 算子在 Ba 空间中的逼近阶[J]. 内蒙古师范大学学报: 自然科学汉文版, 1993(4): 1-7.

[8] 吴嘎日迪, 陈广荣. Ba 空间中 Kantorovich 算子的逼近[J]. 内蒙古师大学报(自然科学汉文版), 1996(1): 7-11.