

凯莱图上的消防员问题

韩进军^{1*}, 边红^{1†}, 于海征², 魏丽娜¹

¹新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

²新疆大学数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2021年12月24日; 录用日期: 2022年1月14日; 发布日期: 2022年1月26日

摘要

令 G 是 n 个顶点的连通图。假设火在图 G 的某一点 u 处燃起, 消防员选择一个未着火的顶点进行保护(一旦某个顶点被保护, 则在整个过程中都将处于被保护状态), 然后火蔓延到 u 的未加保护且没着火的邻点。依次下去, 火和消防员交替地在图 G 上移动, 直到火不能继续蔓延, 整个过程结束。本文主要讨论了模 n 剩余类加群 Z_n 在 $k(k \geq 2)$ 元逆闭子集的凯莱图上的消防员问题。首先考虑了凯莱图在二元逆闭子集上的消防员问题, 这部分确定了凯莱图的结构并且提出了结构算法和该算法的 *matlab* 语言; 其次研究了凯莱图在三元逆闭子集上的消防员问题, 这部分也确定了凯莱图的结构, 并且考虑了点存活率, 边存活率以及 *MVS* 问题; 最后研究了凯莱图在大于三元逆闭子集上的消防员问题, 这部分以点的标号顺序画出了凯莱图, 按逆闭子集的阶数把凯莱图并分为两类, 并考虑了凯莱图的任意一个顶点着火时, 一个消防员能控制火的充要条件。

关键词

消防员问题, 凯莱图, 逆闭子集, 存活率, 边存活率

The Firefighter Problem on Cayley Graph

Jinjun Han^{1*}, Hong Bian^{1†}, Haizheng Yu², Lina Wei¹

¹School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

* 第一作者。

† 通讯作者。

²College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Received: Dec. 24th, 2021; accepted: Jan. 14th, 2022; published: Jan. 26th, 2022

Abstract

Let G be a connected graph with n vertices. Assume that a fire breaks out at a vertex v of G . A firefighter chooses a set of k vertices not yet on fire to protect (once a vertex has been chosen by the firefighter, it is considered protected or safe from any further moves of the fire). The firefighter and the fire alternately move on the graph. The process ends when the fire can no longer spread. After the firefighter's move, the fire makes its move by spreading to all vertices which are adjacent to the vertices on fire, except for those that are protected. In this paper, we discuss the firefighter problems in the Cayley graphs of additive group of integers modulo n with the k -element ($k \geq 2$) inverse closed subset. Firstly we consider the firefighter problems on the 2-element inverse closed subset of Cayley graph, which determines the structure of Cayley graph and puts forward the structure algorithm and the *matlab* language of the algorithm. Secondly, we study the firefighter problems on the 3-element inverse closed subset of Cayley graph, which also determines the structure of Cayley graph and considers surviving rate, edge surviving rate and *MVS* problem. Finally, we discuss the firefighter problems on the k -elements ($k \geq 4$) inverse closed subset of Cayley graph, in which we draw the Cayley graph in order of points, and divide the Cayley graph into two categories according to the order of the inverse closed subset. Moreover, while any vertex of Cayley graph is on fire, we consider the sufficient and necessary conditions that a firefighter can control the fire.

Keywords

Firefighter Problem, Cayley Graph, Inverse Closed Subset, Surviving Rate, Edge Surviving Rate

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

加拿大 Manitoba 举办的第 25 届组合数学与计算大会上, 著名计算机理论学家 Hartnell 提出了消防员问题(Firefighter Problem) [1]. 为了研究图的结构与图的防火能力之间的关系, Cai, Wang [2] 提出了图的存活率的概念.

定义 1 [2] 设 G 是一个有 n 个顶点的连通图, $v \in V(G)$. 当火在 v 处燃起时, k 个消防员最多能保护的顶点数称为顶点 v 的 k -存活数, 记为 $sn_k(v)$; 当火随机地在图 G 的一个顶点处燃起时, k 个消防员最多能保护的顶点数的平均值称为图 G 的存活率, 记为 $\rho_k(G)$, 即

$$\rho_k(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} sn_k(v)}{n^2}.$$

F.Stephen 和 M.Gary 在 [3] 中提到了 MVS 概念.

定义 5 [3] 设 G 是一个图, v 是图 G 中的任意一个顶点, 当 v 做为着火点, 用 d 个消防员通过所有的方式去控制 v 所能保护图 G 中不被燃烧的最大顶点数记为 $MVS(G, v; d)$.

随后王维凡等在文献 [4] 中证明了, 对于任意的正整数 $k \geq 1$, 几乎所有图族的 k -存活率都是趋于 0 的. 因此, 寻找 k -存活率严格大于 0 的图类是很有意义的. 从而很自然地有下面的问题: 哪些图类的 k -存活率大于某个常数? 针对这一问题, 王维凡等定义了下面两类重要的图.

定义 3 [4] 如果存在常数 c , 使得 $\rho_k(G) \geq c > 0$, 则图 G 称为 k -好的.

定义 4 [4] 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_k(G) = 1$, 则图 G 称为 k -优的.

2012年, 王维凡等又在文献 [5] 中提出了边存活率的概念.

定义 2 [5] 设 G 是一个有 n 个顶点 m 条边的连通图, $uv \in E(G)$. 当火在边 uv 的两个端点燃起时, 消防员采取第一步保护 k_1 个点, 后面每步保护 k_2 个点的策略所能救下的最大顶点数记为 $sn(G, uv; (k_1, k_2))$; 当火随机地在图 G 的一条边的两个端点燃起时, 消防员采取第一步保护 k_1 个点, 后面每步保护 k_2 个点的策略最多能保护的顶点数的平均值称为图 G 的边存活率, 记为 $\rho(G, e; (k_1, k_2))$, 即

$$\rho(G, e; (k_1, k_2)) = \frac{\sum_{uv \in E(G)} sn(G, uv; (k_1, k_2))}{nm}.$$

消防员问题在有限图和无限图上相继展开研究, 无限图主要考虑了格子图. 凯莱图是以给定群中元素做为图的顶点, 利用代数中群的子集而构造的一种图. 如果群是无限群, 则对应凯莱图也是无限的.

定义 6 设 Γ 是一个群, S 是群 Γ 中元素构成的集合并且群 Γ 中的单位元不在 S 中, 以群 Γ 中所有元素作为顶点集, 满足下列条件的图称为凯莱图, 记为 $CG(\Gamma, S)$:

- 1) 如果 $\forall x, y \in \Gamma$, 有 $yx^{-1} \in S$, 则 x 与 y 两点之间通过弧头为 y 弧尾为 x 的一条弧连接;
- 2) 如果 $\forall x, y \in \Gamma$, 有 $yx^{-1} \in S$ 且 $xy^{-1} \in S$, 则 x 与 y 两点之间通过一条边连接.

定义 7 设 G 是一个群, S 是群 G 中元素构成的集合并且群 G 中的单位元不在 S 中, 如果 $\forall a \in S$,

有 $a^{-1} \in S$, 则称 S 为逆闭的.

本文从凯莱图出发, 讨论了逆闭子集上凯莱图的消防员问题.

2. 主要结果

2.1. 凯莱图在二元逆闭子集上的消防员问题

为了画出凯莱图, 解决凯莱图在二元逆闭子集上的消防员问题, 我们先提出下面的定理.

定理 1 设 $S = \{\bar{a}, \bar{b}\} (a < b \text{ 且 } \bar{a}^{-1} = \bar{b})$ 是 Z_n 上的二元逆闭子集, C_d^c 表示第 c 个 d 长圈, $n = l * m (l \leq m)$, 根据不同的 a 得到对应的凯莱图 $CG(Z_n, S)$ 如下;

- 1) 当 $a = l$ 时, $CG(Z_n, S)$ 是 $\bigcup_{k=1}^l C_m^k$, 且 $\forall C_m^{k_i} \cap C_m^{k_j} = \emptyset (k_i \neq k_j, k_i, k_j = 1, 2, \dots, l)$.
- 2) 当 $a = m$ 时, $CG(Z_n, S)$ 是 $\bigcup_{k=1}^m C_l^k$, 且 $\forall C_l^{k_i} \cap C_l^{k_j} = \emptyset (k_i \neq k_j, k_i, k_j = 1, 2, \dots, m)$.
- 3) 若存在 $Max\ l$, 使 $a = \lambda Max\ l (\lambda \in Z^+)$, 则 $CG(Z_n, S)$ 是 $\bigcup_{k=1}^l C_m^k$, 且 $\forall C_m^{k_i} \cap C_m^{k_j} = \emptyset (k_i \neq k_j, k_i, k_j = 1, 2, \dots, l)$.
- 4) 若存在 $Max\ m$, 使 $a = \lambda Max\ m (\lambda \in Z^+)$, 则 $CG(Z_n, S)$ 是 $\bigcup_{k=1}^m C_l^k$, 且 $\forall C_l^{k_i} \cap C_l^{k_j} = \emptyset (k_i \neq k_j, k_i, k_j = 1, 2, \dots, m)$.
- 5) 若存在 $Max\ l$ 和 $Max\ m$, 使 $a = \lambda_1 Max\ l = \lambda_2 Max\ m (\lambda_1, \lambda_2 \in Z^+)$, 则 $CG(Z_n, S)$ 是 $\bigcup_{k=1}^m C_l^k$, 且 $\forall C_l^{k_i} \cap C_l^{k_j} = \emptyset (k_i \neq k_j, k_i, k_j = 1, 2, \dots, m)$.
- 6) 若 a 不满足以上五种情况, 那么 a 对应的凯莱图 $CG(Z_n, S)$ 是 C_n .

从上面的定理可以看到二元逆闭子集 S 在 Z_n 上的凯莱图是一个 n 长圈, 或者是一些相同圈长并且圈长大于二的圈的不交并. 若 Z_n 固定, n 长圈形成的凯莱图与一些相同圈长并且圈长大于二的圈的不交并形成的凯莱图, 对于一个火发生于凯莱图的任意一个顶点, 用一个消防员去保护得到的结果都是相同的, 圈上的消防员问题在 [3]里已讨论. 为了验证上述定理, 我们给出如下算法, 任给二元集 $S = \{\bar{a}, \bar{b}\} (a < b \text{ 且 } \bar{a}^{-1} = \bar{b})$, 固定 Z_n 中元素的个数 n , 该算法都能求出对应二元集 $S = \{\bar{a}, \bar{b}\} (a < b \text{ 且 } \bar{a}^{-1} = \bar{b})$ 下的凯莱图.

设 $CG(Z_n, S)$ 是 Z_n 在二元逆闭子集 $S = \{\bar{a}, \bar{b}\} (a < b \text{ 且 } \bar{a}^{-1} = \bar{b})$ 上的凯莱图, $C_{CG(Z_n, S)}$ 是凯莱图连通分支的点数, $C(CG(Z_n, S))$ 是凯莱图的连通分支数.

输入 $n, S\{a, b\}$ (若 n 为奇数则 $a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, 若 n 为偶数则 $a \leq \frac{n}{2} - 1$)

输出 $CG(Z_n, S), C_{CG(Z_n, S)}, C(CG(Z_n, S))$

由 $ia < n$ 确定 $Max\ i$ 和序列 $0, ia (i \in Z^+, i < Max\ i)$

如果 $Max\ ia = b$, 输出序列 $0, ia, b$

$$i0 = 1 \tag{1}$$

$$ia = i + 1$$

$$b = Max\ i + 1$$

$$\text{如果 } 1 * (Max\ i + 1) = n$$

输出 $CG(Z_n, S) = \{0, ia, b\}; C_{CG(Z_n, S)} = \text{Max } i + 1; C(CG(Z_n, S)) = 1$

否则返回(1), 直到存在 $m(m \in Z^+)$, 使得 $m * (\text{Max } i + 1) = n$

输出 $CG(Z_n, S) = \{0, ia, b\}, \{1, ia + 1, b + 1\} \cdots \{m - 1, ia + m - 1, b + m - 1\};$

$C_{CG(Z_n, S)} = \text{Max } i + 1; C(CG(Z_n, S)) = m$

否则由 $\text{Max } ia - b + j_1 a < n$, 确定 $\text{Max } j_1 (j_1 \in N, j_1 < \text{Max } j_1, i \leq \text{Max } i)$

和序列 $0, ia, \text{Max } ia - b + j_1 a$ (2)

如果 $\text{Max } ia - b + \text{Max } j_1 a = b$, 输出序列 $0, ia, \text{Max } ia - b + j_1 a, b$

记 $0 = 1$ (3)

$ia = i + 1$

$\text{Max } ia - b + j_1 a = \text{Max } i + j_1 + 1$

$b = \text{Max } i + \text{Max } j_1 + 1 + 1$

如果 $1 * (\text{Max } i + \text{Max } j_1 + 1 + 1) = n$

输出 $C_{CG(Z_n, S)} = \{0, ia, \text{Max } ia - b + j_1 a, b\};$

$C_{CG(Z_n, S)} = \text{Max } i + \text{Max } j_1 + 1 + 1; C(CG(Z_n, S)) = 1$

否则返回(3), 直到存在 $m(m \in Z^+)$, 使得 $m * (\text{Max } i + \text{Max } j_1 + 1 + 1) = n$

输出 $CG(Z_n, S) = \{0, ia, \text{Max } ia - b + j_1 a, b\}, \{1, ia + 1, \text{Max } ia - b + j_1 a + 1, b + 1\} \cdots \{m - 1, ia + m - 1, \text{Max } ia - b + j_1 a + m - 1, b + m - 1\};$

$C_{CG(Z_n, S)} = \text{Max } i + \text{Max } j_1 + 1 + 1; C(CG(Z_n, S)) = m$

否则返回(2), 直到存在 $\text{Max } j_p$ 使得

$\text{Max } ia - b + \text{Max } j_1 a - b + \text{Max } j_2 a - b + \cdots + \text{Max } j_p a = b (j_p \in N, j_p < \text{Max } j_p)$

输出序列 $0, ia, \text{Max } ia - b + j_1 a, \cdots, \text{Max } ia - b + \text{Max } j_1 a - b + \cdots + j_p a, b$

记 $0 = 1$ (4)

$ia = i + 1$

$\text{Max } ia - b + j_1 a = \text{Max } i + j_1 + 1$

$\text{Max } ia - b + \text{Max } j_1 a - b + \cdots + j_p a = \text{Max } i + \text{Max } j_1 + \cdots + j_p$

$b = \text{Max } i + \text{Max } j_1 + \cdots + \text{Max } j_p + p + 1$

如果 $1 * (\text{Max } i + \text{Max } j_1 + \cdots + \text{Max } j_p + p + 1) = n$

输出 $C_{CG(Z_n, S)} = \{0, ia, \text{Max } ia - b + j_1 a, \cdots, \text{Max } ia - b + \text{Max } j_1 a - b + \cdots + j_p a, b\}; C_{CG(Z_n, S)} = \text{Max } i + \text{Max } j_1 + \cdots + \text{Max } j_p + p + 1;$

$$C(CG(Z_n, S)) = 1$$

否则返回(4), 直到存在 $m(m \in Z^+)$, 使得 $m * (Max\ i + Max\ j_1 + \dots + Max\ j_p + p + 1) = n$

输出 $CG(Z_n, S) = \{0, ia, Max\ ia - b + j_1a, \dots, Max\ ia - b + Max\ j_1a - b + \dots + j_pa, b\}, \{1, ia + 1, Max\ ia - b + j_1a + 1, \dots, Max\ ia - b + Max\ j_1a - b + \dots + j_pa + 1, b + 1\} \dots \{m - 1, ia + m - 1, Max\ ia - b + j_1a + m - 1, \dots, Max\ ia - b + Max\ j_1a - b + \dots + j_pa + m - 1, b + m - 1\}$;

$$C_{CG(Z_n, S)} = Max\ i + Max\ j_1 + Max\ j_2 + \dots + Max\ j_p + p + 1;$$

$$C(CG(Z_n, S)) = m.$$

在这个算法的基础上, 我们实现了该算法的matlab语言.

设 CZ_nXS 是 Z_n 在二元逆闭子集 $S = \{\bar{a}, \bar{b}\} (a < b \text{ 且 } \bar{a}^{-1} = \bar{b})$ 上的凯莱图, CcZ_nXS 是凯莱图连通分支的点数, CCZ_nXS 是凯莱图的连通分支数, \square 表示需输入的 n 和 a .

输入 n, a, b (若 n 为奇数则 $a \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, 若 n 为偶数则 $a \leq \frac{n}{2} - 1$)

输出 CZ_nXS, CcZ_nXS, CCZ_nXS

$CZ_nXS=0; CcZ_nXS=0; CCZ_nXS=0;$

$n=\square; a=\square; b=n-a; c=\text{mod}(b,a);$

if $c==0;$

$\text{Max}(1)=\text{fix}((n-0.001)/a)$

end

$i=0;$

while ($c=0$)

$i=i+1;$

$\text{Max}(i+1)=\text{fix}((b+c-0.001)/a);$

$\text{Max}(1)=\text{fix}((n-0.001)/a);$

$c=\text{mod}(b+c,a);$ end

$i;$ % 确定需要用到Maxj几.

$\text{Max};$ %Maxi,Maxj.

$d=0;$ %1*(d).

for $j = 1:i+1$

$d=d+\text{Max}(j)+1;$

end % 计算1*(d)等于多少.

$d;j=1;$

while ($j*d = n$)

$j=j+1;$

```

end
j; dj=[0];           % 确定多少*(d)=n.
for y = 1:1:Max(1)
    dj=[dj,y*a];
end
b=b+c;
for x = 1:1:i

    abc=0;           %abc 为任意命名的中间变量.
    for z = 1:1:x
        abc=abc+Max(z)*a-b;
    end
    for y = 0:1:Max(x+1)
        dj=[dj,y*a+abc];
    end
end
dj=[dj];der=dj;     %der 为任意命名的中间变量.
for p=2:1:j
    dj=[dj,der+(p-1)];
end
CZnXS=dj,CcZnXS=d,CCZnXS=j.

```

2.2. 凯莱图在三元逆闭子集上的消防员问题

定理 2 设 $CG(Z_n, S)$ 是 Z_n 在三元逆闭子集 $S = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} (\bar{a}^{-1} = \bar{c}, \bar{b}^{-1} = \bar{b}, a < b < c)$ 上的凯莱图, d 是 n, a, b, c 四个数的最大公因数.

(1) 在三元集 $\{\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\}$ 中, 若 $\frac{a}{d}, \frac{c}{d}$ 是奇数且 $|\frac{a}{d} - \frac{b}{d}| \neq 1, |\frac{b}{d} - \frac{c}{d}| \neq 1$, 则对应的 $CG(Z_n, S)$ 能画为 d 个图 1 的不交并.

(2) 在三元集 $\{\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\}$ 中, 若 $\frac{a}{d}, \frac{c}{d}$ 是偶数且 $|\frac{a}{d} - \frac{b}{d}| \neq 1, |\frac{b}{d} - \frac{c}{d}| \neq 1$, 则对应的 $CG(Z_n, S)$ 能画为 d 个图 2 的不交并.

(3) 在三元集 $\{\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\}$ 中, 若 $|\frac{a}{d} - \frac{b}{d}| = 1, |\frac{b}{d} - \frac{c}{d}| = 1$, 则对应的 $CG(Z_n, S)$ 能画为 d 个图 3 的不交并.

类比二元逆闭子集上凯莱图的结构算法, 我们容易得到三元逆闭子集上凯莱图的结构算法. 图 1 和图 2 在三元逆闭子集上的结构算法类似于二元逆闭子集, 图 3 在三元逆闭子集上的结构算法需要把二元逆闭子集算法中的 a 换为凯莱图的点数 n 和 a, b, c 这四个数的最大公因数, 这里我们主

要考虑三元逆闭子集 $S = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} (\bar{a}^{-1} = \bar{c}, \bar{b}^{-1} = \bar{b}, a < b < c)$ 上的消防员问题. 因为图 1, 图 2, 图 3 是对应三元逆闭子集 S 上的凯莱图, 从而无需定义这三种图. 下面我们画出 14 个点的这三种图, 图 1, 图 2, 图 3, 对应的 S 集分别是 $\{\bar{1}, \bar{7}, \bar{13}\}, \{\bar{2}, \bar{7}, \bar{12}\}, \{\bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$, 为了方便画图, 我们记图的顶点 \bar{i} 为 $i (i \in N, i < n)$.

命题 1 [6] 设 G 是一个 r 正则图, 若一个火在图 G 中燃烧, 则 $r-1$ 个消防员可以在两个时间单位内控制这个火, 燃烧顶点的最小数目为 2.

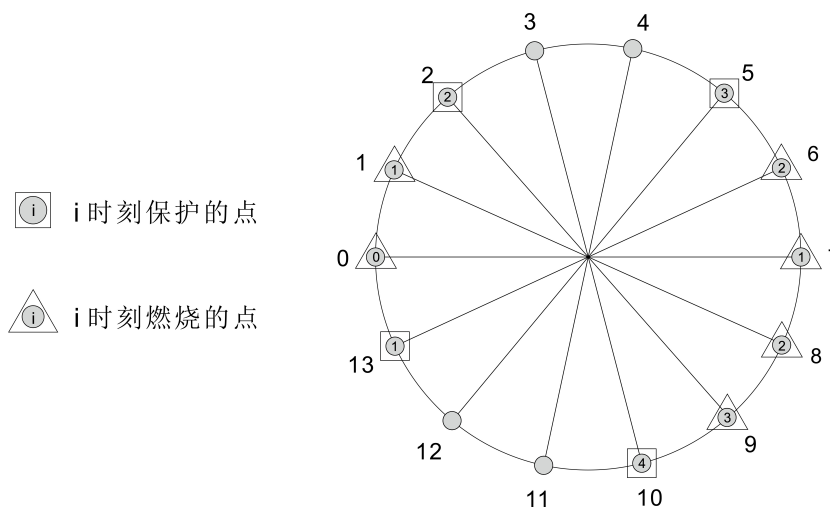


Figure 1. Cayley Graph $CG(Z_{14}, \{\bar{1}, \bar{7}, \bar{13}\})$

图 1. 凯莱图 $CG(Z_{14}, \{\bar{1}, \bar{7}, \bar{13}\})$

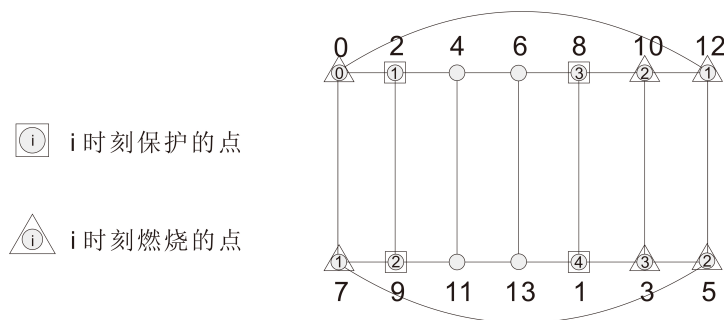


Figure 2. Cayley Graph $CG(Z_{14}, \{\bar{2}, \bar{7}, \bar{12}\})$

图 2. 凯莱图 $CG(Z_{14}, \{\bar{2}, \bar{7}, \bar{12}\})$

我们可以看到三元逆闭子集 $S = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} (\bar{a}^{-1} = \bar{c}, \bar{b}^{-1} = \bar{b}, a < b < c)$ 上的凯莱图是三正则图, 由命题 1, 我们可以得出一个火在三元逆闭子集 S 上的凯莱图中燃烧, 2 个消防员可以在两个时间单位内控制这个火, 燃烧顶点的最小数目为 2, 下面我们考虑一个火在三元逆闭子集 S 上的凯莱图中燃烧, 1 个消防员去控制的情况.

定理 3 设 $CG(Z_n, S)$ 是 Z_n 在三元逆闭子集 $S = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} (\bar{a}^{-1} = \bar{c}, \bar{b}^{-1} = \bar{b}, a < b < c)$ 上的凯莱图, 对 $n > 6$, 有 $MVS(CG(Z_n, S), v; 1) \geq n - 6$.

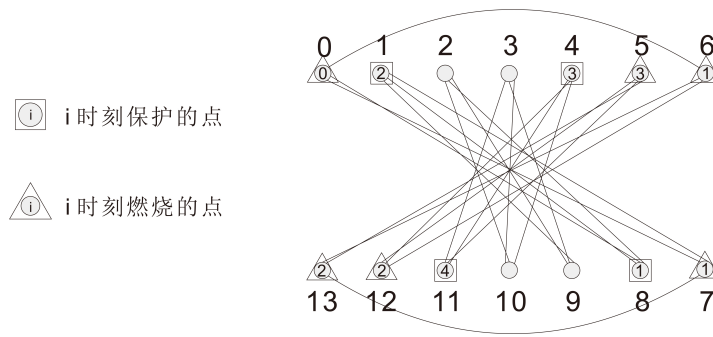


Figure 3. Cayley Graph $CG(Z_{14}, \{\bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\})$

图 3. 凯莱图 $CG(Z_{14}, \{\bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\})$

证明: 设 d 是 n, a, b, c 四个数的最大公因数, 若 $d = 1$, 当 $n = 8$ 时, 有 $MVS(CG(Z_8, S), v; 1) = 3 > 8 - 6 = 2$, 当 $n > 8$ 时, $n = 14$ 与 n 无限大效果一样, 对图 1, 图 2, 图 3, 可以建立类似上图中的四面防火墙使火无法蔓延到未着火的其余顶点, 因为图 1, 图 2, 图 3, 具有传递性, 因此只考虑一个点的着火情况. 假定图 1, 上 0 点着火, 所有控制火的方法见树状图图 4. 若 $d \neq 1$, 对 $n > 6$, 显然一个火只能发生在 $CG(Z_n, S)$ 的某个连通分支上, 如果连通分支的点数小于 6, 结论显然成立. 如果大于 6, 讨论方法同 $d = 1$, 综上对 $n > 6$, $MVS(CG(Z_n, S), v; 1) \geq n - 6$.

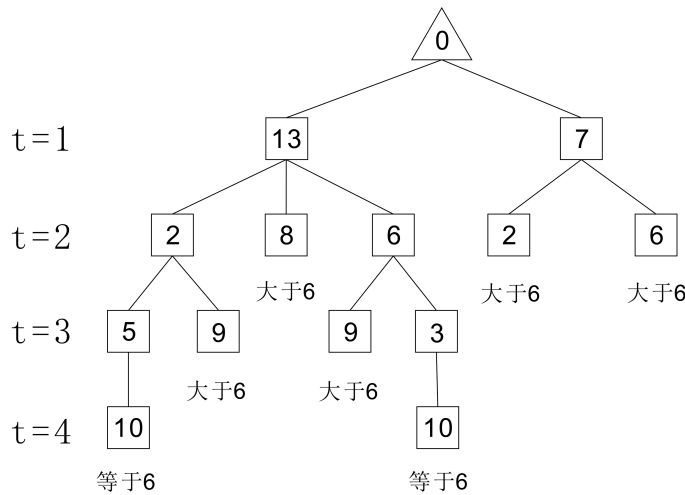


Figure 4. A tree chart that controls a fire at 0

图 4. 控制 0 点着火的树状图

定理 4 设 $CG(Z_n, S)$ 是 Z_n 在三元逆闭子集 $S = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} (\bar{a}^{-1} = \bar{c}, \bar{b}^{-1} = \bar{b}, a < b < c)$ 上的凯莱图, 则 $CG(Z_n, S)$ 是 1- 优的.

证明: 由定理 3 可知, $\frac{n(n-6)}{n^2} \leq \rho(CG(Z_n, S)) \leq 1$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-6)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{6}{n} = 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(CG(Z_n, S)) = 1$.

定理 5 设 $CG(Z_n, S)$ 是 Z_n 在三元逆闭子集 $S = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} (\bar{a}^{-1} = \bar{c}, \bar{b}^{-1} = \bar{b}, a < b < c)$ 上的凯莱图, 则 $CG(Z_n, S)$ 是 1- 好的.

证明: 由定理 4, 因为 $\rho(CG(Z_n, S)) \geq \frac{n(n-6)}{n^2} = 1 - \frac{6}{n}$, $n > 6$, 故要使存在常数 c 使得 $\rho(CG(Z_n, S)) \geq c > 0$, 只需取 $n = 8$, 从而 $c = \frac{1}{4}$.

定理 6 设 $CG(Z_n, S)$ 是 Z_n 在三元逆闭子集 $S = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} (\bar{a}^{-1} = \bar{c}, \bar{b}^{-1} = \bar{b}, a < b < c)$ 上的凯莱图, 对 $n > 8$ 有 $\rho(CG(Z_n, S), e; (1, 1)) \geq 1 - \frac{8}{n}$.

证明: 类似于定理 3 的证明可以建立控制一条边着火每个时间单位用一个消防员去控制火的所有方法的树状图, 可以得出凯莱图的任意一条边着火, 最多可以燃烧 8 个点, 所以 $\rho(CG(Z_n, S), e; (1, 1)) = \frac{\sum_{uv \in E(G)} sn(CG(Z_n, S), uv; 1)}{nm} \geq \frac{\frac{3}{2}n(n-8)}{\frac{3}{2}nn} = 1 - \frac{8}{n}$.

2.3. 凯莱图在大于三元逆闭子集上的消防员问题

在大于三元逆闭子集上, 我们把对应的凯莱图按逆闭子集的阶数分为奇数元和偶数元两种, 对应凯莱图的画法按点的标号顺序只画为一种, 例如图 5, 有 20 个点, 对应 S 集是 $\{(\bar{1}, \bar{19}), (\bar{2}, \bar{18})\}$; 图 6, 有 40 个点, 对应 S 集是 $\{(\bar{1}, \bar{39}), (\bar{2}, \bar{38}), \bar{20}\}$, 同样为了画图方便, 我们记图的顶点 \bar{i} 为 $i (i \in N, i < n)$, 另外为了叙述下面定理, 定义防火墙的厚度是构成防火墙的消防员人数.

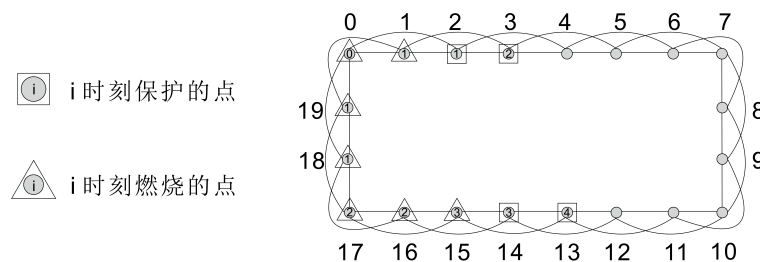


Figure 5. Cayley Graph $CG(Z_{20}, \{(\bar{1}, \bar{19}), (\bar{2}, \bar{18})\})$

图 5. 凯莱图 $CG(Z_{20}, \{(\bar{1}, \bar{19}), (\bar{2}, \bar{18})\})$

定理 7 设 $CG(Z_n, S)$ 是 Z_n 在大于三元逆闭子集 $S = \{(\bar{a}_1, \bar{b}_1), (\bar{a}_2, \bar{b}_2), \dots, (\bar{a}_i, \bar{b}_i)\} (\bar{a}_j^{-1} = \bar{b}_j, a_j < b_j, j = 1, 2, \dots, i)$ 上的凯莱图, 如果凯莱图的任意一个顶点着火, 那么一个消防员需要建立两面厚度为 $Max \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ 的防火墙来控制火不会蔓延到其余未着火的顶点.

证明: 因为大于三元逆闭子集 $S = \{(\bar{a}_1, \bar{b}_1), (\bar{a}_2, \bar{b}_2), \dots, (\bar{a}_i, \bar{b}_i)\} (\bar{a}_j^{-1} = \bar{b}_j, j = 1, 2, \dots, i)$ 上的凯莱图, 都可以画为图 5 的形式, 根据凯莱图的传递性, 我们只考虑一个顶点着火的情况, 假设 0 着火, 由图 5, 火只能从 0 两边蔓延, 设 ab 是凯莱图的一条边, $d(a, b) = |a - b|$ 是点 a 到点 b 的距离, 因为凯莱图中任意两点 a, b 的距离小于等于 $Max d(a, b) = Max \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$, 因此如果建立一面厚度为 $Max \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ 的防火墙时, 一个与防火墙相邻的着火顶点是跳不出这面墙的, 从而 0 到邻墙着火点中间的所有着火点也跳不出这面墙, 又火是从 0 两边蔓延的, 从而必须建立另一面厚度为 $Max d(a, b) = Max \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ 的防火墙才足以控制火不会蔓延到其余未着火的顶点.

定理 8 设 $CG(Z_n, S)$ 是 Z_n 在大于三元逆闭子集 $S = \{(\bar{a}_1, \bar{b}_1), (\bar{a}_2, \bar{b}_2), \dots, (\bar{a}_i, \bar{b}_i), \frac{n}{2}\} (\frac{n}{2}^{-1} = \frac{n}{2}, \bar{a}_j^{-1} = \bar{b}_j, a_j < b_j, j = 1, 2, \dots, i)$ 上的凯莱图, 如果凯莱图的任意一个顶点着火, 那么一个消防员需要建立四面厚度为 $Max \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ 的防火墙来控制火不会蔓延到其余未着火的顶点.

证明: 类似于定理 7 的证明, 根据图 6, 要证明定理 8, 只需证要建立四面防火墙来控制火不会蔓延到其余未着火的顶点. 依然假设 0 着火, 因为 0 着火会导致 0 两边和 $\frac{n}{2}$ 两边着火, 因此我们先得建

立0上边(下边)的临时防火墙, 进而建立 $\frac{n}{2}$ 下边(上边)的防火墙, 然后根据 $\frac{n}{2}$ 下边(上边)的防火墙来决定0上边(下边)的最终防火墙, 接下来建立0下边(上边)的临时防火墙, 之后建立 $\frac{n}{2}$ 上边(下边)的防火墙, 最后根据 $\frac{n}{2}$ 上边(下边)的防火墙来决定0下边(上边)的最终防火墙, 因此要建立四面防火墙来控制火不会蔓延到其余未着火的顶点.

上述定理给出了控制火的总的结果, 但是是否对任意大于三元逆闭子集 S 上任意个顶点的凯莱图在凯莱图的任意一个顶点着火时都能用一个消防员来控制火还是未知的, 下面的内容就考虑了这些问题.

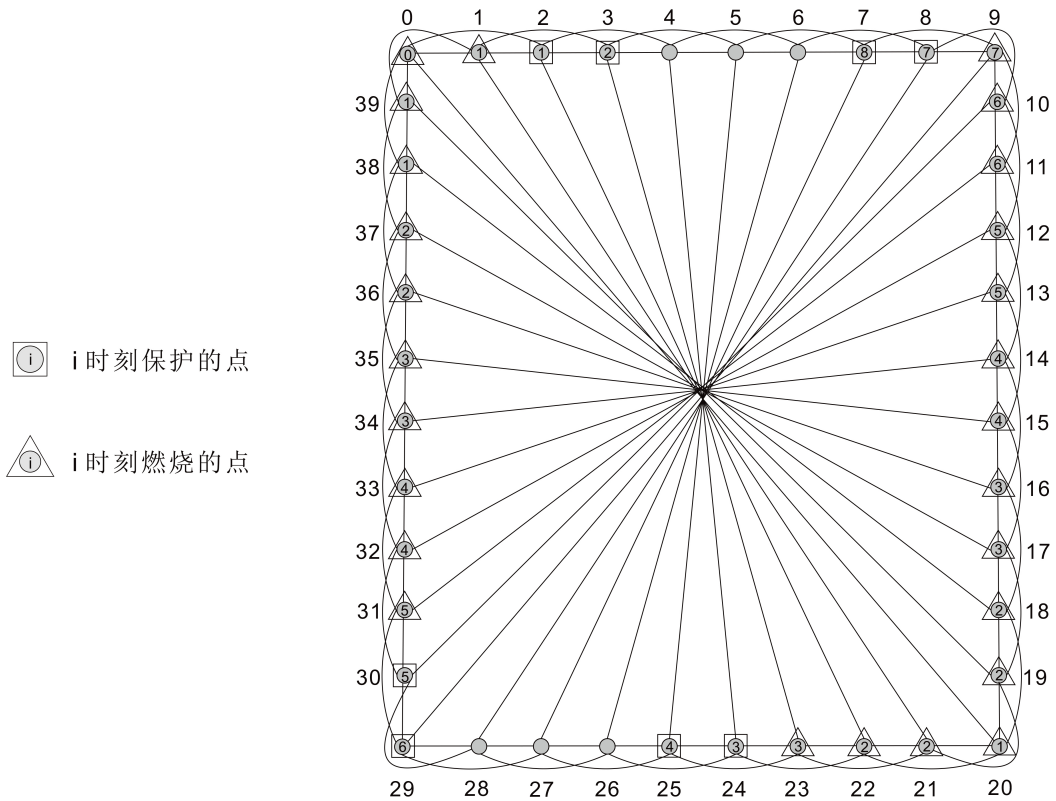


Figure 6. Cayley Graph $CG(Z_{40}, \{(\bar{1}, \bar{39}), (\bar{2}, \bar{38}), \bar{20}\})$

图 6. 凯莱图 $CG(Z_{40}, \{(\bar{1}, \bar{39}), (\bar{2}, \bar{38}), \bar{20}\})$

定理 9 设 $CG(Z_n, S)$ 是 Z_n 在任意大于三元逆闭子集 $S = \{(\bar{a}_1, \bar{b}_1), (\bar{a}_2, \bar{b}_2), \dots, (\bar{a}_i, \bar{b}_i)\}$ ($\bar{a}_j^{-1} = \bar{b}_j, a_j < b_j, j = 1, 2, \dots, i$) 上的凯莱图, 若凯莱图的任意一个顶点着火, 一个消防员能够控制火不传到其余未着火的顶点当且仅当 $Max \{a_1, a_2, \dots, a_i\} \leq \frac{1+\sqrt{3n-8}}{3}$.

证明: \Rightarrow 若凯莱图的任意一个顶点着火, 一个消防员能够控制火不传到其余未着火的顶点, 则根据定理 7, 这个消防员要建立两面厚度为 $Max \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ 的防火墙, 所以能得到凯莱图上的着火点数加以消防员做为防火墙的点数是小于等于凯莱图的总点数 n 的, 另外因为所取大于三元的逆闭子集是任意的, 因此我们考虑的 S 集必须是在固定 $Max \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ 下所含元素最多的 S 集, 这样任意大于三元逆闭子集 $S = \{(\bar{a}_1, \bar{b}_1), (\bar{a}_2, \bar{b}_2), \dots, (\bar{a}_i, \bar{b}_i)\}$ ($\bar{a}_j^{-1} = \bar{b}_j, a_j < b_j, j = 1, 2, \dots, i$) 上的凯莱图都能由一个消防员去控制火不传到其余未着火的顶点. 下面我们考虑凯莱图上

着火点的个数, 和之前一样根据凯莱图的传递性, 我们只考虑0点着火的情况, 设 t 是时间单位, $m = \text{Max} \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$, d 是构成防火墙的消防员的个数, 在 $t = 1$ 时, 1 个点着火, $d = 1$; $t = 2$ 时, $2m + 1$ 个点着火, $d = 2$; $t = 3$ 时, $4m + 1$ 个点着火, $d = 3$; \dots ; $t = m - 1$ 时, $2(m - 2)m + 1$ 个点着火, $d = m - 1$; $t = m$ 时, $2(m - 2)m + 1 + m + 1$ 个点着火, $d = m$; $t = m + 1$ 时, $2(m - 2)m + 1 + m + 1 + m$ 个点着火, $d = m + 1$; $t = m + 2$ 时, $2(m - 2)m + 1 + m + 1 + m + m$ 个点着火, $d = m + 2$; \dots ; $t = 2m - 1$ 时, $2(m - 2)m + 1 + 1 + m^2$ 个点着火, $d = 2m - 1$; $t = 2m$ 时, $2(m - 2)m + 1 + 1 + m^2 + 1$ 个点着火, $d = 2m$, 这样我们建立了两面防火墙, 综上有 $2(m - 2)m + 1 + 1 + m^2 + 1 + 2m \leq n$, 即 $3m^2 - 2m + 3 \leq n$, 从而 $m \leq \frac{1 + \sqrt{3n - 8}}{3}$, 也即 $\text{Max} \{a_1, a_2, \dots, a_i\} \leq \frac{1 + \sqrt{3n - 8}}{3}$.

\Leftarrow 设 $m = \text{Max} \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$, 把 $\text{Max} \{a_1, a_2, \dots, a_i\} \leq \frac{1 + \sqrt{3n - 8}}{3}$ 两边平方整理得到 $3m^2 - 2m + 3 \leq n$, 要证一个火发生在凯莱图的任一顶点, 一个消防员能够控制火不传到其余未着火的顶点, 只证在固定 $\text{Max} \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ 下所含元素最多的 S 集对应的凯莱图上一个消防员能够控制火不传到其余未着火的顶点, 这样对任意 S 集, 一个消防员都能够控制火不传到其余未着火的顶点, 也即证在固定 $\text{Max} \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ 下所含元素最多的 S 集上凯莱图的着火点数加以消防员做为防火墙的点数是小于等于凯莱图的总点数 n , 根据上边的证明, 得到 $3m^2 - 2m + 3 \leq n$, 从而在大于三元逆闭子集 $S = \{(\bar{a}_1, \bar{b}_1), (\bar{a}_2, \bar{b}_2), \dots, (\bar{a}_i, \bar{b}_i)\} (\bar{a}_j^{-1} = \bar{b}_j, a_j < b_j, j = 1, 2, \dots, i)$ 上, 一个火发生在凯莱图的任一顶点, 一个消防员能够控制火不传到其余未着火的顶点.

定理 10 设 $CG(Z_n, S)$ 是 Z_n 在大于三元逆闭子集 $S = \{(\bar{a}_1, \bar{b}_1), (\bar{a}_2, \bar{b}_2), \dots, (\bar{a}_i, \bar{b}_i), \frac{n}{2}\} (\frac{n}{2}^{-1} = \frac{n}{2}, \bar{a}_j^{-1} = \bar{b}_j, a_j < b_j, j = 1, 2, \dots, i)$ 上的凯莱图, 若凯莱图的任意一个顶点着火, 一个消防员能够控制火不传到其余未着火的顶点当且仅当 $\text{Max} \{a_1, a_2, \dots, a_i\} \leq \frac{5 + \sqrt{12n - 47}}{12}$.

证明: \Rightarrow 我们沿用定理 8 和定理 9 证明中的概念和符号, 若一个火发生在凯莱图的任一顶点, 一个消防员能够控制火不传到其余未着火的顶点, 则根据定理 8, 这个消防员要建立四面厚度为 $\text{Max} \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ 的防火墙, 根据定理 8 的证明, 实际上第二面墙控制第一面墙, 第四面墙控制第三面墙, 也即第二面墙到 0 中间的燃烧点比第一面墙到 0 中间的燃烧点的个数多 m , 第四面墙到 $\frac{n}{2}$ 中间的燃烧点比第三面墙到 $\frac{n}{2}$ 中间的燃烧点的个数多 m , 因此只需求出第二面墙到 0 中间的燃烧点的个数和第四面墙到 $\frac{n}{2}$ 中间的燃烧点的个数, 设 $f_i (i = 1, 2)$ 是第 i 面墙到 0 中间所有燃烧点的个数, $f_i (i = 3, 4)$ 是第 i 面墙到 $\frac{n}{2}$ 中间所有燃烧点的个数, 那么 $t = 1$ 时, $f_2 = 0, f_4 = 0, d = 1$; $t = 2$ 时, $f_2 = 0, f_4 = 0, d = 2$; $t = 3$ 时, $f_2 = m, f_4 = m, d = 3$; $t = 4$ 时, $f_2 = 2m, f_4 = 2m, d = 4$; \dots ; $t = m$ 时, $f_2 = (m - 2)m, f_4 = (m - 2)m, d = m$; \dots $t = 2m - 1$ 时, $f_2 = (2m - 3)m, f_4 = (2m - 3)m, d = 2m - 1$; $t = 2m$ 时, $f_2 = (2m - 3)m + 1, f_4 = (2m - 2)m, d = 2m$; $t = 2m + 1$ 时, $f_2 = (2m - 3)m + 1, f_4 = (2m - 1)m, d = 2m + 1$; \dots $t = 4m - 1$ 时, $f_2 = (2m - 3)m + 1, f_4 = (4m - 3)m, d = 4m - 1$; $t = 4m$ 时, $f_2 = (2m - 3)m + 1, f_4 = (4m - 3)m + 1, d = 4m$; 从而 $f_1 = f_2 - m = (2m - 4)m + 1, f_3 = f_4 - m = (4m - 4)m + 1$, 这样我们建立了四面防火墙, 综上有 $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + 2 + 4m \leq n$ 即 $12m^2 - 10m + 6 \leq n$, 也即 $m \leq \frac{5 + \sqrt{12n - 47}}{12}$, 因此 $\text{Max} \{a_1, a_2, \dots, a_i\} \leq \frac{5 + \sqrt{12n - 47}}{12}$.

\Leftarrow 类似于定理 9 的证明, 可以得到凯莱图的任意一个顶点着火, $\text{Max} \{a_1, a_2, \dots, a_i\} \leq \frac{5 + \sqrt{12n - 47}}{12}$ 时, 一个消防员能够控制火不传到其余未着火的顶点.

设 $m = \text{Max} \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$, 从定理 9 和定理 10 可知, 如果大于三元逆闭子集 S 上的凯莱图的

任意一个顶点着火, 那么一个消防员并不能控制任意大于三元逆闭子集 S 上的凯莱图使得火不能蔓延到其余未着火的顶点, 因此多个消防员去控制火是很有必要的. 由定理 9 和定理 10 的证明, 我们也可以找到多个消防员来控制凯莱图上任意一个点着火的充要条件, 得出 n 和 m 之间的关系, 另外根据定理 9 和定理 10 我们能得出两条推论.

推论 1 设 $CG(Z_n, S)$ 是 Z_n 在大于三元逆闭子集 $S = \{(\bar{a}_1, \bar{b}_1), (\bar{a}_2, \bar{b}_2), \dots, (\bar{a}_i, \bar{b}_i)\}$ ($\bar{a}_j^{-1} = \bar{b}_j, a_j < b_j, j = 1, 2, \dots, i$) 上的凯莱图, 若凯莱图上的任意一点 v 着火, 则构成第一面厚度为 m 的防火墙上的第一个顶点是沿着点 v 顺时针方向开始计数, 以 $(v+1)(\text{mod } n)$ 做为第 1 个计数顶点的第 $((m-2)m+2)$ 个顶点, 构成第二面厚度为 m 的防火墙上的第一个顶点是沿着点 v 逆时针方向开始计数, 以 $(v-1)(\text{mod } n)$ 做为第 1 个计数顶点的第 $(2m(m-1)+2)$ 个顶点.

推论 2 设 $CG(Z_n, S)$ 是 Z_n 在大于三元逆闭子集 $S = \{(\bar{a}_1, \bar{b}_1), (\bar{a}_2, \bar{b}_2), \dots, (\bar{a}_i, \bar{b}_i), \frac{n}{2}\}$ ($\frac{n}{2}^{-1} = \frac{n}{2}, \bar{a}_j^{-1} = \bar{b}_j, a_j < b_j, j = 1, 2, \dots, i$) 上的凯莱图, 若凯莱图上的任意一点 v 着火, 则构成第一面厚度为 m 的防火墙上的第一个顶点是沿着点 v 顺时针方向开始计数, 以 $(v+1)(\text{mod } n)$ 做为第 1 个计数顶点的第 $((2m-4)m+2)$ 个顶点, 构成第二面厚度为 m 的防火墙上的第一个顶点是沿着点 $(v+\frac{n}{2})(\text{mod } n)$ 顺时针方向开始计数, 以 $(v+\frac{n}{2}+1)(\text{mod } n)$ 做为第 1 个计数顶点的第 $(2m(m-1)+2)$ 个顶点, 构成第三面厚度为 m 的防火墙上的第一个顶点是沿着点 v 逆时针方向开始计数, 以 $(v-1)(\text{mod } n)$ 做为第 1 个计数顶点的第 $((4m-4)m+2)$ 个顶点, 构成第四面厚度为 m 的防火墙上的第一个顶点是沿着点 $(v+\frac{n}{2})(\text{mod } n)$ 逆时针方向开始计数, 以 $(v+\frac{n}{2}-1)(\text{mod } n)$ 做为第 1 个计数顶点的第 $((4m-3)m+2)$ 个顶点.

基金项目

国家自然科学基金项目(11761070, 61662079); 2021年新疆维吾尔自治区自然基金联合项目(2021D01C078); 2020年新疆师范大学一流专业、一流课程项目资助.

参考文献

- [1] Hartnell, B. (1995) Firefighter! An Application of Domination. *Presentation at the 25th Manitoba Conference on Combinatorial Mathematics and Computing*, University of Manitoba, Winnipeg, Canada.
- [2] Cai, L. and Wang, W. (2009) The Surviving Rate of a Graph for the Firefighter Problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **23**, 1814-1826.
<https://doi.org/10.1137/070700395>
- [3] Stephen, F. and Gary, M. (2009) The Firefighter Problem: A Survey of Results, Directions and Questions. *Australasian Journal of Combinatorics*, **43**, 57-77.
- [4] Wang, W., Finbow, S. and Wang, P. (2010) The Surviving Rate of All Infected Network. *Theoretical Computer Science*, **411**, 3651-3660.
<https://doi.org/10.1016/j.tcs.2010.06.009>

-
- [5] Kong, J., Wang, W. and Zhu, X. (2012) The Surviving Rate of Planar Graphs. *Theoretical Computer Science*, **416**, 65-70.
<https://doi.org/10.1016/j.tcs.2011.10.002>
- [6] Moeller, S.A. and Wang, P. (2002) Fire Control on Graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **41**, 19-34.