Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(1), 22-27
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.111004

Hans汉斯

非线性奇异积分方程离散方程的一个混沌现象

梁　萍[1]，陈　娟[2]，刘　华[1]，王　宇[3]

[1]天津职业技术师范大学理学院，天津
[2]天津中德应用技术大学，天津
[3]上海立信会计金融学院，上海

收稿日期：2021年12月4日；录用日期：2021年12月25日；发布日期：2022年1月7日

摘　要

本文讨论一种非常系数的非线性奇异积分方程的特征方程的数值求解。先通过对核函数做Lagrange插值，再用奇异积分的HG求积公式对积分进行离散，从而得到原方程的离散方程。再对这个非线性的离散代数方程用迭代方法求解，探讨求解过程中出现的混沌现象。

关键词

非线性奇异积分方程，Lagrange插值，混沌现象

A Chaotic Phenomenon in Discrete Equations of Nonlinear Singular Integral Equations

Ping Liang[1], Juan Chen[2], Hua Liu[1], Yu Wang[3]

[1]College of Science, Tianjin University of Technology and Education, TUTE, Tianjin
[2]Tianjin Sino-German University of Applied Science, TSGUAS, Tianjin
[3]Shanghai Lixin College of accounting and Finance, SLCF, Shanghai

Received: Dec. 4th, 2021; accepted: Dec. 25th, 2021; published: Jan. 7th, 2022

Abstract

This paper deals with the numerical solution of the characteristic equation of a nonlinear singular integral equation with extraordinary coefficients. Firstly, the kernel function is interpolated by Lagrange, and then the integral is discretized by the HG quadrature formula of singular integral, so

文章引用: 梁萍, 陈娟, 刘华, 王宇. 非线性奇异积分方程离散方程的一个混沌现象[J]. 应用数学进展, 2022, 11(1): 22-27. DOI: 10.12677/aam.2022.111004

as to obtain the discrete equation of the original equation. Then the nonlinear discrete algebraic equation is solved by iterative method, and the chaotic phenomenon in the solution process is discussed.

Keywords

Nonlinear Singular Integral Equation, Lagrange Interpolation, Chaotic Phenomenon

1. 引言

虽然奇异积分方程的理论和应用研究历史很长，但它的数值解是一个困难的研究课题，有效的算法并不多[1]。路见可和杜金元在[2]中系统研究了奇异积分方程的配位法数值解法问题。与线性情形不同，即使非线性奇异积分方程的理论研究也不丰富，大部分研究集中在线性化后的局部分析，全局解的研究只能利用一些常规的非线性分析工具如 Schauder 不动点原理等。2002 年路见可讨论了一种特殊的非线性奇异积分方程[3]

$$a\varphi^2(\tau)+\frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+c=0,\ \ t\in L.$$

其中 L 为复平面的一条封闭光滑曲线，a、b、c 为常数。在 Hölder 连续函数空间求解 $\phi(t)$。路见可将此方程转化为一种带根号下的 Riemann 边值，从而给出了其全局解。过去几年对于非常系数的非线性奇异积分方程，也有了一些数值上的研究[4] [5]。

本文研究非线性奇异积分方程的配位法数值解过程中出现的一个混沌现象。令 L 为区间[−1, 1]。非线性积分方程的局部分析基于其局部线性化(包括端点附近)，其解在端点处的奇性和线性奇异积分方程的解类似。同时也为了消除 Gibs 现象，我们把未知函数做一个变换，即我们考虑非线性奇异积分方程

$$a(t)\phi^2(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\tau^2)\phi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=c(t). \tag{1}$$

2. 奇异积分的求积公式

为研究(1)的数值解，我们需要给出(1)中的奇异积分的求积公式。取[−1, 1]上 $n+1$ 个不同节点 x_i，$i=0,1,2,\cdots,n$。函数 $\varphi(x)$ 的插值为

$$L_n\varphi(x)=\sum_{i=0}^{n}\varphi(x_i)l_i(x_i)$$

其中

$$l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j},i=0,1,2,\cdots,n$$

为 Lagrange 插值基函数。

其中截断误差为

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),\ \xi\in(a,b)$$

采用 Lagrange 插值方法，把$t_1=-1$，$t_2=0$，$t_3=1$作为插值节点去离散方程(1)，通过计算能得到相应的非线性方程组。在给$a(t)$、$b(t)$、$c(t)$赋值求解相应方程组解的过程中，发现在一些情况下，编程求出的解的个数小于实际应有的解的个数，在利用迭代格式找解时，发现在某些点处图像出现分叉现象，猜想非线性奇异积分方程在某些点处存在混沌现象。

3. 预备知识

3.1. 非线性奇异积分方程

非线性奇异积分方程是指形如

$$a(t)\phi^2(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\phi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+c(t)=0.$$

的奇异积分方程，其中，系数$a(t)$、$b(t)$、$c(t)$均为多项式。本文是在区间[−1, 1]上进行讨论的，同时为了消除被积函数在端点−1、1 处的奇异性，在分子上添加项$(1-\tau^2)$，即形式(1)。

3.2. Lagrange 插值方法

Lagrange 插值方法是一种比较基础的求给定函数近似式的方法.其基本思想是，把插值多项式$L_n(x)$的构造问题转化成$n+1$个插值基函数的构造。具体来讲，通过平面上不同两点可以确定一条直线经过这两点，这就是 Lagrange 线性插值问题；对于不在同一条直线的三个点得到的插值多项式为抛物线；若连续函数$y=f(x)$在$[a,b]$上给定$n+1$个不同节点$x_i, i=0,1,2,\cdots,n$，构造通过这些节点的次数不超过n次的插值多项式$L_n(x)$，Lagrange 插值法的一般公式为

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)l_i(x)$$

其中

$$l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j},\ i=0,1,2,\cdots,n$$

称为 Lagrange 插值基函数，而且$l_i(x)$满足特征函数$l_i(x_k)$，即

$$l_i(x_k)=\begin{cases}1,\ k=j;\\ 0,\ k\neq j.\end{cases}\ (j,k=0,1,2,\cdots,n)$$

其中截断误差为

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),\ \xi\in(a,b)$$

3.3. 混沌

事实上，尽管混沌的定义很多，但其本质是一致的。在这里我们介绍的是 Devaney 关于混沌的定义。在此之前，我们需要一些术语。

设 $f:A\to A$ 是集合 A 的一个自映射。我们称 A 的子集 E 是不变集，如果 $f(E)\subset E$ 。

设 $E\subset A$ 是映射 $f:A\to A$ 的一个不变集合，则显然 E 中任意一点 a 的轨道均落在 E 之中。

我们称映射 $f:A\to A$ 在其不变集合 E 上的轨道是拓扑传递的，如果对于 E 中任意两点 a 和 b 及其各自的任意邻域 V_a 和 V_b ，都存在一个充分大的 n 使得 $f^n(V_a)\cap V_b\neq\varphi$ 。

假定 $E\subset A$ 是映射 $f:A\to A$ 的一个不变集合。如果存在一个正数 d_0，并且对于 E 中任意一点 a 及任意一个 $\delta>0$，都存在一个相应的点 $b\in E$ ，使得 $d(a,b)<\delta$ ，并且

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, d\left(f^n(a),f^n(b)\right)\geq d_0$$

则称映射 $f:A\to A$ 在集合 E 中的轨道，对初始值具有极端敏感依赖性。

现在，我们给出 Devaney 意义下的混沌的定义。

设 $f:A\to A$ 是集合 A 到自身的一个连续映射，其中 A 是 m 维欧式空间中的一个区域。又设 $E\subset A$ 是 f 的一个不变集合。若映射 $f:A\to A$ 在集合 E 上满足下列性质：

1) f 的周期点在 E 上是稠密的；

2) f 的跌倒轨道在 E 上具有拓扑传递性；

3) f 在 E 中的迭代轨道具有对初始值的敏感依赖性，则我们称 f 在 E 上的迭代轨道的行为是混沌的。

4. 离散方程

考虑非线性奇异积分方程

$$a(t)\phi^2(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\left(1-\tau^2\right)\phi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=c(t).$$

在区间[−1, 1]上，采用 Lagrange 插值方法，把 $t_1=-1$ ， $t_2=0$ ， $t_3=1$ 作为插值节点去离散方程(1)，通过计算得到如下方程组

$$\begin{cases}a(t)x^2+\dfrac{b(t)}{\pi}\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}y\right)=c(t),\\ a(t)y^2+\dfrac{b(t)}{\pi}\left(-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}z\right)=c(t),\\ a(t)z^2+\dfrac{b(t)}{\pi}\left(-\dfrac{4}{3}y-\dfrac{2}{3}z\right)=c(t).\end{cases} \tag{2}$$

在给 $a(t)$ 、 $b(t)$ 、 $c(t)$ 赋值的过程中，我们发现，当令 $a(t)=1$ ， $b(t)=300\pi$ ， $c(t)=x^2+2x+3$ 时，代入(2)得到如下三元二次方程组

$$\begin{cases}x^2+200x+400y-x^2-2x-3=0,\\ y^2-200x+200z-x^2-2x-3=0,\\ z^2-400y-200z-x^2-2x-3=0.\end{cases}\text{化简得}\begin{cases}198x+400y-3=0,\\ y^2-202x+200z-x^2-3=0,\\ z^2-400y-200z-x^2-2x-3=0.\end{cases}$$

通过计算机编程可以找到该方程组有解

$$\begin{cases}x=90.0448-0.0000\mathrm{i},\\ y=-44.5647+0.0000\mathrm{i},\\ z=1.2157\mathrm{e}{+}002-4.3520\mathrm{e}{-}015\mathrm{i}.\end{cases} \tag{3}$$

采用迭代式：

$$\begin{cases} x_{k+1} = -\dfrac{1}{198}\left(400y_k - 3\right), \\ y_{k+1} = \dfrac{1}{400}\left(z_k^2 - 200z_k - x_k^2 - 2x_k - 3\right), \\ z_{k+1} = -\dfrac{1}{200}\left(y_k^2 - 202x_k - x_k^2 - 3\right). \end{cases} \tag{4}$$

并取初值 $x = 0.2$，$y = 0.2$，$z = 0.2$，通过计算机编程发现迭代过程如下图 1 所示：

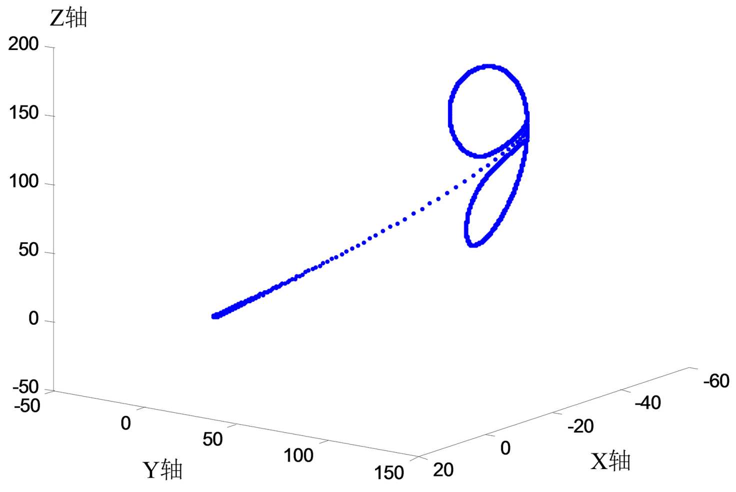

Figure 1. Iterative trajectory when initial value $x = 0.2$, $y = 0.2$, $z = 0.2$
图 1. 初值 $x = 0.2$，$y = 0.2$，$z = 0.2$ 时迭代轨迹

可以看到分叉点处恰好对应我们找到的一组解(3)；并且，通过对动态图象的观察，启发我们进一步去探索“非线性奇异积分方程可能在某些点处发生混沌现象”的想法。

稍微改变 x、y、z 的初始值，令 $x = 0.20001$，$y = 0.2$，$z = 0.2$ (黄色图像)以及 $x = 0$，$y = 0$，$z = 0$ (红色图像)，仍然采用上述迭代方法，将三种情况画在一张图上，如下图 2 所示：

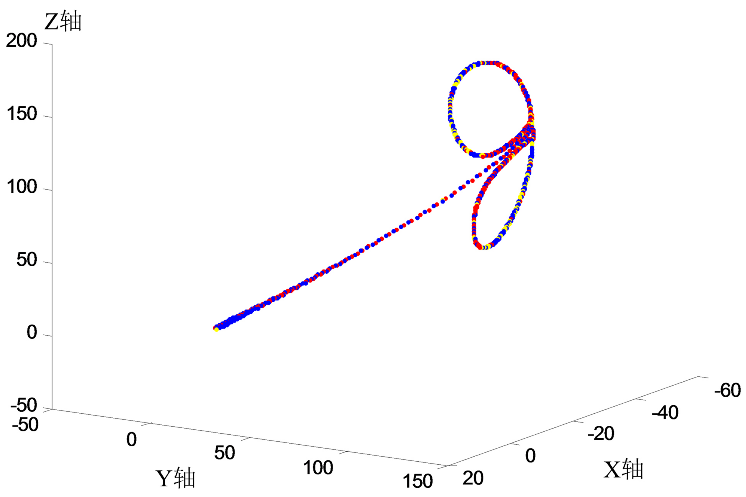

Figure 2. Iterative trajectory when initial value $x = 0.20001$, $y = 0.2$, $z = 0.2$
图 2. 初值 $x = 0.20001$，$y = 0.2$，$z = 0.2$ 时迭代轨迹

可以发现，当 x、y、z 的初始值稍微变化时，绘制出的图形形状非常接近。

5. 结束语

对于非线性奇异积分方程 $a(t)\phi^2(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\tau^2)\phi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=c(t)$ 来说，我们采用 Lagrange 插值方法去离散该方程，在给 $a(t)$、$b(t)$、$c(t)$ 赋值以求其解的过程中，迭代式的不同选取会导致其图像出现某些有意思的现象，这促使我们探讨非线性奇异积分方程的解与混沌现象之间是否存在某种关系。当迭代初始值产生微小变化时，尽管画出的图像形状很接近，但对应点的差别是巨大的，这说明迭代对初始值具有极端敏感依赖性；在迭代形式、初始值以及 $a(t)$、$c(t)$ 取值不变的情况下，改变 $b(t)$ 的值，迭代图像发生了我们想不到的复杂变化。在通过增加插值节点细化以上求解过程时，由于计算量的增加以及迭代形式选择的盲目性，导致我们的研究很难再进行下去，这也充分说明了非线性奇异积分方程求解的困难。

致　谢

感谢我的导师刘华老师对于我论文写作的悉心指导！

基金项目

天津市教委科研计划项目 2019KJ140。

参考文献

[1] Erdogan, F., Gupta, G.D. and Cook, T.S. (1973) Numerical Solution of Singular Integral Equations. Springer, Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2260-5_7

[2] 杜金元. 奇异积分数值解法[D]: [博士学位论文]. 武汉: 武汉大学, 1984.

[3] 路见可. 一种非线性奇异积分方程的解法[J]. 数学年刊, 2002, 23(5): 619-624.

[4] Sahu, P.K. (2016) Numerical Approximate Methods for Solving Linear and Nonlinear Integral Equations. PhD Thesis, NIT, Rourkela.

[5] Auer, F.K., Auzinger, W., Burkotová, J., *et al.* (2022) On Nonlinear Singular BVPs with Nonsmooth Data. Part 2: Convergence of Collocation Methods. *Applied Numerical Mathematics*, **171**, 149-175. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2021.08.016