Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(3), 1003-1012
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.113108

Hans汉斯

环与模的 Cospiral 维数

顾　醒，吕家凤*

浙江师范大学，数学与计算机科学学院，浙江　金华

收稿日期：2022年2月11日；录用日期：2022年3月7日；发布日期：2022年3月14日

摘　要

本文主要研究了模与环的 level 模右正交类的维数，称为 cospiral 维数，共分为三个部分。第一部分给出了 cospiral 的定义及一些一般的结果；第二部分对 cospiral 模作了等价刻画；第三部分研究了 cospiral 模在交换环下的应用。

关键词

Level 模，Cospiral 维数，Cospiral 包络，Level 覆盖

The Cospiral Demension of Modules and Rings

Xing Gu, Jiafeng Lyu*

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Feb. 11^{th}, 2022; accepted: Mar. 7^{th}, 2022; published: Mar. 14^{th}, 2022

Abstract

In this paper, we mainly study right orthogonal classes of level module. It is called

* 通讯作者

文章引用: 顾醒, 吕家凤. 环与模的 Cospiral 维数[J]. 应用数学进展, 2022, 11(3): 1003-1012.
DOI: 10.12677/aam.2022.113108

cospiral module. The paper is divided into four parts. Firstly, we introduce the notion of the cospiral modules and some general results. Secondly, some equivalent characterizations of cospiral modules are given. Thirdly, we discuss applications in the commutative ring of cospiral modules.

Keywords

Level Module, Cospiral Dimension, Cospiral Envelope, Level Cover

1. 引言

在 2014 年, Bravo Gillespie, and Hovey 在文献 [1]中, 首次提出了 level 模的右正交类的概念, 定义为 cospiral 模. 以后由所有 cospiral 模组成的类, 记为 $\mathscr{C}$. 他们是利用相同的思路以 level 模为基础借助 Ext 函子引入 cospiral 模的概念. 对于任意的 level 模右 R-模 L, 都有 $\mathrm{Ext}^1_R(L, M) = 0$, 那么右 R-模 M 称为 cospiral 模. 另外, 在这篇论文中, 也给出了 cospiral 预包络和包络及 level 预覆盖和覆盖的定义. 在 2016 年, Hu and Geng 在文献 [2]中, 证明了所有的 level 右R-模都是盖类. Bravo Gillespie, and Hovey 在文献 [1] 中, 也证明了(level 模, cospiral 模) 是完备的余挠对. 这就说明了对于任意的 R-模都有 cospiral 预包络当且仅当任意的R-模都有 level 预覆盖. 因此, cospiral 预包络或者是 level 预覆盖在同构意义下是唯一的. 另外, 我们将定义一个维数, 称为 cospiral 维数, 将在本篇论文中主要研究这个维数. 由此可见, cospiral 模的相关问题也有很大的研究价值. 它在相对同调代数的发展过程中也占据了重要的地位. 本文从 cospiral 模入手, 遵循毛立新和丁南庆在文献 [3]及陈翔与戴立辉在文献 [4]中对余挠模的研究思路来探讨 cospiral 模所对应的性质.

2. 主要结果

第一章, 主要介绍了相关的研究背景, 主要结果和预备知识.

第二章, 对 cospiral 模进行了等价刻画. 主要得到了如下结果:

定理 2.1.9 设 R 是环, 则下列等价:

(1)M 是 cospiral 模;

(2)M 关于正合列

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

是内射的, 其中 C 是 level 模;

(3)对任意的正合列

$$0 \to M \to B \to C \to 0,$$

其中 B 是 level 模, 则 $B \to C$ 是 C 的 level 预覆盖;

(4)M 是 level 预覆盖 $B \to C$ 的核, 其中 B 是 cospiral 模.

第三章, 讨论了 cospiral 模在交换环中的应用. 主要得到了以下结果:

定理 3.1.4 设 $\varphi: R \to S$ 是环满同态.如果 ${}_RS$ 是一个有限生成投射的, 若 ${}_RM$ 是一个 cospiral R-模, 那么 ${}_S\mathrm{Hom}_R(S_S, {}_RM)$ 是一个 cospiral 模.

3. 预备知识

本文始终假设 R 是有单位元的环. 本文中的 R-模都是右 R-模, 右 R-模 M 可记为 M_R. 所有的 R-模都是幺模. 所有的右 R-模构成的范畴, 记为 R-Mod. 在本节中, 我们将回顾一些定义和基本的结果.

定义1 [1] 如果 M 有一个有限生成投射的投射分解, 那么(左)模 M 称为 type FP_∞.

定义2 [1] 设 R 是一个环, 如果对于所有的 type FP_∞ 的模 M, 都有 $\mathrm{Ext}_R^1(M,N) = 0$, 那么称左 R-模 N 为 FP_∞- 内射的或者 absolutely clean, 相似地, 如果对于所有的 type FP_∞ 的右 R-模 M, 都有 $\mathrm{Tor}_1^R(M,N) = 0$, 那么称左 R-模 N 为 level 模.

定义3 [1] 给定一个 abelian 范畴 $\mathcal{A}$, 有一个 $\mathcal{A}$ 的对象 $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$的对的类, 满足 $\mathcal{F}^\perp = \mathcal{C}$ 并且 $\mathcal{F} = {}^\perp\mathcal{C}$. 其中, $\mathcal{F}^\perp$ 是对象 $Y \in \mathcal{A}$ 的类, 使得对于任意的 $F \in \mathcal{F}$, 都有$\mathrm{Ext}^1(F,Y) = 0$. 则称 $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ 为一个余挠对. 相似地, ${}^\perp\mathcal{C}$ 是对象 $X \in \mathcal{A}$ 的类, 使得对于任意的 $C \in \mathcal{C}$, 都有$\mathrm{Ext}^1(X,C) = 0$.

定义4 [5] 如果对于任意的 $A \in \mathcal{A}$, 都有一个短正合列

$$0 \to C \to F \to A \to 0,$$

其中 $C \in \mathcal{C}$, $F \in \mathcal{F}$, 那么余挠对 $(\mathscr{F}, \mathscr{C})$ 称为足够投射的, 类似地, 可以定义余挠对足够内射的定义. 由文献 [[5], 命题7.17], 只要范畴 $\mathcal{A}$ 足够投射和内射, 那么和余挠对是等价的.

定义5 [6] 若每个模都有$\mathscr{F}$-覆盖与$\mathscr{C}$-包络, 则称$(\mathscr{F}, \mathscr{C})$ 是完备的余挠对.

定义6 [1] 若余挠对是足够投射和内射的, 则称为完备的余挠对.

注 由于 level 模和平坦模是类似的, 所以我们期望 $(\mathscr{L}, \mathscr{C})$ 是完备的余挠对.

定理7 [1] 由文献 [[1], 定理2.14] 可知, 对于任意的环 R, $(\mathscr{L}, \mathscr{C})$ 构成了一个完备的余挠对.

定义8 [6] 如果对于任意的正合列

$$0 \to L^{'} \to L \to L^{''} \to 0.$$

若 $L, L^{''} \in \mathscr{F}$, 有 $L' \in \mathscr{F}$, 那么称这个余挠对$(\mathscr{L}, \mathscr{C})$ 是遗传对.

注 由文献 [[1], 命题2.10] 可知, $(\mathscr{L},\mathscr{C})$ 是遗传对.

定义9 [1] 如果对于所有的 level 模 L , 都有 $\mathrm{Ext}_R^1(L,M)=0$, 那么称模 M 为 cospiral 模.

定义 10 一个同态 $\phi:M\to C$, 其中 C 是 cospiral 模, 如果对于任意的同态 $f:M\to C^{'}$, 其中 $C^{'}$ 是 cospiral 模, 存在一个同态 $g:C\to C^{'}$, 使得 $g\phi=f$, 那么称 $\phi:M\to C$ 是 M 的 cospiral 预包络.

定义 11 如果 g 是 C 的自同构, 当 $C^{'}=C$ 并且 $f=\phi$ 时, 那么 ϕ 称为 M 的 cospiral 模的包络的定义.

定义 12 一个同态 $\phi:L\to M$, 其中 L 是 level 模, 如果对于任意的同态 $f:L^{'}\to M$, 其中 $L^{'}$ 是 level 模, 存在一个同态 $g:L^{'}\to L$, 使得 $\phi g=f$, 那么称 $\phi:L\to M$ 是 M 的 cospiral 模的预覆盖的定义.

定义 13 如果 g 是 L 的自同构, 当 $L=L^{'}$ 并且 $f=\phi$ 时, 那么 ϕ 称为 M 的 level 模的覆盖的定义.

定义 14 如果以下序列:

$$0\to M\to C_0\to C_{-1}\to C_{-2}\to\cdots\to C_{-(n-1)}\to C_{-n}\to 0$$

是正合的, 其中 $C_0,C_{-1},C_{-2},\ldots,C_{-(n-1)},C_{-n}$ 是 cospiral 模, 那么称 M 的 cospiral 维数 $\leq n$, 记为 $\mathrm{cd}(M)\leq n$. 如果没有这样的 n, 则 $\mathrm{cd}(M)=\infty$.

4. Cospiral 模

引理 2.1.1 [7] 设 $\varphi:L\to M$ 是 M 的 level 预覆盖, 并且假设 $\mathcal{L}$ 是扩张封闭的. 设 $K=\ker(\varphi)$. 那么对于任意的 $C\in\mathscr{L}$, 都有 $\mathrm{Ext}_R^1(L^{'},K)=0$.

定理 2.1.2 [7] 对于任意的两个 R-模 M,N, 下列等价:
(1) 通过 N,M 的每一个扩张都是平凡的, 即每一个正合列

$$0\to M\to X\to N\to 0$$

是分裂的;
(2) $\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$.

定理 2.1.3 设 M 是右 R-模, 若 $\alpha:L\to M$ 的 level 覆盖, 则 $\ker\alpha$ 是 cospiral 模.

证明 由引理2.1.1可得证.

引理 2.1.4 若$(\mathscr{L},\mathscr{C})$ 是遗传对, 则对于任意的 $L\in\mathscr{L}$ 及 $M\in\mathscr{C}$, 任意整数 $m\geq 0$, 有 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(L,M)=0$.

证明 由文献 [[6], 命题1.2] 可得.

命题 2.1.5 若$(\mathscr{L},\mathscr{C})$ 是遗传对, 若以下序列

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

是正合的, 其中 B 是 cospiral 模, 则对于任何的 R-模 $L \in \mathscr{L}$ 及任意的整数 $m \geq 0$, 有 $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(L,A) \cong \mathrm{Ext}_R^m(L,C)$.

证明 我们有以下正合列：

$$\ldots \to \mathrm{Ext}_R^m(L,B) \to \mathrm{Ext}_R^m(L,C) \to \mathrm{Ext}_R^{m+1}(L,A) \to \mathrm{Ext}_R^{m+1}(L,B) \to \ldots,$$

所以, 我们由引理2.1.4可知, $\mathrm{Ext}_R^{m+1}(L,A) \cong \mathrm{Ext}_R^m(L,C)$.

命题 2.1.6 令$\{C_i\}_{i\in I}$ 是右 R-模簇, 则有 $\prod_{i\in I} C_i$ 是 cospiral 模当且仅当每一个 C_i 是 cospiral 模.

证明 由 cospiral 模的定义可得.

引理 2.1.7 设 $\varphi : M \to C$ 是 M 的 cospiral 包络, 并且假设 $\mathscr{C}$ 是扩张封闭的. 设 $D =$coker$(\varphi) = C/\varphi(M)$. 那么对于任意的 $C^{'} \in \mathscr{C}$, 都有 $\mathrm{Ext}_R^1(D, C^{'}) = 0$.

证明 由定理2.1.2可知, 对于 $C^{'} \in \mathscr{C}$, 考虑通过 D 的任意一个 $C^{'}$ 的扩张. 假设下列正合列是这样的一个扩张：

$$0 \to C^{'} \to N \to D \to 0.$$

设 $I =$im(φ). 那么我们有下列 $h : N \to D$ 和 $\sigma : C \to D$ 拉回图:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & M \arrow[d] & C^{'} \arrow[r, equal] \arrow[d] & C^{'} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, equal] & P \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

其中 $I \to C$ 是一个包含映射, $\alpha : I \to P$, $\beta : N \to 0$, $f : P \to C$. 因为 $C^{'}$, $C \in \mathscr{C}$, 所以可以得出 $P \in \mathscr{C}$. 又因为 $\varphi : M \to I \hookrightarrow C$ 是一个 cospiral 包络, 所以有一个线性映射 $g : C \to P$ 使得 $\alpha \circ \varphi = g \circ i \circ \varphi$. 因此, 我们有 $f \circ \alpha\varphi = (fg) \circ i \circ \varphi$. 因此, 可知 fg 是 C 的自同构. 所以, 可以得到

$$\beta \circ g(fg)^{-1} \circ \varphi = \beta \circ g \circ \varphi = \beta \circ \alpha\varphi = 0.$$

所以, 对于任意的 $l \in C$, 我们都可以通过 $\sigma(l)$ 到 $\beta g(fg)^{-1}(l)$ 定义一个线性映射 $u : D \to N$. 另外, 我们有

$$h \circ u\sigma(l) = h\beta g(fg)^{-1}(l) = \sigma fg(fg)^{-1}(l) = \sigma(l).$$

因此, 我们可以得出 $h \circ u = 1_D$. 所以, 我们证得下列正合列

$$0 \to C^{'} \to N \to D \to 0$$

是可裂的. 所以, 我们有定理2.1.2可知, $\mathrm{Ext}^1_R(D, C^{'}) = 0$. 证毕. **命题 2.1.8** 设 R 是环, 则:

(1)level 模的 cospiral 包络是 level 模;

(2)cospiral 模的 level 覆盖是 cospiral 模. **证明** (1)设 L 是 level 模, $\alpha : L \to C$ 是 L 的 cospiral 包络, 由引理2.1.7可知, 正合列

$$0 \to L \to C \to D \to 0$$

中 D 是 level 模, 由文献 [[1], 命题2.10] 可知, level 模是扩张封闭的, 所以证得 C 是一个 level 模. (2)设 C 是 cospiral 模, $\alpha : L \to C$ 是 C 的 level 覆盖, 由引理2.1.1可知, 正合列

$$0 \to K \to L \to C \to 0$$

中 K 是 cospiral 模, 由文献 [[1], 定理2.12] 及文献 [[1], 命题2.7] 证明可知, cospiral 模是扩张封闭的, 所以 C 是 level 模.

下面定理给出了 cospiral 模的等价刻画.

定理 2.1.9 设 R 是环, 则下列等价:

(1)M 是 cospiral 模;

(2)M 关于正合列

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

是内射的, 其中 C 是 level 模;

(3)对任意的正合列

$$0 \to M \to B \to C \to 0,$$

其中 B 是 level 模, 则 $B \to C$ 是 C 的 level 预覆盖;

(4)M 是 level 预覆盖 $B \to C$ 的核, 其中 B 是 cospiral 模.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Rightarrow$ (1) 给定一个 level 模 C, 则存在短正合列

$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$

其中 B 是投射模, 可以诱导出

$$\mathrm{Hom}_R(B, M) \to \mathrm{Hom}_R(A, M) \to \mathrm{Ext}^1_R(C, M)$$

是正合的. 又有已知可得,

$$\mathrm{Hom}_R(B, M) \to \mathrm{Hom}_R(A, M) \to 0$$

是正合的, 我们可得出 $\mathrm{Ext}^1_R(C, M) = 0$, 所以我们由 cospiral 模的定义可知, M 是 cospiral 模.

(1) $\Rightarrow$ (3) 容易验证.

(3) $\Rightarrow$ (4) 对于 level 模 M, 记 $C(M)$ 是 M 的 cospiral 包络, 则有正合列

$$0 \to M \to C(M) \to L \to 0.$$

由假设可知, $C(M)$ 是 level 模, 我们由(3)可知, $C(M) \to L$ 是 L 的 level 预覆盖, 所以(4)显然成立.

(4) $\Rightarrow$ (1) 由(4)可知, 存在正合列

$$0 \to M \to B \to C \to 0,$$

其中 $B \to C$ 是 C 的 level 预覆盖, B 是 cospiral 模, 所以对任意的 level 模 N, 我们都有正合列

$$\mathrm{Hom}(N, B) \to \mathrm{Hom}(N, C) \to \mathrm{Ext}^1_R(N, M) \to 0,$$

又有(4)可知,

$$\mathrm{Hom}(N, B) \to \mathrm{Hom}(N, C) \to 0$$

是正合的, 所以我们可以得出 $\mathrm{Ext}^1_R(N, M) = 0$. 由 cospiral 模的定义可知, M 是 cospiral 模.

5. Cospiral 模在交换环中的应用

在这一部分中, 没有特殊说明, 所有的环都是可交换的. 接下来的这个引理将在下列研究中频繁的使用.

引理 3.1.1 设 R 是环, M 是一个 R-模. 那么下列等价:
(1)M 是 cospiral 模;
(2)对于任意的投射 R-模 P, $\mathrm{Hom}_R(P,\ M)$ 是 cospiral R-模;
(3)如果 cospiral R-模的类是直和封闭的, 对于任意的投射 R-模 P, $P \otimes M$ 是一个 cospiral 模.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然.
(2) $\Rightarrow$ (1) 设 $P = R$.
(3) $\Rightarrow$ (2) 对于任意的投射 R-模 P, 则存在一个自由 R-模 R^I 及左 R- 模 K, 使得

$${}_RP \oplus_R K \cong R^I.$$

另外, 我们知道以下同构是成立的:

$$\mathrm{Hom}_R(R^I, M) \cong \mathrm{Hom}_R(R, M)^I \cong M^I.$$

因为(1)和(2) 是等价的, 则可知, M^I 是一个 cospiral R- 模, 又因以下同构是成立的:

$$\mathrm{Hom}_R(R^I, M) \cong \mathrm{Hom}_R({}_RP, M) \oplus \mathrm{Hom}_R({}_RK, M),$$

所以我们可以得出以下同构是成立的:

$$M^I \cong \mathrm{Hom}_R({}_RP, M) \oplus \mathrm{Hom}_R({}_RK, M).$$

已知 cospiral R-模的类是直和封闭的, 因此 $\mathrm{Hom}_R({}_RP, M)$ 是一个 cospiral R-模. 所以(2)成立.
(2) $\Rightarrow$ (3) 对于任意的投射 R-模 P, 则存在一个自由 R-模 R^I 及左 R- 模 K, 使得

$${}_RP \oplus_R K \cong R^I.$$

我们有以下同构成立:

$$R^I \otimes_R M \cong (R \otimes_R M)^I \cong M^I.$$

因为 cospiral R-模是直积封闭的, 所以可知, M^I 是一个 cospiral R-模, 又因以下同构是成立的:

$$R^I \otimes_R M \cong ({}_RP \otimes_R M) \oplus ({}_RK \otimes_R M),$$

所以我们可以得出 ${}_RM \cong ({}_RP \otimes_R M) \oplus ({}_RK \otimes_R M) \cong_R M)^I$, 又因为(3)中 cospiral R-模的类是直和封闭的, 因此 ${}_RP \otimes_R M$ 是一个 cospiral R-模.

命题 3.1.2 设 R 是环并且使得 cospiral R-模的类是直和封闭的, 那么下列等价:
(1) $C(R_R)$ 是投射的;
(2) 任意的投射 R-模的 cospiral 包络总是投射的.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 考虑以下正合列

$$0 \to R \to C(R_R) \to L \to 0.$$

那么对于任意的投射 R-模 P, 都有正合列

$$0 \to R \otimes_R P \to C(R) \otimes_R P \to L \otimes_R P \to 0,$$

其中 L 是一个level R-模.
下证: $L \otimes_R P$ 是一个level R-模.
对于任意的投射 R-模 P, 存在一个自由 R-模 R^I 及左 R-模 K, 使得

$${}_RP \oplus_R K \cong R^I.$$

我们有以下同构成立:

$$R^I \otimes_R L \cong (R \otimes_R L^I) \cong L^I,$$

其中 L 是level R-模, 又因以下同构是成立的:

$$R^I \otimes_R L \cong ({}_RP \otimes_R L) \oplus ({}_RK \otimes_R L),$$

所以我们可以得出

$${}_RL \cong ({}_RP \otimes_R L) \oplus ({}_RK \otimes_R L).$$

又因为 level R-模的类是直和封闭的, 因此 ${}_RP \otimes_R L$ 是一个 level R-模.
接下来考虑正合列

$$0 \to P \to C(R) \otimes_R P.$$

记 $f : P \to C(R) \otimes_R P$, 因为 $L \otimes_R P$ 是一个 level R-模, 所以 $f : P \to C(R) \otimes_R P$ 是 cospiral 预包络, 由已知条件(1)可知, $C(R)$ 是投射 R-模, 又因为 P 是投射的, 所以可以得出 $C(R) \otimes_R P$ 是投射 R- 模, 因为由引理4.1.1可知, $C(R) \otimes_R P$ 是一个cospiral R-模, 所以 $P \to C(R) \otimes P$ 是 P 的预包络, 因此 $P \to C(P)$ 是 P 的包络, 所以可以得到 $C(P)$ 是 $C(R) \otimes P$ 的直和项, 所以 $C(P)$ 是投射的.
(2) $\Rightarrow$ (1) 易证.

命题 3.1.3 设 R 是环, 如果 $D(R) \leq 1$(即, R 是一个遗传环), 那么对于任意的 R-模 B, C, 有 $\mathrm{Ext}_R^1(B, C)$ 是 cospiral R-模.

证明 对于任意的 R-模 A, B, C, 那么(1)的证明由文献 [[8], p.343] 可知, 有同构:
$\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Tor}_1^R(A, B), C) \cong \mathrm{Ext}_R^1(A, \mathrm{Ext}_R^1(B, C))$, 所以结论是成立的.

定理 3.1.4 设 $\varphi : R \to S$ 是环满同态.如果 ${}_RS$ 是一个有限生成投射的, 若 ${}_RM$ 是一个 cospiral R-模, 那么 ${}_S\mathrm{Hom}_R(S_S, {}_RM)$ 是一个 cospiral 模.

证明 首先我们先证明对于任意的 ${}_SX$ 是一个 level R-模, 则有 ${}_RS \otimes_S X$ 是一个 level R-模.
对于任意的 type FP_∞-内射模 F, 则有正合列

$$\cdots \to_R P_1 \to_R P_0 \to_R F \to 0,$$

其中每一个 ${}_RP_i$ 都是有限生成投射的. 则上述正合列可以诱导出以下正合列

$$\cdots \to_R P_1 \otimes_R S \to_R P_0 \otimes_R S \to_R F \otimes_R S \to 0.$$

已知 ${}_RS$ 是有限生成投射的, 所以可以得出 ${}_RP_i \otimes_R S$ 是有限生成投射的, 因此我们由 type FP_∞-内射的定义可知, ${}_RF \otimes_R S$ 是 type FP_∞-内射模 S-模, 即 $\mathrm{Tor}_1^S({}_RF \otimes_R S, X) = 0$，又因

$$\mathrm{Tor}_1^S({}_RF \otimes_R S, X) \cong \mathrm{Tor}_1^R({}_RF, {}_RS \otimes_S X),$$

所以得出 $\mathrm{Tor}_1^R({}_RF, {}_RS \otimes_S X) = 0$ 因此我们证明出 ${}_RS \otimes_S X$ 是一个 level R- 模.
接下来我们证明 ${}_S\mathrm{Hom}_R(S_S,\ {}_RM)$ 是一个 cospiral 模.

因为已知 M_R 是一个 cospiral R-模, 所以由 cospiral 模的定义可知, $\mathrm{Ext}_R^1({}_RX, {}_RM) = 0$, 另外, 有同构

$$\mathrm{Ext}_S^1({}_SX, {}_S\mathrm{Hom}_R({}_RS_S, {}_RM)) \cong \mathrm{Ext}_R^1({}_RX, {}_RM),$$

所以 $\mathrm{Ext}_S^1({}_SX, {}_S\mathrm{Hom}_R({}_RS_S, {}_RM)) = 0$, 因此我们由 cospiral 模的定义可知, ${}_S\mathrm{Hom}_R({}_RS_S, {}_RM)$ 是 cospiral 模.

基金项目

国家自然科学青年基金资助项目(11801515)；国家自然科学基金面上资助项目(11571316)。

参考文献

[1] Bravo, D., Gillespie, J. and Hovey, M. (2014) The Stable Module Category of a General Ring. arXiv:1405.5768

[2] Hu, J.S. and Geng, Y.X. (2016) Relative Tor Functors for Level Modules with Respect to a Semidualizing Bimodule. *Algebras and Representation Theory*, **19**, 579-597. https://doi.org/10.1007/s10468-015-9589-9

[3] Mao, L.X. and Ding, N.Q. (2006) The Cotorsion Dimension of Modules and Rings. In: Goeters, P. and Jenda, O.M.G., Eds., *Abelian Groups, Rings, Modules, and Homological Algebra*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 57-73.

[4] 陈翔, 戴立辉. n-X-余挠模与n-X-余挠维数[J]. 闽江学院学报, 2012, 33(2): 15-18.

[5] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (2000) Relative Homological Algebra. In: Birbrair, L., Maslov, V.P., Neumann, W.D., Pflaum, M.J., Schleicher, D. and Wendland, K., Eds., *De Gruyter Expositions in Mathematics*, Vol. 30, De Gruyte, Berlin.
https://doi.org/10.1515/9783110803662

[6] Enochs, E.E., Jenda, O.M.G. and Lopez-Ramos, J.A. (2004) The Existence of Gorenstein Flat Covers. *Mathematica Scandinavica*, **94**, 46-62.
https://doi.org/10.7146/math.scand.a-14429

[7] Xu, J.Z. (1996) Flat Covers of Modules. In: *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1634, Springer, Berlin.

[8] Rotman, J.J. (1979) An Introduction to Homological Algebra. Academic Press, New York.