Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(3), 1412-1419
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.113154

无穷区间上分数阶微分方程的迭代解

胡晓蝶，王 颖*，阚梦琪，谷德阳

临沂大学，数学与统计学院，山东 临沂

收稿日期：2022年2月28日；录用日期：2022年3月22日；发布日期：2022年3月29日

摘 要

本文主要研究无穷区间上的分数阶微分方程，应用单调迭代方法，在一定的条件下，得到了方程的极值解和解的迭代序列。

关键词

分数阶微分方程，迭代解，无穷区间

Iterative Solutions of Fractional Differential Equations on Infinite Interval

Xiaodie Hu, Ying Wang*, Mengqi Kan, Deyang Gu

School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong

Received: Feb. 28^{th}, 2022; accepted: Mar. 22^{nd}, 2022; published: Mar. 29^{th}, 2022

Abstract

In this paper, we mainly investigate the fractional differential equation on infinite interval. Under certain conditions, we establish the existence of extremal solutions as

* 通讯作者。

文章引用: 胡晓蝶, 王颖, 阚梦琪, 谷德阳. 无穷区间上分数阶微分方程的迭代解[J]. 应用数学进展, 2022, 11(3): 1412-1419. DOI: 10.12677/aam.2022.113154

well as iterative schemes by employing the monotone iterative technique.

Keywords

Fractional Differential Equation, Iterative Solution, Infinite Interval

1. 引言

本文研究无穷区间上的分数阶微分方程积分边值问题(BVP)：

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}x(t)+a(t)f(t,x(t))=0,\ 0<t<+\infty, \\ x(0)=x'(0)=\cdots=x^{(n-2)}=0,\ \lim\limits_{t\to+\infty}D_{0+}^{\alpha-1}x(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}h(t)x(t)dA(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中$n-1<\alpha\leq n$, $n\geq 2$, D_{0+}^{α}是Riemann-Liouville 微分. $a\in L[0,+\infty)$, $a(t)\not\equiv 0$, $0<\int_0^{\infty}a(s)ds<+\infty$, $h:(0,+\infty)\to[0,+\infty)$是连续的并且$h\in L^1(0,+\infty)$, $\int_0^{+\infty}h(s)x(s)dA(s)$表示具有广义测度的Riemann-Stieltjes积分, $A:(0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$是有界变差函数, $\int_0^{+\infty}h(t)t^{\alpha-1}dA(t)<\Gamma(\alpha)$, $\int_0^{+\infty}h(t)dA(t)<\Gamma(\alpha)$. $f:[0,+\infty]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$连续.

微分方程无穷边值问题的研究, 始于1896年Kueser [1]. Agarwal 和O'Regan [2]对无穷区间上的微分方程做了详细介绍. Zhao 和Ge [3]运用不动点定理研究了无穷区间上分数阶微分方程三点边值问题的无界解. Liang 和Zhang [4,5]获得了多点边值条件下, 方程的多解性. 无穷区间上分数阶微分方程边值问题的研究, 大多考虑的是分数阶导数定义下的多点, 积分边值问题 [6–8], 对于Riemann-Stieltjes积分定义下的积分边值问题的研究, 相对较少. 因此, 本文中方程的研究是十分有意义的.

2. 预备知识

定义2.1 [9,10] (Riemann-Liouville) α 阶积分定义为

$$I_{0+}^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}x(s)ds,$$

其中$n-1\leq\alpha<n$, n 为整数.

定义2.2 [9,10] (Riemann-Liouville) α 阶导数定义为

$$D_{0+}^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{0}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}x(s)ds,$$

其中$n-1\leq\alpha<n$, n 为整数.

引理2.1 [9,10] 若$\alpha>0$, $x\in L(0,1)$, $D_{0+}^{\alpha}x\in L(0,1)$, 则

$$I_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha}x(t)=x(t)+c_{1}t^{\alpha-1}+c_{2}t^{\alpha-2}+\cdots+c_{n}t^{\alpha-n},$$

其中$c_i\in(-\infty,+\infty)$, $i=1,2,...,n$, $n-1<\alpha\leq n$.

引理2.2 假设$y\in C(0,+\infty)\cap L(0,+\infty)$, 则分数阶微分方程

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}x(t)+y(t)=0,\ t\in(0,+\infty),\ n-1<\alpha\leq n,\ n\geq 2, \\ x(0)=x'(0)=\cdots=x^{(n-2)}=0,\ \lim\limits_{t\to+\infty}D_{0+}^{\alpha-1}x(t)=\displaystyle\int_{0}^{+\infty}h(t)x(t)dA(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

有解

$$x(t)=\int_{0}^{\infty}G(t,s)y(s)ds,$$

其中

$$G(t,s)=G_{0}(t,s)+G_{1}(t,s), \tag{2.2}$$

$$G_{0}(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases} t^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}, & 0\leq s\leq t\leq+\infty, \\ t^{\alpha-1}, & 0\leq t\leq s\leq+\infty, \end{cases}$$

$$G_{1}(t,s)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)-\int_{0}^{+\infty}h(t)t^{\alpha-1}dA(t)}\int_{0}^{+\infty}h(t)G_{0}(t,s)dA(t).$$

引理2.3 由(2.2) 定义的$G(t,s)$ 有下列性质:

(1) $G(t,s)\geq 0$, $(t,s)\in[0,+\infty]\times[0,+\infty]$.

(2) $G(t,s)$ 在$[0,+\infty]\times[0,+\infty]$ 上连续.

(3) $G(t,s)\leq\omega$, $\omega=\max\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)},\ \frac{\int_{0}^{+\infty}h(t)dA(t)}{\Gamma(\alpha)(\Gamma(\alpha)-\int_{0}^{+\infty}h(t)t^{\alpha-1}dA(t))}\right\}$.

证明 根据$G(t,s)$ 的定义, 只需证明(3) 成立. 由于

$$G_0(t,s) \le \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)},$$

$$\begin{aligned} G_1(t,s) &\le \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\alpha)-\int_0^{+\infty} h(t)t^{\alpha-1}dA(t)\right)}\int_0^{+\infty} h(t)dA(t) \\ &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\alpha)-\int_0^{+\infty} h(t)t^{\alpha-1}dA(t)\right)}\int_0^{+\infty} h(t)dA(t), \end{aligned}$$

所以$G(t,s) = G_0(t,s) + G_1(t,s) \le \omega$. □

3. 主要结果

设$X = C[0,+\infty)$, 定义

$$E = \left\{x \in C[0,+\infty) : \sup_{t\in J} \frac{|x(t)|}{1+t^{\alpha-1}} < +\infty\right\}. \tag{3.1}$$

范数$\|x\| = \sup_{t\in J} \frac{|x(t)|}{1+t^{\alpha-1}}$, 则$E$ 是Banach 空间, 记

$$K = \{x \in E : x(t) \ge 0,\ t \in J\}.$$

因此K 是X 的一个锥.

本文, 我们假设下面的条件$(\mathbf{H}_1)$ 成立.

$(\mathbf{H}_1)$ $f : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 是连续函数. $f(t,0) \not\equiv 0$, 并且在$[0,+\infty)$ 上u 有界时, $f(t,(1+t^{\alpha-1})u)$ 有界.

由$(\mathbf{H}_1)$, 定义积分算子$T : K \to X$:

$$(Tx)(t) = \int_0^{+\infty} G(t,s)a(s)f(s,x(s)ds, \quad t \in [0,+\infty). \tag{3.2}$$

显然BVP (1.1) 有解x 当且仅当$x \in K$ 是由(3.2) 定义的算子T 的不动点.

引理3.1 [11,12] E 由(3.1) 定义, M 是E 中的有界集, 若$\left\{\frac{x(t)}{1+t} : x \in M\right\}$,$\{x'(t) : x \in M\}$ 在J 上的任一有界子集上等度连续, 且对任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$N > 0$, $t_1, t_2 > N$, 使得$\left|\frac{x(t_1)}{1+t} - \frac{x(t_2)}{1+t}\right| < \varepsilon$, $|x'(t_1) - x'(t_2)| < \varepsilon$ 对$x \in M$ 一致成立, 则M 在E 中是相对紧的.

由引理3.1 易知, 下面的定理3.1 成立.

定理3.1 假设条件$(\mathbf{H}_1)$ 成立, 则$T : K \to K$ 是全连续算子.

定理3.2 假设条件($\mathbf{H}_1$) 成立, 并且存在常数$d>0$ 满足下列条件:

($\mathbf{H}_2$) $f(t,u)\le f(t,\overline{u})$, $t\in[0,+\infty)$, $0\le u\le\overline{u}$.

($\mathbf{H}_3$) $f(t,(1+t^{\alpha-1})u)\le\frac{d}{\varrho}$, $(t,u)\in[0,+\infty)\times[0,d]$,

where

$$\varrho=\omega\int_0^{\infty}a(s)ds,\ \omega \text{ 由引理2.3 定义.}$$

则BVP (1.1) 有极大解和极小解w^*, ν^* on $[0,+\infty)$, 满足

$$0<\sup_{t\in[0,+\infty)}\frac{|w^*(t)|}{1+t^{\alpha-1}}\le d,\ 0<\sup_{t\in[0,+\infty)}\frac{|\nu^*(t)|}{1+t^{\alpha-1}}\le d.$$

$w_0(t)=dt^{\alpha-1}$, $\nu_0(t)=0$, $t\in[0,+\infty)$, 迭代序列$\{w_n\}$, $\{\nu_n\}$ 可以表示为

$$w_n=\omega\int_0^{\infty}G(t,s)a(s)f(s,w_{n-1}(s))ds,$$

$$\nu_n=\omega\int_0^{\infty}G(t,s)a(s)f(s,\nu_{n-1}(s))ds,$$

并且有

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{t\in[0,+\infty)}\frac{|w_n(t)-w^*(t)|}{1+t^{\alpha-1}}=0,\ \lim_{n\to+\infty}\sup_{t\in[0,+\infty)}\frac{|\nu_n(t)-\nu^*(t)|}{1+t^{\alpha-1}}=0.$$

证明 由定理3.1, $T:K\to K$ 是全连续算子. 对任意的$x_1,x_2\in K$, $x_1\le x_2$, 由算子T的定义和($\mathbf{H}_2$)可知, $Tx_1\le Tx_2$. 令$K_d=\{x\in K:\|x\|\le d\}$. 接下来, 我们首先证明$T:K_d\to K_d$. 对任意的$x\in K_d$, 有$0\le\frac{x(t)}{1+t^{\alpha-1}}\le d,\ t\in[0,+\infty)$.由($\mathbf{H}_3$) 可知,

$$f(t,u)\le\varphi_p\left(\frac{d}{\varrho}\right),\ (t,u)\in[0,+\infty)\times[0,d].$$

由引理2.3 和($\mathbf{H}_3$),

$$\|(Tx)\|=\sup_{t\in[0,+\infty)}\frac{1}{1+t^{\alpha-1}}\int_0^{+\infty}G(t,s)a(s)f(s,x(s)ds$$

$$\le\omega\int_0^{\infty}a(s)f(s,x(s)ds\le d.$$

所以, $T:K_d\to K_d$.

假设$w_0(t)=dt^{\alpha-1}$, $t\in[0,+\infty)$, 则$w_0(t)\in K_d$. 令$w_1=Tw_0$, $w_2=Tw_1=T^2w_0$, 由定理3.1 得, $w_1,w_2\in K_d$. 定义$w_{n+1}=Tw_n=T^nw_0$, $n=1,2,\cdots$. 由于$T:K_d\to K_d$, 我们有$w_n\in T(K_d)\subset K_d$, $w_n\in A(K_d)\subset K_d$. 由算子T 的全连续性可知$\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是E 中的列紧集. 由

条件($\mathbf{H}_3$), 我们有

$$\begin{aligned} w_1(t) &= \int_0^{+\infty} G(t,s)a(s)f(s,w_0(s)ds \\ &\le \omega \int_0^{+\infty} a(s)f(s,w_0(s)ds \\ &\le \omega t^{\alpha-1}\int_0^{+\infty} a(s)f(s,w_0(s)ds \\ &\le dt^{\alpha-1} = w_0(t). \end{aligned} \tag{3.3}$$

由(3.3)式和条件($\mathbf{H}_2$) 可得

$$w_2 = Tw_1 \le Tw_0 = w_1. \tag{3.4}$$

归纳可得

$$w_{n+1} \le w_n,\ n = 1,2,\cdots. \tag{3.5}$$

因此, 存在$w^* \in K$ 满足$w_n \to w^*$, $n \to +\infty$. 由T 的连续性和$w_{n+1} = Tw_n$, 有$Tw^* = w^*$.

另一方面, 由于$\nu_0(t) = 0,\ t \in [0,+\infty)$, 则$\nu_0(t) \in K_d$. 令$\nu_1 = T\nu_0,\ \nu_2 = T\nu_1 = T^2\nu_0$, 由定理3.1可得$\nu_1, \nu_2 \in K_d$. 记$\nu_{n+1} = T\nu_n = T^n\nu_0,\ n = 1,2,\cdots$. 由于$T : K_d \to K_d$, 我们有$\nu_n \in T(K_d) \subset K_d$. 由$T$ 的全连续性可知$\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是E 中的列紧集. 由于$\nu_1 = T\nu_0 \in K_d$, 有

$$\nu_2 = T\nu_1 \ge 0.$$

归纳可得

$$\nu_{n+1} \ge \nu_n,\ n = 1,2,\cdots. \tag{3.6}$$

因此, 存在$\nu^* \in K$ 满足$\nu_n \to \nu^*$, $n \to +\infty$. 应用T 的连续性和$\nu_{n+1} = T\nu_n$, 我们有$T\nu^* = \nu^*$.

下面证明w^* 和ν^* 是BVP(1.1) 在$(0, dt^{\alpha-1}]$上的极大解和极小解. 假设$u \in (0, dt^{\alpha-1}]$ 是BVP(1.1)的任一解, 即$Tu = u$. 由于T 是非减的, $\nu_0(t) = 0 \le u(t) \le dt^{\alpha-1} = w_0(t)$, 因此, 我们有$\nu_1(t) = (T\nu_0)(t) \le u(t) \le (Tw_0)(t) = w_1(t)$, $t \in [0,+\infty)$. 归纳可得

$$\nu_n \le u \le w_n,\ n = 1,2,3,\cdots. \tag{3.7}$$

由于$w^* = \lim_{n\to+\infty} w_n,\ \nu^* = \lim_{n\to+\infty} \nu_n$, 由(3.3)-(3.7)式, 可以得到

$$\nu_0 \le \nu_1 \le \cdots \nu_n \le \cdots \le \nu^* \le u \le w^* \le \cdots \le w_n \le \cdots \le w_1 \le w_0. \tag{3.8}$$

由于$f(t,0) \not\equiv 0,\ t \in [0,+\infty)$, 故0 不是BVP(1.1)的解. 所以, 由(3.8)式可知w^* 和ν^* 是BVP(1.1) 在$(0, dt^{\alpha-1}]$ 上的极大解和极小解, 并且w^* 和ν^* 可以由迭代序列$w_n = Tw_{n-1},\ \nu_n = T\nu_{n-1}$ 得到. $\square$

基金项目

本文受到临沂大学大学生创新创业训练计划项目(X202110452130)部分资助。

参考文献

[1] Kueser, A. (1996) Untersuchung und asymptotische darstellung der intergrale genwisser differential gleichungen bei grossen werthen des arguments. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **116**, 178-212.

[2] Agarwal, P.R. and O'Regan, D. (2001) Infinite Interval Problems for Differential, Difference and Integral Equations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0718-4

[3] Zhao, X. and Ge, W. (2010) Unbounded Solutions for a Fractional Differential Boundary Value Problems on the Infinite Interval. *Acta Applicandae Mathematicae*, **109**, 495-505. https://doi.org/10.1007/s10440-008-9329-9

[4] Liang, S. and Zhang, J. (2011) Existence of Three Positive Solutions of m-Point Boundary Value Problems for Some Nonlinear Fractional Differential Equations on an Infinite Interval. *Computers and Mathematics with Applications*, **61**, 3343-3354. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.04.018

[5] Liang, S. and Zhang, J. (2011) Existence of Multiple Positive Solutions for m-Point Fractional Boundary Value Problems on an Infinite Interval. *Mathematical and Computer Modelling*, **54**, 1334-1346. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.04.004

[6] Zhang, X. and Zhong, Q. (2018) Triple Positive Solutions for Nonlocal Fractional Differential Equations with Singularities Both on Time and Space Variables. *Applied Mathematics Letters*, **80**, 12-19. https://doi.org/10.1016/j.aml.2017.12.022

[7] Wang, F., Liu, L. and Wu, Y. (2019) Iterative Unique Positive Solutions for a New Class of Nonlinear Singular Higher Order Fractional Differential Equations with Mixed-Type Boundary Value Conditions. *Journal of Inequalities and Applications*, **2019**, Article No. 210. https://doi.org/10.1186/s13660-019-2164-x

[8] Tan, J., Zhang, X., Liu, L. and Wu, Y. (2021) An Iterative Algorithm for Solving n-Order Fractional Differential Equation with Mixed Integral and Multipoint Boundary Conditions. *Complexity*, **2021**, Article ID: 8898859. https://doi.org/10.1155/2021/8898859

[9] Podlubny, I. (1999) Fractional Differential Equations, Vol. 198. Academic Press, San Diego, CA.

[10] Miller, K.S. and Ross, B. (1993) An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Wiley, New York.

[11] Liu, Y. (2002) Boundary Value Problem for Second Order Differential Equations on Unbounded Domain. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, **4**, 211-216.

[12] Corduneanu, C. (1973) Integral Equations and Stability of Feedback Systems. Academic Press, New York.